

Weisbach, Julius

**Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik : mit den  
nöthigen Hilfslehren aus der Analysis für den Unterricht an  
technischen Lehranstalten sowie zum Gebrauche für Techniker;  
in drei Theilen:**

**Theil 2: Die Statik der Bauwerke und die Mechanik der  
Umtriebsmaschinen:**

**Abteilung 1: Die Statik der Bauwerke**

**URN:** urn:nbn:de:gbv:ilm1-2014300147

---

*Retrodigitalisierung der gleichnamigen Ausgabe:*

*Erschienen:* Braunschweig : Vieweg, 1883, 5., umgearb. und  
vervollst. Aufl. / bearb. von Gustav Herrmann  
*Umfang:* VIII, 613 S.  
*Digitalisierung durch:* Universitätsbibliothek Ilmenau / ilmedia  
*Digitalisierungsjahr:* 2014  
*Format:* TIFF, 200 DPI, 8 BPP

*Lizenz:*



Dieses Werk von *Julius Weisbach* [ <http://d-nb.info/gnd/118630342> ] und  
*Gustav Herrmann*, [ <http://d-nb.info/gnd/117520683> ], das durch die  
*Universitätsbibliothek Ilmenau / ilmedia* gekennzeichnet wurde, unterliegt  
keinen bekannten urheberrechtlichen Beschränkungen.  
[ <http://creativecommons.org/publicdomain/mark/1.0/> ]

---

1846. 330  
Lehrbuch

der

# Ingenieur- und Maschinen-Mechanik

von

Dr. phil. Julius Weisbach,

weil. Königl. sächsischer Ober-Bergrath und Professor an der sächsischen Bergakademie zu Freiberg.

Zweiter Theil:

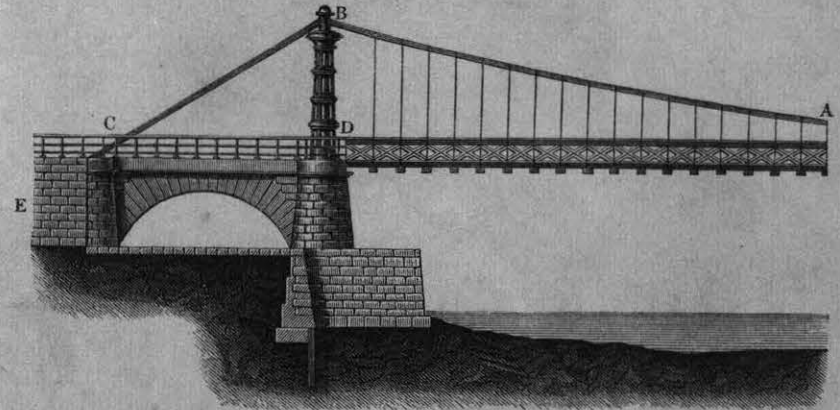
Die Statik der Bauwerke und Mechanik der  
Umtriebsmaschinen.

Fünfte umgearbeitete und vervollständigte Auflage

bearbeitet von

Gustav Herrmann,

Professor an der Königl. technischen Hochschule zu Aachen.



Mit zahlreichen in den Text eingedruckten Holzschnitten.

Erste Abtheilung:

Die Statik der Bauwerke.

Braunschweig,

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.

1882 — 1883.

22<sup>a</sup>



---

Holzſtiche  
aus dem zyklographiſchen Atelier  
von Friedrich Vieweg und Sohn  
in Braunschweig.

---

Papier  
aus der mechanischen Papier-Fabrik  
der Gebrüder Vieweg zu Wendhausen  
bei Braunschweig.

---

**L e h r b u c h**  
der  
**Ingenieur- und Maschinen-  
M e c h a n i k.**

Mit den nöthigen Hilfslehren aus der Analysis  
für den  
**Unterricht an technischen Lehranstalten**  
sowie zum  
**Gebrauche für Techniker**  
bearbeitet  
von

**Dr. phil. Julius Weisbach,**  
weil. Königl. sächsischer Ober-Bergrath und Professor an der sächsischen Bergakademie zu Freiberg.

**Zweiter Theil:**  
**Die Statik der Bauwerke und Mechanik der Umtriebsmaschinen.**

**Fünfte**  
umgearbeitete und vervollständigte Auflage  
bearbeitet von

**Gustav Herrmann,**  
Professor an der Königl. technischen Hochschule zu Aachen.

Mit zahlreichen Holzschnitten.

**Erste Abtheilung.**

---

**Braunschweig,**  
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.  
1882 — 1883.

**Die**  
**Statik der Bauwerke**  
und die  
**Mechanik der Umtriebsmaschinen.**

Für den  
**Unterricht an technischen Lehranstalten**  
sowie zum  
**Gebrauche für Techniker.**

**Zweiter Theil**  
von  
**Dr. Julius Weisbach's**  
**Ingenieur- und Maschinen-Mechanik**  
bearbeitet von

**Gustav Herrmann,**  
Professor an der Königl. technischen Hochschule zu Aachen.

**Fünfte umgearbeitete und vervollständigte Auflage.**

**Erste Abtheilung.**  
**Die Statik der Bauwerke.**  
Mit zahlreichen Holzschnitten.

---

**Braunschweig,**  
Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn.  
1882 — 1883.

Alle Rechte vorbehalten.

EX  
BIBLIOTHECA  
REGIA ACADEM.  
GEORGIAE  
AUG.

## Inhalt des zweiten Theiles.

### Erste Abtheilung.

#### Erstes Capitel.

##### Von dem Erddrucke.

S.		Seite
1	Erde . . . . .	1
2	Activer und passiver Erddruck . . . . .	3
3—4	Druckkräfte im Innern einer Erdmasse . . . . .	5
5	Druck der Erde gegen Stützmauern . . . . .	21
6	Das Prisma des größten Erddruckes . . . . .	28
7	Graphische Druckermittlung . . . . .	33
8	Formeln für den Erddruck . . . . .	39
9	Cohäsion loser Massen . . . . .	43
10	Böschung cohärenter Erdmassen . . . . .	49
11	Futtermauern . . . . .	59
12	Rippen der Futtermauern . . . . .	64
13	Gleiten der Futtermauern . . . . .	73
14	Druckvertheilung . . . . .	78
15	Graphisches Verfahren . . . . .	84

#### Zweites Capitel.

##### Die Theorie der Gewölbe.

16	Gewölbe . . . . .	96
17	Die Stützlinie . . . . .	99
18	Eigenschaften der Stützlinie . . . . .	104
19	Mögliche Stützlinien . . . . .	112
20	Die wirkliche Stützlinie . . . . .	117
21	Prüfung der Gewölbe . . . . .	123
22	Die Kettenlinie als Stützlinie . . . . .	132

§.		Seite
23	Horizontal begrenzte Belastung . . . . .	139
24	Die Stützlinie für Erddruck . . . . .	152
25	Unsymmetrische Gewölbe . . . . .	162
26	Bewegliche Belastung . . . . .	168
27	Gewölbfürke . . . . .	174
28	Die Widerlager . . . . .	182
29	Kreuz- und Klostergewölbe . . . . .	193
30	Kuppelgewölbe . . . . .	199
31	Schiefe Gewölbe . . . . .	209
32	Gewölbte Brücken . . . . .	217

## Drittes Capitel.

## Die Theorie der Holz- und Eisenconstructionen.

33	Holz- und Eisenconstructionen . . . . .	224
34	Belastungen . . . . .	227
35	Der Balken . . . . .	235
36	Bewegliche Belastung . . . . .	250
37	Balken auf mehreren Stützen . . . . .	261
38	Balken auf drei Stützen . . . . .	274
39	Balken auf vier Stützen . . . . .	285
40	Die elastische Linie als Seilcurve . . . . .	296
41	Beispiele . . . . .	302
42—43	Continuirliche Träger . . . . .	310
44	Trägheitsmomente der Querschnitte . . . . .	332
45	Balkenquerschnitte . . . . .	340
46	Schiefe Belastung . . . . .	351
47	Reducirte Querschnitte . . . . .	358
48	Horizontale und verticale Schubspannungen . . . . .	361
49	Spannungsmaxima . . . . .	367
50	Verzahnte Balken . . . . .	375
51	Blechbalken . . . . .	382
52	Röhrenträger . . . . .	392
53	Fachwerke . . . . .	397
54	Fachwerksträger mit parallelen Gurtungen . . . . .	405
55	Zusammengesetzte Fachwerksträger . . . . .	420
56	Parabelträger . . . . .	429
57	Schwedler'sche Träger . . . . .	446
58	Pauli'sche Träger . . . . .	457
59	Sparren . . . . .	464
60	Dachstühle . . . . .	477
61	Sichelförmige Träger . . . . .	492
62	Häng- und Sprengwerke . . . . .	505
63	Lehrgerüste . . . . .	515
64	Bogenträger mit Scharnieren . . . . .	523
65	Elastische Bogenträger . . . . .	532

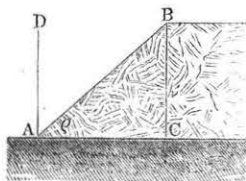
§.		Seite
66	Spannungen der Bogen . . . . .	547
67	Bogenträger aus Holz und Gußeisen . . . . .	556
68	Hängbogen . . . . .	562
69—70	Theorie der Hängebrücken . . . . .	569
71	Ketten von gleichem Widerstande . . . . .	582
72	Pfeiler und Widerlager . . . . .	587
73	Kuppeldächer . . . . .	594
	Alphabetisches Sachregister . . . . .	608

## Von dem Erddrucke.

**Erde.** Unter Erde ist hier eine lockere, aus kleinen Körpern, wie z. B. §. 1. Sandkörnern, zusammengesetzte Masse zu verstehen, welche, in gewissem Sinne zwischen den festen und flüssigen Körpern stehend, auch wohl als eine halbflüssige Masse bezeichnet worden ist. Die Erde unterscheidet sich von den festen Körpern, durch ihren Mangel an Cohäsion, in Folge dessen sie unfähig ist, Zugkräften zu widerstehen, während sie von den Flüssigkeiten dadurch unterschieden ist, daß bei der Verschiebung ihrer Theilchen an einander gewisse Reibungswiderstände auftreten, welche, wie bei festen Körpern, durch die zwischen ihren Theilchen wirkenden Druckkräfte hervorgerufen werden. Nicht alle Erden sind übrigens gänzlich cohäsionslos, vielmehr erlangen die meisten, namentlich die lehmhaltigen Erden, im feuchten Zustande, besonders wenn sie durch Stampfen comprimirt oder durch langdauernden Druck verdichtet worden sind, eine gewisse Cohäsion oder Widerstandskraft auch gegen Zugkräfte, welcher Widerstand im Allgemeinen von dem Drucke unabhängig und proportional mit der Fläche anzunehmen ist, in welcher eine Trennung der Masse durch die Zugkraft angestrebt wird. Auf diese Cohäsion darf man wohl Rücksicht nehmen, wenn es sich darum handelt, die Stabilität von Erdkörpern zu prüfen, die aus gewachsenem Boden bestehen (Einschnitte), dagegen pflegt man die Cohäsion außer Acht zu lassen bei frisch aufgeschichteten Massen, wie sie zur Herstellung von Dämmen und zur Hinterfüllung von Futtermauern u. verwendet werden. Im Folgenden soll zunächst von gänzlich cohäsionslosen Massen die Rede sein und der Einfluß der Cohäsion in einem besonderen Paragraphen besprochen werden.

Zufolge der angegebenen Eigenschaften der Erde wird dieselbe zwar einerseits nicht, wie feste Körper, in beliebigen bestimmt begrenzten Formen auftreten können, sie wird aber andererseits auch nicht zur Erhaltung des Gleichgewichtes eines so vollständigen Umschließens durch Gefäße bedürfen, wie es für Flüssigkeiten nöthig ist. Während letztere immer in Folge der Schwerkraft und wegen der leichten Verschieblichkeit ihrer Theilchen eine horizontale Oberfläche annehmen, können Erdmassen in ihrer freien Oberfläche bis zu einem bestimmten Grenzbetrage gegen den Horizont geneigt sein. Man erhält diese Grenze der Neigung für irgend eine cohäsionslose lockere Masse einfach durch Abgraben derselben, wobei von selbst die Masse an der angestochenen Stelle zusammenstürzt und sich in einer gegen den

Fig. 1.



Horizont unter einem Winkel  $\varphi$  geneigten Ebene  $AB$  (Fig. 1) anordnet. Man bemerkt dabei, daß, so lange noch Erdtheilchen oberhalb dieser Ebene vorhanden sind, dieselben wie auf einer schrägen festen Unterlage herabgleiten, und man muß daher nach dem in Thl. I über die Reibung auf der schiefen Ebene Gesagten schließen, daß der Neigungswinkel  $BAC$ , oder wie er genannt wird, der natürliche Böschungswinkel mit dem Reibungswinkel übereinstimmt, welcher der Masse zukommt, so daß die Beziehung gilt:

$$\tan \varphi = \varphi,$$

wenn  $\varphi$  den Reibungscoefficienten für die Erdtheilchen an einander bedeutet.

In manchen Schriften wird unter der Böschung der Neigungswinkel verstanden, den die natürliche Oberfläche mit der verticalen Richtung  $AD$  bildet, also  $90^\circ - \varphi$ ; im Folgenden soll unter Böschungswinkel immer die Neigung gegen den Horizont gedacht werden. Auch bezeichnet man häufig im Bauwesen die Neigung einer Fläche durch Angabe der horizontalen Basisbreite  $AC$  für eine Höhe  $BC$  gleich Eins, indem man z. B. unter anderthalbfacher Böschung eine solche versteht, für welche  $AC = 1,5 BC$ , also  $\tan \varphi = \frac{1}{1,5}$  und  $\varphi = 33^\circ 40'$  ist.

Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der specifischen Gewichte  $\gamma$ , der natürlichen Böschungswinkel  $\varphi$  und der Reibungscoefficienten  $\varphi$  der hauptsächlich beim Erdbau in Betracht kommenden Materialien nach den Versuchen von Marztony\*):

\*) E. Holzhey, Vorträge über Baumechanik. Wien 1879.

Er d a r t	Specifisches Gewicht $\gamma$	Natürlicher Böschungswinkel $\varrho$	Reibungs- coefficient $\varphi = \tan \varphi$	
Dammerde	locker und trocken . .	1,33	39° 18'	0,818
	etwas feucht . . . .	1,33	41° 17'	0,877
	ganz naß . . . . .	1,86	34° 28'	0,686
Lehm . .	locker und trocken . .	1,44	39° 39'	0,828
	etwas feucht . . . .	1,44	39° 44'	0,831
	ganz naß . . . . .	1,99	33° 41'	0,667
Sand . .	trocken . . . . .	1,68	37° 1'	0,754
	etwas feucht . . . .	1,68	39° 45'	0,832
	ganz naß . . . . .	1,95	41° 51'	0,890
Schotter . . . . .	1,68	40° 46'	0,862	
Also Erde im Durchschnitt . . .	1,65	38° 40'	0,80	

Für ganz feinen Sand hat man die Böschung  $\frac{2}{3}$ , daher den Böschungswinkel  $\varphi = 31^\circ$  gefunden; Roggenkörner haben  $\varphi = 30^\circ$ , sowie Erbsen  $\varphi = 27^\circ$  gegeben, dagegen loserer Halbensurz aus Gneisflücken von 18 cbcm bis 0,03 cbm bestehend, sowie Steinkohlen und Schlacken in Stücken von 50 bis 120 cbcm im Mittel  $\varphi = 38^\circ$ . Für Schrottkörner hat man ferner  $\varphi = 25^\circ$ , für Vogeldunst  $\varphi = 22\frac{1}{2}^\circ$  und für Sägespäne  $\varphi = 44^\circ$  gefunden. Versuche über die natürliche Böschung loserer Massen werden durch Aufschütten und Streichen dieser Massen von unten nach oben angestellt. Dabei ist eine hinreichende Rauigkeit der Bodenfläche vorausgesetzt, damit dieselbe vermöge ihrer Reibungsfähigkeit die horizontale Druckcomponente der auf ihr ruhenden Erdmasse aufzunehmen vermag\*).

**Activer und passiver Erddruck.** Wenn eine cohäsionslose Erdmasse  $E$ , Fig. 2 (a. f. S.), unter einer steileren Neigung gegen den Horizont, als dem natürlichen Böschungswinkel  $BAC$  entspricht, erhalten werden soll, so muß man ihrem Bestreben, auf  $BA$  abwärts zu gleiten, durch eine stützende Mauer oder Bohlwand  $M$  entgegenwirken. Diese Stützmauer wird auf ihrer hinteren Fläche  $AD$  einem gewissen Drucke  $P$  der Erde ausgesetzt sein, welchem sie durch ihre Reaction —  $P$  das Gleichgewicht zu halten hat. Man nennt diesen Druck der Erde, welcher ein Umstürzen oder Verschieben der Mauer anstrebt und auch bewirkt, sobald die Mauer nicht

\*) E. Scheffler, Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken. Braunschweig 1857



das erforderliche Stabilitätsmoment besitzt, den activen Erddruck, oder auch wohl schlechtweg Erddruck. Im Gegensatz hierzu versteht man unter dem passiven Erddruck oder Erdwiderstande denjenigen Widerstand,

Fig. 2.

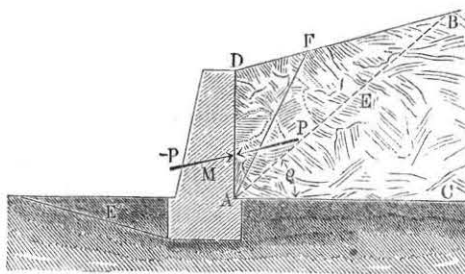
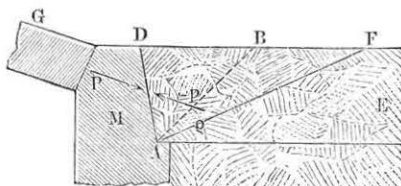


Fig. 3.



in Fig. 2 die Widerstandsfähigkeit der Futtermauer  $M$  erhöht, doch muß im Allgemeinen die Berücksichtigung des passiven Erddruckes mit Vorsicht geschehen, da auf diese Wirkung von Erdmassen wegen der mehr oder minder großen Zusammendrückbarkeit der letzteren nicht mit unbedingter Sicherheit zu rechnen ist.

Die Theorien, welche bislang zur Bestimmung des Erddruckes aufgestellt worden sind, können sämmtlich nur als Annäherungen gelten, da die für den Erddruck geltenden Gesetze nur ungenügend bekannt sind, und die strenge Durchführung der bezüglichen Rechnungen zu unüberwindlichen Schwierigkeiten führt. Die verschiedenen zur Anwendung gekommenen Theorien fußen auf der Annahme, daß von der Erdmasse beim Ausweichen der Mauer  $M$ , Fig. 2, ein keilförmiges Prisma  $DAF$  auf einer ebenen Trennungsfläche  $AB$  wie auf einer schiefen Ebene herabgleite, so daß der auf die Mauer ausgeübte Druck  $P$  durch die betreffende Gewichtskomponente dieses Erdprismas dargestellt ist. Diese die Rechnung vereinfachende Annahme einer ebenen Gleitfläche wird durchgehends zu Grunde gelegt, obwohl sich aus

den die Erdmasse  $E$ , Fig. 3, einer Verschiebung entgegensetzt, welche durch die Mauer  $M$ , etwa in Folge der Schubkraft  $P$  des Gewölbes  $G$  angestrebt wird. Die Kenntniß des Erddruckes ist daher von besonderer Wichtigkeit für die Festsetzung der Stabilitätsverhältnisse von Futtermauern, Fig. 2, welche der Erddruck umzustürzen bezw. zu verschieben strebt. In Fig. 3 kommt der Erdwiderstand der Stabilität der Widerlagsmauer zu Hilfe, ebenso wie der passive Erddruck der Erdmasse  $E'$

allgemeinen Betrachtungen erkennen läßt, daß bei einem eintretenden Zusammenstürzen des Bauwerkes die Bruchfläche eine gekrümmte sein muß. Ferner nahm man in den ersten Theorien an, daß die Bruchfläche mit der Ebene  $AB$  der natürlichen Böschung zusammenfalle, worauf später zuerst Coulomb von der ohne Zweifel richtigeren Voraussetzung ausging, daß unter allen möglichen Erdprismen, welche betreffenden Falles zum Abgleiten kommen können, jedenfalls dasjenige am ehesten zum Abbruche gelangt, welches, Fig. 2, den größten Druck  $P$  auf die Wand  $AB$  ausübt, oder welches, Fig. 3, dem ausgeübten Schube  $P$  den kleinsten Widerstand entgegensetzt. Demgemäß spricht man von einem Prisma des größten Druckes und einem solchen des kleinsten Widerstandes.

Diese Annahme ist in den späteren Arbeiten über den Erddruck fast allgemein angenommen worden, und man hat dabei behufs Ermittlung des ausgeübten Druckes oder Widerstandes die betreffenden Gleitflächen  $AF$  der ausgesprochenen Bedingung gemäß zu bestimmen, daß die von der Erde ausgeübte Kraft in dem einen Falle, Fig. 2, ein Maximum, in dem anderen, Fig. 3, ein Minimum sei.

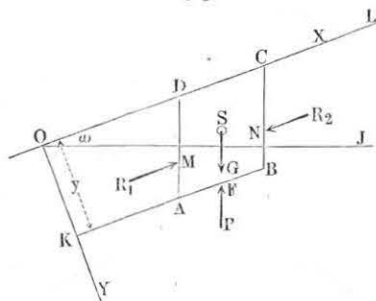
In der letzten Zeit hat man sich ferner bemüht, über die Gesetze, welchen die Druckvertheilung im Innern einer unbegrenzten Erdmasse unterworfen ist, ins Klare zu kommen, und wenn auch die erzielten Resultate dieser Arbeiten noch nicht das Problem als gelöst erscheinen lassen, so sind doch die Ergebnisse für die Beurtheilung der vorliegenden Fragen von unterschiedener Bedeutung. Es sollen daher im Folgenden zunächst die Gesetze angeführt werden, welche für die Vertheilung des Druckes im Innern einer unbegrenzten homogenen Erdmasse gelten. Bei dieser Darstellung soll der Einfachheit und Anschaulichkeit wegen im Wesentlichen die graphische Methode befolgt werden, welche in der vorzüglichen Arbeit von Mohr\*) angegeben ist.

**Druckkräfte im Innern einer Erdmasse.** In dem Folgenden §. 3. werde eine Erdmasse von durchaus gleichmäßiger Beschaffenheit vorausgesetzt, welche nur oberhalb durch eine Ebene  $OL$ , Fig. 4 (a. f. S.), begrenzt ist. Diese Begrenzung sei gegen den Horizont  $OJ$  unter dem Winkel  $\omega$  geneigt, wobei  $\omega$  nicht größer als der natürliche Böschungswinkel  $\varphi$ , sonst aber beliebig groß sein kann. Die Erdoberfläche selbst sei als die eine Coordinatenebene ( $xz$ ) und als  $Y$ -Axe die in dem beliebigen Punkte  $O$  auf der Oberfläche senkrechte Gerade gewählt, so zwar, daß die  $Z$ -Axe horizontal und auf der Bildebene in  $O$  senkrecht ist. Man denke sich zunächst in einem

\*) Zeitschr. d. Hannov. Architekten- u. Ingenieur-Vereins. 1871.

beliebigen Abstände  $OK = y$  von der Oberfläche ein zu der letzteren paralleles Flächenstück, etwa ein Rechteck von der Breite  $AB = a$  und der zur

Fig. 4.



$P$  der darunter befindlichen Erde ausgeübt sein, und endlich wirkt das Gewicht  $G$  des betrachteten Parallelepipeds in dessen Schwerpunkte  $S$  vertical abwärts. Diese sechs Kräfte müssen nun mit einander im Gleichgewichte sein.

Wegen der vorausgesetzten Gleichmäßigkeit der Erdmasse wird der Druck  $R_1$  auf  $AD$  mit demjenigen  $R_2$  auf  $BC$  nicht nur gleich und entgegengesetzt sein, sondern auch ihre Angriffspunkte  $M$  und  $N$  müssen dieselbe Lage in den Flächen haben, denn in Bezug auf die beiden Flächen  $AD$  und  $BC$  sind alle Verhältnisse genau dieselben. Ganz dieselbe Betrachtung läßt sich natürlich in Bezug auf die beiden Kräfte  $R_3$  und  $R_4$  anstellen, welche auf die mit der Willebene parallelen Flächen des Prismas wirken. Folglich hat man die algebraische Summe der vier Kräfte  $R$  gleich Null, da  $R_2 = -R_1$  und  $R_4 = -R_3$  ist. Daraus folgt weiter, daß auch die beiden anderen Kräfte  $G$  und  $P$  gleich und entgegengesetzt sein müssen, also  $P = -G$  ist. Es ist aber auch deutlich, daß die Kraft  $P$  in dem Schwerpunkte  $F$  der Bodenfläche, also vertical unter  $S$  angreifen muß, da die Massen um die Verticale durch den Schwerpunkt  $S$  herum symmetrisch vertheilt sind. Die Kräfte  $P$  und  $G$  wirken daher in einer und derselben Geraden, und bilden somit kein auf Drehung wirkendes Kräftepaar. Daraus geht aber für die Kräfte  $R$  wiederum hervor, daß dieselben parallel zu der Oberfläche  $OL$  gerichtet sein müssen, denn wäre dies nicht der Fall, so würden  $R_1$  und  $R_2$  sowie  $R_3$  und  $R_4$  Kräftepaare bilden, also würde der Gleichgewichtszustand nicht möglich sein. Von den vier mit der Oberfläche parallelen Kräften  $R$  wirken natürlich diejenigen  $R_1$  und  $R_2$  parallel mit der  $X$ -Axe, während die Kräfte  $R_3$  und  $R_4$  mit der horizontalen  $Z$ -Axe parallel sind.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt daher, daß in einer homogenen und unbegrenzten Erdmasse der Druck auf ein verticales Flächen-

Willebene senkrechten Höhe  $z=1$ , und betrachte dieses Rechteck als die Basis eines verticalen, bis an die Oberfläche reichenden schiefwinkligen Parallelepipeds,  $ABCD$ . Auf die vier verticalen Seitenflächen wirkt die umgebende Erdmasse mit vier gewissen Kräften, welche allgemein mit  $R_1, R_2, R_3$  und  $R_4$  bezeichnet sein mögen; ferner wird die Grundfläche  $AB$  ebenfalls einem gewissen Drucke

element parallel zu der Erdoberfläche gerichtet ist, während ein der Oberfläche paralleles Flächenstück einen verticalen Druck empfängt, welcher, in dem Schwerpunkte der Fläche angreifend, gleich dem Gewichte des über dem Flächenstücke befindlichen Erdprismas ist.

Bezeichnet man mit  $F$  die Größe der betrachteten Bodenfläche  $AB$ , so ist das Gewicht des besagten Erdprismas  $ABCD$  durch  $G = \gamma F y = P$  ausgedrückt, wenn  $\gamma$  das Gewicht einer Cubikeinheit Erde bedeutet. Der spezifische Druck auf die Bodenfläche, d. h. der Druck pro Flächeneinheit derselben ist daher durch

$$p = \frac{P}{F} = \gamma y$$

gegeben, welcher Druck eine zur Fläche normale Pressung

$$n = p \cos \omega$$

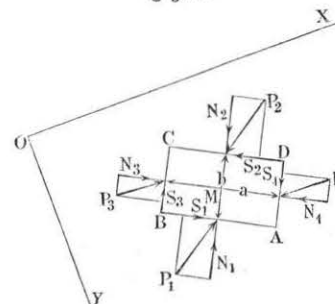
und eine tangential oder Schubspannung

$$s = p \sin \omega$$

hervorruft.

In Betreff der Schubspannungen läßt sich noch ein wichtiges Gesetz angeben. Denkt man sich nämlich im Innern einer unendlichen Erdmasse ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepipedum  $ABCD$ , Fig. 5, dessen

Fig. 5.



Seiten in der Willebene  $AB = a$  und  $AD = b$  sein mögen, während die dazu senkrechte der  $Z$ -Axe parallele Abmessung gleich 1 gesetzt werden mag, so wirken auf die vier Flächen  $AB, CD, BC$  und  $AD$  irgendwie vier Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$ , von denen jede in ihre betreffende Normalcomponente  $N$  und Tangentialkraft  $S$  zerlegt werde. Die vier Normalkräfte gehen sämmtlich durch den Mittelpunkt  $M$  des unendlich kleinen Parallelepipeds, in welchem auch das Gewicht des letz-

teren angreifend zu denken ist, welches übrigens gegen die Kräfte  $N$  und  $S$  als unendlich kleines höherer Ordnung vernachlässigt werden kann. Bezeichnet man die spezifischen Spannungen mit  $n$  und  $s$ , so ist zunächst ersichtlich, daß  $s_1 = s_2$  und  $s_3 = s_4$  zu setzen ist, da die Unterschiede  $s_2 - s_1$  und  $s_4 - s_3$  ebenfalls nur unendlich klein sind, während die spezifischen Spannungen  $s$  endliche Größen darstellen. Man hat daher,

wenn man  $S_1 = S_2 = a s_1$  und  $S_3 = S_4 = b s_3$  setzt und den Mittelpunkt  $M$  als Momentenmittelpunkt wählt, für das Gleichgewicht die Bedingung:

$$a s_1 \cdot b = b s_3 \cdot a,$$

woraus

$$s_1 = s_3 = s_2 = s_4$$

folgt.

Hieraus schließt man, daß je zwei in einem beliebigen Punkte zu einander senkrechte Flächen gleich großen Schubspannungen pro Flächeneinheit ausgesetzt sind.

- §. 4. Um nun den Druck auf irgend welches Flächenelement im Innern einer unbegrenzten Erdmasse zu ermitteln, sei  $abc$ , Fig. 6, die Grundfläche eines unendlich kleinen, der  $Z$ -Axe parallelen dreiseitigen Prismas, dessen untere Fläche  $ab$  parallel zu der gegen den Horizont unter dem beliebigen Winkel  $\omega$  geneigten Oberfläche der Erdmasse, und dessen Fläche  $bc$  senkrecht auf der Grundfläche  $ab$  steht, während die dritte Fläche  $ac$  unter dem beliebigen Winkel  $\alpha$  gegen  $ab$  geneigt sein soll. Die Länge des Prismas in der Richtung der  $Z$ -Axe möge gleich der Einheit angenommen werden. Auf diese drei Flächen wirken drei Kräfte  $P_1$  auf  $ab$ ,  $P_2$  auf  $bc$  und  $P$  auf  $ac$ . Bezeichnet man mit  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p$  die entsprechenden spezifischen Druckkräfte dieser Flächen, so hat man, wenn man auch  $ab$  gleich der Einheit annimmt,  $P_1 = p_1$ ,  $P_2 = p_2 \tan \alpha$  und  $P = p \sec \alpha$ . Diese drei Kräfte müssen mit einander im Gleichgewichte sein, da die auf die beiden dreieckigen verticalen Endflächen des Prismas wirkenden Druckkräfte nach dem Vorstehenden sich gegenseitig aufheben, und das Eigengewicht des unendlich kleinen Prismas gegen die Flächendrucke als unendlich kleines verschwindet. Um die Bedingungen des Gleichgewichtes zu erkennen, sei nun das Kräftepolygon gezeichnet, und zwar sei nach einem gewissen Maßstabe der auf die Fläche  $ab$  wirkende Druck  $P_1$ , welcher nach dem Vorstehenden vertical gerichtet und gleich  $\gamma y$  ist, durch die Verticale  $DF$  in der Mitte  $D$  von  $ab$  ausgedrückt. Wenn man die Gerade  $FB$  senkrecht zu  $ab$  zieht, so erhält man offenbar in

$$FB = P_1 \cos \omega = \gamma y \cos \omega = N_1$$

den Normaldruck und in

$$DB = P_1 \sin \omega = \gamma y \sin \omega = S_1$$

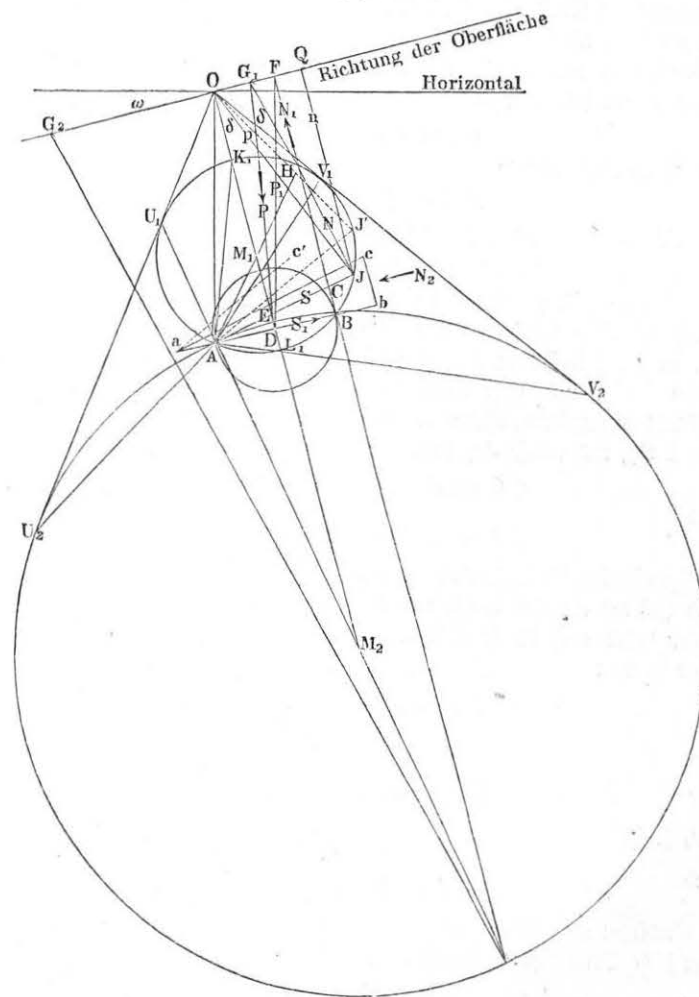
die Schubkraft der Fläche  $ab$ . Der Druck  $P$  auf  $ac$  ist vorläufig unbekannt, und von der Druckkraft  $P_2$  auf die Fläche  $bc$  weiß man nur, daß nach dem Vorhergehenden die spezifische Schubspannung  $s_2$  gleich derjenigen  $s_1$  der Fläche  $ab$  ist, folglich hat die auf  $bc$  wirkende Schubspannung die Größe:

$$S_2 = bc \cdot s_1 = S_1 \frac{bc}{ab} = S_1 \tan \alpha$$

Macht man daher  $DA = DB = S_1$ , und zieht durch  $A$  die Gerade  $AC$  parallel mit  $ac$ , so erhält man in

$$ED = AD \tan \alpha = S_1 \tan \alpha$$

Fig. 6.



die Schubkraft  $S_2$  der Fläche  $bc$ . Die drei Kräfte  $S_2$ ,  $S_1$  und  $N_1$  sind daher durch den Linienzug  $EDBF$  dargestellt.

Um die Größe zu finden, welche die vorläufig noch ganz unbestimmte Normalkraft  $N_2$  der Fläche  $bc$  möglicher Weise haben kann, sei  $N_2$  zunächst beliebig groß angenommen und gleich  $FG_1$  parallel mit der Basis  $ab$  oder der Terrainsfläche angetragen. Unter dieser Voraussetzung giebt die Schlußlinie  $G_1E$  des Kräftepolygons  $EDBFG_1$  bekanntlich der Größe und Richtung nach die Kraft  $P$  auf die dritte Prismenfläche  $ac$ . Zieht man von  $G_1$  die Linie  $G_1J$  senkrecht zu dieser Fläche  $ac$ , so giebt  $EG_1J = \delta$  den Winkel, unter welchem die Kraft  $P$  gegen die Normale der Fläche  $ac$  geneigt ist, und man hat daher in

$$G_1J = P \cos \delta = N$$

die Normalkraft, und in

$$JE = P \sin \delta = S$$

die Schubkraft der besagten Fläche.

Es ist nun aus der Figur ersichtlich, daß die Punkte  $A$ ,  $B$  und  $J$  mit dem Durchschnittspunkte  $H$  der beiden Geraden  $G_1J$  und  $FB$  auf der Peripherie eines Kreises liegen müssen, für welchen  $AH$  ein Durchmesser ist, da die betreffenden Winkel bei  $B$  und  $J$  Rechte sind. Zeichnet man diesen Kreis, und zieht durch seinen Mittelpunkt  $M_1$  die Gerade  $M_1O$  senkrecht zu der Terrainsfläche bis zum Durchschnitte  $O$  mit der Verlängerung von  $FG_1$ , und ebenso  $JQ$  parallel zu  $M_1O$ , so erkennt man leicht, daß

$$QO = JE \cdot \cos \alpha = S \cos \alpha$$

und

$$QJ = G_1J \cdot \cos \alpha = N \cos \alpha$$

ist, da offenbar die Linie  $JE$  mit der Oberfläche, sowie die Normalen  $G_1J$  und  $QJ$  mit einander den Winkel  $\alpha$  bilden. Diese Größen  $QO$  und  $QJ$  stellen daher auch die specifischen Spannungen  $s$  und  $n$  der Fläche  $ac$  vor, denn da man

$$S = ac \cdot s = \frac{s}{\cos \alpha}$$

und

$$N = ac \cdot n = \frac{n}{\cos \alpha}$$

hat, so ist

$$QO = S \cos \alpha = s$$

und

$$QJ = N \cos \alpha = n.$$

Verbindet man daher noch  $O$  mit  $J$ , so erhält man in  $OJ$  nicht nur die specifische Druckkraft der Fläche  $ac$ :

$$p = \sqrt{s^2 + n^2},$$

sondern auch in  $M_1OJ = \delta$  den Winkel, welchen diese Druckkraft mit der Normalen zur Fläche  $ac$  bildet. Daß der Winkel  $M_1OJ = EG_1J = \delta$  ist, erkennt man daraus, daß

$$\text{tang } EG_1J = \frac{JE}{G_1J} = \frac{S}{N} = \frac{s}{n} = \frac{QO}{QJ} = \text{tang } EOJ$$

ist.

Diese Beziehung giebt in sehr einfacher Art ein anschauliches Bild von der Vertheilung der Druckkräfte im Innern der Erdmasse. Da nämlich, wie man leicht erkennt, die gegenseitige Lage von  $A$ ,  $B$  und  $O$  zu einander bei einer gewissen Tiefe  $y$ , also auch einem bestimmten  $OA$  von vornherein feststeht und nicht von der Neigung  $\alpha$  der Ebene  $ac$  abhängig ist, und da auch  $H$  gegeben ist, sobald über die Größe von  $n_2$ , also von  $FG_1 = N_2$  eine Annahme gemacht wird, so wird der durch  $A$ ,  $B$  und  $H$  gelegte Kreis durch eine solche Annahme von  $n_2$  unzweifelhaft festgestellt. Daher giebt dieser Kreis, immer unter der gemachten Voraussetzung über die Größe von  $n_2$ , ein Mittel an die Hand, um für jede beliebige Ebene die Größe der specifischen Druckkraft  $p$  und deren Abweichung von der Normalen zur Fläche zu finden. So erhält man z. B. für die beliebige Ebene  $ac'$ , wenn man  $AJ'$  dazu parallel zieht, in der Strecke  $OJ'$  nach dem gewählten Kräftemaßstabe die specifische Druckspannung  $p'$  und in  $M_1OJ'$  deren Neigung  $\delta'$  gegen die Normale zu  $ac'$ .

Denkt man sich die Ebene  $ac$  um  $a$  im Kreise herumgedreht, so daß sie alle denkbaren Neigungen annimmt, so wandert bei gleichzeitiger Drehung der Sehne  $AJ$  der Punkt  $J$  auf dem Umfange des Kreises herum, und man erhält in besagter Weise in den von  $O$  ausgehenden Fahrstrahlen  $OJ$  nach dem Endpunkte  $J$  der Sehne die specifischen Spannungen  $p$  für alle entsprechenden Lagen der Ebene  $ac$ . Diese Druckspannungen nehmen offenbar für die Richtung  $AK_1$  ihren kleinsten Werth  $p_{\min} = OK_1$ , und für die dazu senkrechte Lage  $AL_1$  der Fläche ihren größten Werth  $p_{\max} = OL_1$  an. Für beide Flächen ist der Abweichungswinkel  $\delta$  zwischen Druckkraft und Normale gleich Null, d. h. diese Druckspannungen sind senkrecht zu den Flächen, also für die Ebene  $AK_1$  in  $AL_1$  und für die Ebene  $AL_1$  in  $AK_1$  fallend. Schubspannungen treten in diesen Ebenen also nicht auf. Die größte Abweichung der Druckkraft von der Flächennormale findet für diejenigen beiden Ebenen statt, deren Richtungen durch die Sehnen  $AU_1$  und  $AV_1$  nach den Berührungspunkten der Tangenten  $OU_1$  und  $OV_1$  gehen.

Wie im Obigen wiederholt bemerkt worden, gilt der betreffende Kreis zum Mittelpunkte  $M_1$  nur unter der gemachten Voraussetzung, daß  $N_2 = n_2 \text{ tang } \alpha$  die Größe  $FG_1$  habe, d. h. also, wenn hinsichtlich der normalen specifischen Spannung  $n_2$  auf eine zur Terrainsfläche senkrechte



und zur  $Z$ -Axe parallele Ebene, wie  $bc$ , eine bestimmte Annahme gemacht wird. Eine andere Annahme in dieser Hinsicht liefert auch einen anderen Kreis, und es ist aus der Figur ersichtlich, wie bei einer Vergrößerung von  $FG_1$  der Schnittpunkt  $H$  tiefer rückt, so daß der Kreis kleiner wird, und umgekehrt, wie eine Verringerung von  $n_2$  den Kreis vergrößert.

Um nun die in der Wirklichkeit stattfindenden Verhältnisse zu ermitteln, genügt es, den Reibungscoefficienten der betrachteten Erdmasse zu kennen. Ist derselbe wieder durch  $\varphi$ , der Reibungswinkel  $\varphi$  also durch  $\varphi = \tan \varphi$  gegeben, so muß man bemerken, daß der Gleichgewichtszustand der Erdmasse an die Bedingung geknüpft ist, daß nirgendwo die Druckrichtung auf ein Flächenelement von der Normalen derselben um einen größeren Betrag abweiche, als der Reibungswinkel angiebt. Diese Abweichung kann sowohl nach der einen wie nach der anderen Seite, oder allgemeiner innerhalb desjenigen Regelmantels stattfinden, welcher um die Normale als Axe gedacht wird, und dessen halber Spigenwinkel gleich  $\varphi$  ist (Reibungskegel). Innerhalb dieser Grenzen giebt es natürlich unendlich viele Zustände, für welche das Gleichgewicht bestehen kann. Für den vorliegenden Zweck kommen indessen besonders diejenigen beiden Grenzzustände in Betracht, in denen das Gleichgewicht bei der geringsten Veränderung gestört wird, d. h. in welchen entweder eine zu stützende Erdmasse abgleitet, wenn die stützende Mauer dem activen Erddrucke nicht zu widerstehen vermag, oder in welchen durch eine überwiegende Schubkraft der passive Erdwiderstand überwunden wird.

Nach diesen Bemerkungen ist es nun deutlich, daß ein solcher Kreis, für welchen die Tangenten  $OU_1$  und  $OV_1$  mit der Centrallinie  $OM_1$  einen Winkel  $M_1OU_1 = M_1OV_1$  gleich dem Reibungswinkel  $\varphi$  der Erdmasse bilden, einem der besagten Grenzzustände entsprechen muß. Solcher Kreise giebt es nun offenbar zwei, welche durch die Punkte  $A$  und  $B$  gehen, und die unter dem Reibungswinkel  $\varphi$  gegen die Centrale geneigten Geraden  $OU_2$  und  $OV_2$  in  $U_1$  und  $V_1$  bzw.  $U_2$  und  $V_2$  berühren.

Die vorstehende Untersuchung zeigt, daß der Kreis  $M_1$  unter der Annahme eines bestimmten specifischen Normaldruckes  $n_2$  auf das zur Terrainfläche senkrechte Flächenelement  $bc$  gilt, so zwar, daß die Strecke  $FG_1$  den Normaldruck  $n_2 \tan \alpha$  auf das Flächenelement  $bc$  darstellt, also

$$n_2 = \frac{FG_1}{\tan \alpha}$$

angenommen werden muß. Würde man  $n_2$ , also auch  $FG_1$  kleiner annehmen, so würde, da  $H$  emporrückt, der Kreis  $M_1$  größer werden und das Gleichgewicht gestört sein, weil der Winkel der von  $O$  an diesen Kreis gezogenen Tangenten mit der Centrallinie  $OM_1$  größer als der Reibungswinkel  $\varphi$  wäre. Hiernach würde es in der Erdmasse Flächen geben, für welche der Druck um einen größeren Betrag, als der Reibungswinkel ist, von

der Normalen abweicht. Hieraus geht hervor, daß der Kreis  $M_1$  einem solchen Grenzzustande entspricht, in welchem die geringste Verkleinerung des Druckes  $n_2$  eine Bewegung zur Folge haben müßte, und zwar würde alsdann eine Bewegung der Erdmasse auf den Flächen  $AU_1$  und  $AV_1$  eintreten, für welche die Abweichung der Druckkraft von der Normalen den Reibungswinkel erreicht. Diese beiden Flächen treten demnach als Gleitflächen auf, und es entspricht offenbar der Kreis  $M_1$  demjenigen Gleichgewichtszustande, welcher für die Beurtheilung der von Stützmauern auszuhaltenden Druckkraft in Betracht kommt, da ein Abgleiten des zwischen den beiden Gleitflächen  $AU_1$  und  $AV_1$  befindlichen Erdprismas erfolgen muß, sobald die betreffende Stützmauer ausweicht, d. h. nur einen Druck gegen die Erdmasse auszuüben vermag, welcher geringer ist als derjenige, welcher aus dem angenommenen Drucke

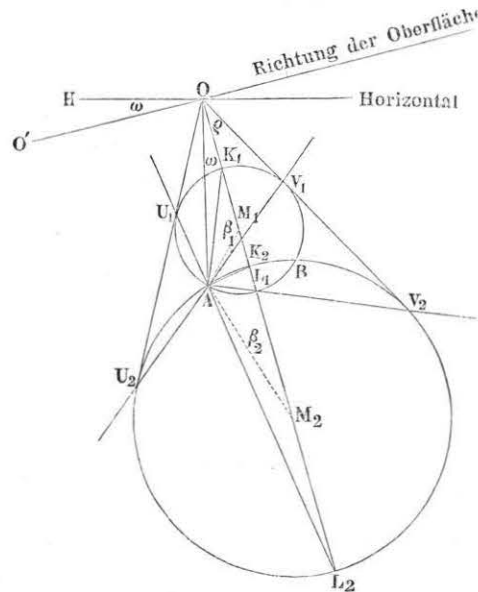
$$n_2 = \frac{FG_1}{\tan \alpha}$$

sich ergibt. Mohr nennt diesen Gleichgewichtszustand den unteren Grenzzustand, zum Unterschiede von dem oberen, welcher durch den Kreis zum Mittelpunkte  $M_2$  dargestellt wird, und welcher, wie leicht zu ersehen ist, sich dadurch charakterisirt, daß die geringste Vergrößerung des Druckes  $n_2$  eine Störung des Gleichgewichts zur Folge hat. Denkt man sich nämlich die Größe  $n_2$  von dem Werthe des unteren Grenzzustandes  $\frac{FG_1}{\tan \alpha}$  allmählig zunehmend, trägt man also die Strecke  $FG_1$  von  $F$  aus größer und größer an, so findet sich durch Betrachtung der Figur, daß der Kreis  $M_1$  kleiner und kleiner wird, bis er seinen kleinsten Werth erreicht, wenn  $G_1$  nach  $O$  trifft, in welchem Falle der Mittelpunkt  $M$  in  $D$  auf  $AB$  fällt, der Kreis also die Gerade  $BF$  in  $B$  berührt, indem der Durchschnittspunkt  $H$  in  $B$  hineinfällt. Eine weitere Vergrößerung von  $n_2$ , bei welcher der Endpunkt  $G$  der Strecke  $FG$  über  $O$  hinaus fällt, läßt den Durchmesser des Kreises wieder zunehmen, und man erhält für den zweiten die Geraden  $OU_2$  und  $OV_2$  berührenden Kreis  $M_2$  den Normaldruck  $n_2 \tan \alpha$  auf die Fläche  $bc$  in der Strecke  $FG_2$ , wenn man durch den Durchschnittspunkt  $H_2$  dieses Kreises mit  $FB$  eine zu  $ac$  senkrechte Gerade  $H_2G_2$  zieht. Hierdurch ist der erwähnte obere Grenzzustand dargestellt, denn es ist deutlich, daß die geringste fernere Vergrößerung von  $n_2$  oder  $FG_2$  eine Störung des Gleichgewichtes herbeiführen muß, wobei ein Gleiten der Erdmasse in den Gleitflächen  $AU_2$  und  $AV_2$  stattfindet, in welchen die Druckkraft um den Reibungswinkel  $\varphi$  von der Normalen abweicht.

Durch die vorstehende Betrachtung hat sich nun ergeben, daß der anfänglich ganz unbekannte Normaldruck  $N_2$  auf das Flächenelement  $bc$  nur zwischen den beiden Werthen  $FG_1$  und  $FG_2$  gelegen sein, dazwischen aber

jeden beliebigen Werth haben kann, so daß also für die Erdmasse unendlich viele verschiedene Gleichgewichtszustände möglich sind. Für irgend einen dieser möglichen Gleichgewichtszustände ist der spezifische Druck  $p$  nach verschiedenen Richtungen seiner Größe nach verschieden, und es giebt zwei zu einander senkrechte Richtungen, von denen die eine dem maximalen, die

Fig. 7.



andere dem minimalen Drucke entspricht. Von diesen unendlich vielen Zuständen interessieren hier nur die beiden Grenzzustände, für welche die spezifischen Drucke auf irgend ein Flächenelement mit  $p_1$  für den unteren, mit  $p_2$  für den oberen Grenzzustand bezeichnet werden sollen.

Der Uebersichtlichkeit wegen sind die Kreise für die beiden Gleichgewichtszustände in Fig. 7 besonders dargestellt. Man ersieht hieraus, daß  $AU_1$  und  $AV_1$  die Gleitflächen des unteren, sowie  $AU_2$  und  $AV_2$  diejenigen des oberen Grenzzustandes darstellen. Ferner hat man

$$p_{1\max} = OL_1 \text{ in der Richtung } AK_1 \text{ wirkend,}$$

$$p_{1\min} = OK_1 \text{ " " " } AL_1 \text{ "}$$

$$p_{2\max} = OL_2 \text{ " " " } AK_2 \text{ "}$$

$$p_{2\min} = OK_2 \text{ " " " } AL_2 \text{ "}$$

Aus der Figur ist auch ohne Weiteres zu erkennen, daß wegen der Gleichheit der Kreisbögen  $KU = KV$  die Richtung von  $p_{1\max}$  den Winkel der Gleitflächen für den unteren Grenzzustand halbiert, während für den oberen Grenzzustand  $p_{2\min}$  den Winkel der Gleitflächen in zwei gleiche Theile theilt. Für die Winkel der Gleitflächen zu einander hat man, da

$$UMK = VMK = 90^\circ - \varphi \text{ ist:}$$

$$U_1AV_1 = 90^\circ - \varphi \quad (1)$$

und

$$U_2AV_2 = 90^\circ + \varphi \quad (2)$$

Denkt man sich von dem unteren Grenzzustande aus den Druck  $n_2$  größer und größer werdend, so verändert die größte Druckkraft allmählig ihre Richtung aus  $AK_1$  in  $AK_2$ , während die zu  $p_{\max}$  senkrechte Kraft  $p_{\min}$  um den gleichen Winkel  $L_1AL_2$  gedreht wird.

Um die Größe der Druckkräfte  $p_{\max}$  und  $p_{\min}$  zu bestimmen, seien unter  $r_1$  und  $r_2$  die Halbmesser  $M_1U_1$  und  $M_2U_2$  gleich  $\frac{p_{\max} - p_{\min}}{2}$  und unter  $m_1$  und  $m_2$  die Abstände  $OM_1$  und  $OM_2$  gleich  $\frac{p_{\max} + p_{\min}}{2}$  verstanden, dann hat man:

$$\sin \varphi = \frac{UM}{OM} = \frac{r_1}{m_1} = \frac{r_2}{m_2} = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_{\max} + p_{\min}} \quad (3)$$

Hieraus folgt für beide Grenzzustände:

$$p_{\max} (1 - \sin \varphi) = p_{\min} (1 + \sin \varphi) \quad (4)$$

also:

$$\begin{aligned} \frac{p_{1\min}}{p_{1\max}} = \frac{p_{2\min}}{p_{2\max}} &= \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{1 - \cos(90^\circ - \varphi)}{1 + \cos(90^\circ - \varphi)} \\ &= \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} \quad (5) \end{aligned}$$

Ferner hat man, unter  $\beta_1$  und  $\beta_2$  die Centriwinkel  $OM_1A$  und  $OM_2A$ , und unter  $\omega$  wieder den Neigungswinkel  $HO O'$  der Oberfläche gegen den Horizont, also auch den Winkel  $AOM$  verstanden, aus den Dreiecken  $AOM_1$  und  $AOM_2$ :

$$\frac{AM_1}{OM_1} = \frac{r_1}{m_1} = \frac{\sin \omega}{\sin(\beta_1 + \omega)} = \sin \varphi \text{ (nach 3)} \quad (6)$$

und

$$\frac{AM_2}{OM_2} = \frac{r_2}{m_2} = \frac{\sin \omega}{\sin(\beta_2 + \omega)} = \sin \varphi \quad (7)$$

Hieraus folgt auch  $\sin(\beta_1 + \omega) = \sin(\beta_2 + \omega)$ , d. h.:

$$\beta_1 + \beta_2 = 180^\circ - 2\omega \quad (8)$$

Man kann daher allgemein schreiben:

$$\sin(\beta + \omega) = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi} \quad (9)$$

und hieraus folgt durch einige goniometrische Umformungen:

$$\sin \beta = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi} (\cos \omega \pm \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varphi})^* \quad (10)$$

\*) Man erhält diesen Ausdruck durch

$$\sin(\beta + \omega) = \sin \beta \cos \omega + \cos \beta \sin \omega = \sin \beta \cos \omega + \sqrt{1 - \sin^2 \beta} \sin \omega = \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}$$



worin das obere Zeichen dem Winkel  $\beta_1$ , das untere dem Winkel  $\beta_2$  zukommt.

Nun hat man ferner, wenn man für  $AO$  den Werth  $\gamma y$  setzt:

$$AM = r = AO \frac{\sin \omega}{\sin \beta} = \gamma y \frac{\sin \omega}{\sin \beta} \quad (11)$$

und

$$OM = m = AO \frac{\sin(\omega + \beta)}{\sin \beta} = \gamma y \frac{\sin(\omega + \beta)}{\sin \beta} \quad (12)$$

Setzt man hierin aus (9) und (10) die Werthe für  $\sin(\omega + \beta)$  und  $\sin \beta$  ein, so erhält man:

$$AM_1 = r_1 = \gamma y \frac{\sin \varrho}{\cos \omega + \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} \quad (13)$$

$$AM_2 = r_2 = \gamma y \frac{\sin \varrho}{\cos \omega - \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} \quad (14)$$

$$OM_1 = m_1 = \gamma y \frac{1}{\cos \omega + \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} \quad (15)$$

$$OM_2 = m_2 = \gamma y \frac{1}{\cos \omega - \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} \quad (16)$$

Daraus folgt endlich:

$$OK_1 = m_1 - r_1 = \gamma y \frac{1 - \sin \varrho}{\cos \omega + \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} = p_{1 \min} \quad (17)$$

$$OL_1 = m_1 + r_1 = \gamma y \frac{1 + \sin \varrho}{\cos \omega + \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} = p_{1 \max} \quad (18)$$

$$OK_2 = m_2 - r_2 = \gamma y \frac{1 - \sin \varrho}{\cos \omega - \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} = p_{2 \min} \quad (19)$$

$$OL_2 = m_2 + r_2 = \gamma y \frac{1 + \sin \varrho}{\cos \omega - \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} = p_{2 \max} \quad (20)$$

oder:

$$1 - \sin^2 \beta = \left( \frac{1}{\sin \varrho} - \sin \beta \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \right)^2,$$

welche Gleichung nach  $\sin \beta$  geordnet:

$$\sin^2 \beta \left( 1 + \frac{\cos^2 \omega}{\sin^2 \varrho} \right) - 2 \frac{\cos \omega}{\sin \omega \sin \varrho} \sin \beta = 1 - \frac{1}{\sin^2 \varrho} = -\frac{\cos^2 \varrho}{\sin^2 \varrho}$$

gibt. Hieraus folgt:

$$\sin \beta = \frac{\sin \omega}{\sin \varrho} (\cos \omega \pm \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$p_{1 \min} p_{2 \max} = p_{1 \max} p_{2 \min} = (\gamma y)^2 \quad (21)$$

Für den Druck  $p$  in den Gleitflächen hat man nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises:

$$OU^2 = OK \cdot OL,$$

also:

$$p = \sqrt{p_{\min} \cdot p_{\max}} = \gamma y \frac{\cos \varrho}{\cos \omega \pm \sqrt{\cos^2 \omega - \cos^2 \varrho}} \quad (22)$$

Es kann bemerkt werden, daß diese Gleichungen unmögliche Werthe ergeben würden, wenn man den Neigungswinkel  $\omega$  der Masse gegen den Horizont größer als den natürlichen Böschungswinkel  $\varrho$  voraussetzen wollte.

Die gefundene Gleichung (5)

$$\frac{p_{\min}}{p_{\max}} = \tan^2 \frac{90^\circ - \varrho}{2}$$

lehrt, daß das Verhältniß der größten und kleinsten Druckspannung nicht von der Tiefe  $y$  des betrachteten Punktes unter der Oberfläche, auch nicht von deren Neigung  $\omega$ , sondern lediglich von dem Reibungswinkel  $\varrho$  abhängt, daß also dieses Verhältniß in allen Punkten einer homogenen unbegrenzten Erdmasse denselben constanten Werth hat. Andererseits erkennt man aus den Gleichungen (17) bis (20), daß die absoluten Größen von  $p_{\max}$  und  $p_{\min}$  für alle Punkte von gleicher Tiefe  $y$ , d. h. für alle Punkte einer mit der Oberfläche parallelen Ebene gleich groß sein müssen. Man ersieht auch aus (22), daß diese Gleichheit nicht nur für die Hauptdrucke  $p_{\max}$  und  $p_{\min}$  gilt, sondern es sind auch die Druckkräfte  $p$  auf alle mit einander parallel gelegten Ebenen in den Punkten gleicher Tiefe ( $y$ ) von einer und derselben Größe.

Wenn man die in einem beliebigen Punkte  $A$  der Erdmasse nach allen möglichen Richtungen stattfindenden speciifischen Druckkräfte ihrer Richtung und Größe nach durch eine von dem Punkte  $A$  ausgehende Strecke darstellt, so liegen, wie Winkler\*) gezeigt hat, die Endpunkte dieser Strecken in einem Ellipsoid, dessen Axen durch die Hauptdruckkräfte  $p_{\max}$  und  $p_{\min}$  dargestellt sind, wie man sich in folgender Art überzeugen kann.

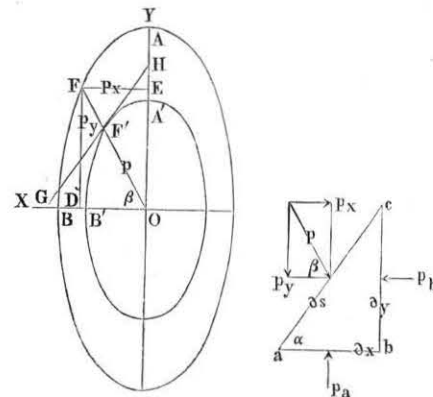
Es seien die Coordinatenaxen  $OY$  und  $OX$ , Fig. 8 (a. f. S.), parallel mit den Richtungen  $AK_1$  und  $AL_1$  in Fig. 7 von  $p_{\max}$  und  $p_{\min}$  angenommen, und es bedeute  $abc$  ein unendlich kleines dreieckiges Prisma, dessen Flächen  $ab = \delta x$  und  $bc = \delta y$  parallel mit den Coordinatenebenen  $ZOX$  und  $ZOY$  sind; die  $Z$ -Axe werde wieder in  $O$  senkrecht zur Zeichnung angenommen. Die dritte Fläche  $ac = \delta s$  bilde mit der  $X$ -Axe den Winkel  $\alpha$ , und auf diese Fläche

\*) Dr. G. Winkler, Neue Theorie des Erddruckes. Wien 1872.

Weisbach-Serrmann, Lehrbuch der Mechanik. II. 1.

wirke der spezifische Druck  $p$  in einer Richtung, welche mit der  $X$ -Axe den Winkel  $\beta$  bilden möge. Man hat dann, unter  $p_a$  und  $p_b$  den größten resp.

Fig. 8.



kleinsten spezifischen Druck auf die Flächen  $ab$  und  $bc$ , und unter  $p_x$  und  $p_y$  die den Axen parallelen Componenten des Druckes  $p$  auf die Fläche  $ac$  verstanden, für das Gleichgewicht:

$$p_a \partial x = p_y \partial s,$$

$$p_b \partial y = p_x \partial s;$$

hieraus folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \cos \alpha = \frac{p_y}{p_a},$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \sin \alpha = \frac{p_x}{p_b},$$

und also:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 = \frac{p_y^2}{p_a^2} + \frac{p_x^2}{p_b^2}.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ellipse, deren Axen  $OA = p_a$  und  $OB = p_b$  sind.

Macht man daher für eine unter dem Winkel  $\alpha = cab$  gegen die  $X$ -Axe geneigte Ebene  $ca$  die Coordinaten

$$FD = p_y = p_a \cos \alpha = OA \cos \alpha$$

und

$$FE = p_x = p_b \sin \alpha = OB \sin \alpha,$$

so erhält man in

$$OF = \sqrt{p_a^2 \cos^2 \alpha + p_b^2 \sin^2 \alpha} = p$$

der Größe und Richtung nach den spezifischen Druck auf die Fläche  $ac$ .

Winkler nennt diese Ellipse die Druckellipse, zum Unterschiede von einer anderen, der sogenannten Stellungsellipse, welche man erhält, wenn man bei denselben Agerichtungen die Größe der Halbagen

$$OA' = \sqrt{OA} = \sqrt{p_a} \quad \text{und} \quad OB' = \sqrt{OB} = \sqrt{p_b}$$

annimmt. Es ist nämlich leicht zu erweisen, daß diese Ellipse in ihrer Tangente  $GH$  an den Durchschnittpunkt  $F'$  mit irgend einer Druckrichtung  $OF$  die Richtung derjenigen Fläche angiebt, welche von dem Drucke  $OF$  afficirt wird. Die Gleichung dieser Ellipse ist nämlich unter der gemachten Voraussetzung in Betreff der Größe der Halbagen:

$$\frac{y^2}{p_a} + \frac{x^2}{p_b} = 1,$$

und man erhält daher durch Differentiation:

$$\frac{y \partial y}{p_a} + \frac{x \partial x}{p_b} = 0,$$

oder:

$$\frac{p_a}{p_b} \frac{x}{y} = - \frac{\partial y}{\partial x} = \tan HGO \dots \dots \dots (23)$$

oder, da  $\frac{x}{y} = \cotg \beta$  ist, hat man:

$$\tan HGO = \frac{p_a}{p_b} \cotg \beta.$$

Nun hat man aber auch:

$$p_y = p \sin \beta = p_a \cos \alpha,$$

$$p_x = p \cos \beta = p_b \sin \alpha;$$

daher ist auch:

$$\tan \alpha = \frac{p_a}{p_b} \cotg \beta \dots \dots \dots (24)$$

Aus dieser Gleichung und (23) folgt daher  $HGO = \alpha$ , d. h. die Richtung einer beliebigen Fläche  $ac$  oder  $GH$  und die für dieselbe geltende Druckrichtung  $OF$  sind zwei conjugirte Durchmesser der Stellungsellipse. Die Tangente  $GH$  der Stellungsellipse in  $F'$  giebt sonach die Richtung der Ebene an, für welche der Druck durch  $OF$  der Größe und Richtung nach dargestellt ist.

Wenn die Oberfläche der Erdmasse horizontal, also  $\omega = 0$  ist, so fallen die beiden Punkte  $A$  und  $B$  in Fig. 6 zusammen, und man erhält aus den Gleichungen (17) bis (20):

$$p_{1\max} = p_{2\min} = \gamma y;$$

$$p_{1\min} = \gamma y \frac{1 - \sin \varrho}{1 + \sin \varrho} = \gamma y \tan^2 \frac{90^\circ - \varrho}{2}$$

und

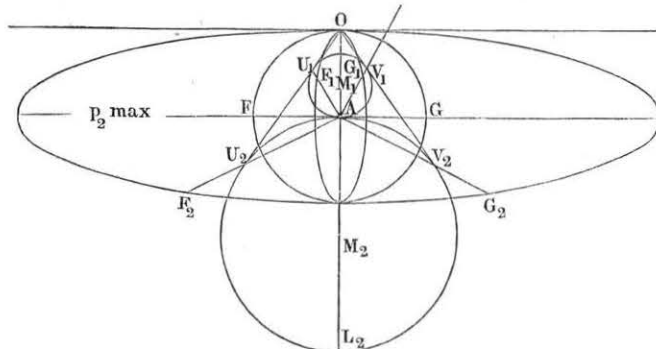
$$p_{2\max} = \gamma y \frac{1 + \sin \varrho}{1 - \sin \varrho} = \gamma y \tan^2 \frac{90^\circ + \varrho}{2}.$$

In Fig. 9 (a. f. S.) sind die den beiden Grenzzuständen entsprechenden Druckellipsen  $OF_1G_1$  und  $OF_2G_2$  dargestellt. Die Gleitflächen sind für den unteren

Grenzzustand durch  $AF_1$  und  $AG_1$  gegeben, welche Flächen von der Verticalen  $AO$  nach jeder Seite um den Winkel  $\frac{90^\circ - \varrho}{2}$  abweichen, und die auf diese Gleitflächen wirkende spezifische Druckspannung beträgt nach (22):

$$OU_1 = AF_1 = AG_1 = p_{f_1} = \gamma y \tan \frac{90^\circ - \varrho}{2},$$

Fig. 9.



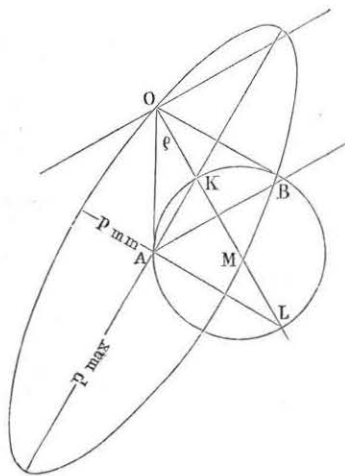
während der Druck auf die Gleitflächen  $AF_2$  und  $AG_2$  für den oberen Grenzzustand durch

$$OU_2 = AF_2 = AG_2 = p_{f_2} = \gamma y \tan \frac{90^\circ + \varrho}{2}$$

ausgedrückt ist.

Wenn man, wie vorstehend erwähnt, durch Vergrößerung des Normaldruckes

Fig. 10.



$n_2$  auf eine zur  $Z$ -Axe parallele vertikale Ebene den unteren Grenzzustand in den oberen überführt, so wird der Kreis  $U_1 V_1$  kleiner und kleiner, bis er in einem gewissen Augenblicke, wenn  $n_2 = \gamma y$  geworden ist, in den Punkt  $A$  zusammenschrumpft. Die Druckellipse hat während dieser Zeit unter Beibehaltung ihrer großen Axe  $2AO = 2\gamma y$  ihre kleine Axe mehr und mehr vergrößert und ist in dem erwähnten Augenblicke in den Kreis  $F'G$  übergegangen. Der Zustand der Erdmasse entspricht in diesem Augenblicke demjenigen einer vollkommenen Flüssigkeit ohne Reibungswiderstände und ohne Schubspannungen; der spezifische Druck ist auf jede irgendwie gelegene Ebene senkrecht gerichtet und gleich  $\gamma y$ . Bei

noch weiterer Vergrößerung des Druckes  $n_2$  wächst der horizontale Druck unter steter Beibehaltung der konstanten Größe  $\gamma y$  für den verticalen Druck, welcher nunmehr als  $p_{2min}$  auftritt.

Setzt man eine Neigung der Erdoberfläche unter der natürlichen Böschung voraus, so fällt bei der Ausführung der Construction in Fig. 6 die Tangente  $OU$  mit der Verticalen  $OA$  zusammen, und man erhält in diesem Falle nur einen einzigen Berührungskreis, Fig. 10; es giebt daher hier auch nur einen Grenzzustand. Die beiden Gleitflächen  $AO$  und  $AB$  sind vertical und parallel zur Oberfläche gerichtet, und der Druck auf dieselben ist:

$$p_f = AO = BO = \gamma y.$$

Ferner ergibt sich aus (17) und (19):

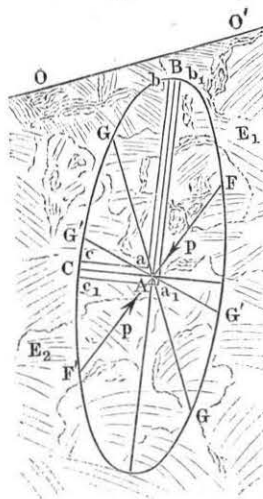
$$p_{min} = OK = \gamma y \frac{1 - \sin \varrho}{\cos \varrho} = \gamma y \tan \frac{90^\circ - \varrho}{2}$$

und aus (18) und (20):

$$p_{max} = OL = \gamma y \frac{1 + \sin \varrho}{\cos \varrho} = \gamma y \tan \frac{90^\circ + \varrho}{2}.$$

**Druck der Erde gegen Stützmauern.** Um nunmehr der vorstehenden Theorie gemäß den Erddruck gegen stützende Wände oder Futtermauern zu ermitteln, kann man folgende Betrachtung anstellen. Es sei  $CBF$ , Fig. 11, die Druckellipse für irgend einen Punkt  $A$  einer Erdmasse, deren Oberfläche  $OO'$  sei, so daß also für den vorauszusetzenden unteren Grenzzustand  $BA$  der Größe und Richtung nach den Druck  $p_{max}$  und  $CA$  den Druck  $p_{min}$  darstellt. Denkt man sich in den Richtungen  $BA$  und  $CA$

Fig. 11.



durch je zwei unendlich nahe liegende Ebenen, wie  $ba, ca$ , zwei röhrenförmige oder prismatische Räume begrenzt, so wirkt innerhalb derselben auf die Begrenzungsflächen  $ba, ca$  dieser Räume der Druck überall normal, also etwa so, als ob diese Räume mit Flüssigkeiten von bestimmter Dichte gefüllt sein würden. Während indessen bei einer Flüssigkeit der Druck nach allen Richtungen von gleicher Größe ist, so verursacht bei der Erdmasse die zwischen den Theilchen auftretende Reibung, daß in der Richtung  $CA$  schon der kleinere Druck  $p_{min}$  ausreicht, um zusammen mit der Reibung dem eine Bewegung anstrebenden Drucke  $p_{max}$  das Gleichgewicht zu halten. Man hat sich daher vorzustellen, daß die Druckkraft  $p_{max}$  als eine active,

b. h. Bewegung anstrebende Kraft auftritt, während der Druck  $p_{min}$  einen passiven Widerstand vorstellt, welcher die Bewegung so lange verhindert, als er noch nicht unter den dem Grenzzustande entsprechenden Werth herabgesunken ist. Denkt man sich nun durch den Punkt  $A$  irgend welche Ebene  $AG$  gelegt, welche die ganze Erdmasse in zwei Theile  $E_1$  und  $E_2$  zerlegt, so ist zunächst deutlich, daß, wenn  $FA$  nach dem Vorhergehenden den Druck  $p$  auf diese Fläche der Richtung und Stärke nach darstellt, also die Erdmasse  $E_1$  auf die Ebene  $AG$  mit einer Kraft  $FA = +p$  drückend wirkt, die Erdmasse  $E_2$  mit einer gleich großen entgegengesetzten Reaction  $F'A = -p$  auf  $E_1$  zurückwirkt. Man kann daher auch den Druck  $-p$  der unteren Erdmasse  $E_2$  als den passiven, durch die Wirkung der oberen Erdmasse  $E_1$  hervorgerufenen Widerstand ansehen, und es ist klar, daß bei einer beliebigen Lage der betrachteten Trennungsebene  $AG$  diejenige Erdmasse in dem gedachten Sinne als activ angesehen werden muß, welche die gegen den Punkt  $A$  gerichtete Druckkraft  $p_{max}$  in sich enthält. Stellt man sich nun vor, die gedachte Trennungsebene werde durch eine feste Wandfläche ersetzt, so kann man die Erdmasse  $E_2$  beseitigen, indem die feste Wand ebenso gut eine Reaction  $-p = F'A$  gegen die von oben drückende Erdmasse auszuüben vermag, wie zuvor die Erdmasse  $E_2$ . Wollte man dagegen die Erdmasse  $E_1$  beseitigen, so würden die Verhältnisse wesentlich andere sein, als sie in der unbegrenzten Erdmasse stattfinden, denn die feste Stützmauer, welche wohl im Stande ist, einem auf sie von  $E_1$  ausgeübten activen Drucke  $p$  eine gleiche Reaction  $-p$  entgegenzusetzen, vermag offenbar nicht, den besagten Druck  $p$  der Erdmasse  $E_1$  auf diejenige  $E_2$  auszuüben, welcher Druck lediglich den Schwerkraften der nunmehr beseitigten Erdmasse  $E_1$  seine Entstehung verdankt. Es wird dieses Verhältniß deutlich werden, wenn man z. B. die Trennungsebene  $AG$  etwa in  $AG'$  unter einem Winkel gegen den Horizont gelegt denkt, welcher kleiner als der natürliche Böschungswinkel ist. In der unbegrenzten Erdmasse wird auf diese Fläche ein bestimmter Druck  $p'$  von  $E_1$  auf  $E_2$  ausgeübt werden, wogegen nach Beseitigung von  $E_1$  die verbleibende Erdmasse  $E_2$  einer stützenden Wand in  $AG'$  offenbar nicht bedarf, sobald die Begrenzung  $AG'$  nicht steiler ist, als die natürliche Böschung.

Aus solchen Betrachtungen folgert daher Mohr, daß die vorstehende Theorie des Erddruckes in unbegrenzten Erdkörpern auf die Bestimmung des Wanddruckes gegen Stützmauern angewandt werden darf, so lange die Gerade, welche nach jener Theorie die Richtung der Maximalpressung gegen den Fußpunkt der Wandfläche angiebt, **innerhalb** des gestützten Erdkörpers liegt.

Hiernach wird, wie aus der Betrachtung der Figuren 9 und 10 leicht ersichtlich ist, diese Theorie für verticale Stützflächen  $AG$ , Fig. 12, gültig

sein, so lange die Oberfläche  $GO$  des Terrains zwischen der Horizontalen  $GH$  und der aufsteigenden Ebene der natürlichen Böschung  $GO_1$  gelegen ist, und wenn die Stützfläche  $AG$ , wie in Fig. 13, eine gewisse Neigung nach vorn (der Erdmasse abgewendet) hat, so ist die Theorie auch noch gültig bis zu einer gewissen abwärts gerichteten Neigung  $GO_2$  der Erdmasse. Nur wenn die Stützfläche nach Fig. 14 eine der Erdmasse zugekehrte Neigung hat, ist die Zulässigkeit der Erddrucktheorie eine für die Lagen der Terrainsfläche zwischen  $GO_1$  und  $GO_2$  beschränkte. Die Größe

Fig. 12.

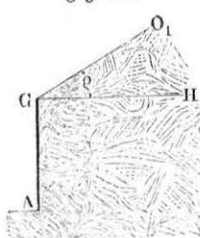


Fig. 13.

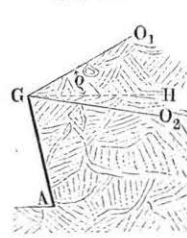
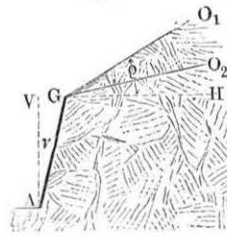


Fig. 14.



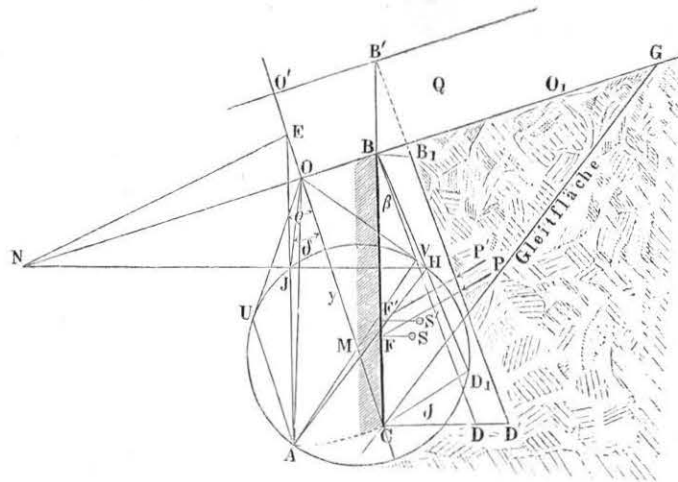
des Winkels  $O_1GO_2$  für diesen Geltungsbereich hängt natürlich von der Neigung  $\nu$  der Wand  $AG$  gegen die Verticale  $AV$  ab, und man ersieht aus der Figur 10, daß bei einer Zurückneigung der Wand um den Winkel  $\nu = VAG = \frac{90^\circ - \varrho}{2}$  eine Anwendbarkeit der vorstehenden Erddruck-

theorie nur noch zulässig sein wird, wenn das Terrain unter der natürlichen Böschung  $GO_1$  ansteigt (Fig. 14). Für die gewöhnlich in der Praxis vorkommenden Fälle, welche meistens den Figuren 12 und 13 entsprechen, kann daher die vorstehende Theorie des Erddruckes zu Grunde gelegt werden, in den Ausnahmefällen der Fig. 14 dagegen wird man sich der seitherigen Theorie des Prismas vom größten Drucke zur Ermittlung des Wanddruckes bedienen müssen, worüber im folgenden Paragraphen das Nähere enthalten ist.

Unter Zugrundelegung der vorstehend entwickelten Theorie des Erddruckes bestimmt sich nun die auf eine Futtermauer ausgeübte Druckkraft auf graphischem Wege in sehr einfacher Art, bei deren Darstellung hier ebenfalls im Wesentlichen die von Mohr angegebenen Constructionen zu Grunde gelegt sind. Es sei  $BC$ , Fig. 15 (a. f. S.), die dem Drucke der Erde ausgesetzte Fläche einer Futtermauer, und es sei  $OC = y$  der normale Abstand der untersten Kante  $C$  von der ebenen Terrainsfläche  $OO_1$  der Erdmasse. Wählt man nun für die graphische Ermittlung das Gewicht  $\gamma$  der Cubikeinheit Erdmasse als Einheit für den Kräftemaßstab (§. Thl. I, Anhang), so stellt offenbar die durch  $O$  vertical gezogene Strecke  $OA = OC$



die Pressung  $\gamma\gamma$  vor. Trägt man nun noch den Reibungswinkel  $\rho = COU$  an  $CO$  an, und beschreibt den Kreis, welcher durch  $A$  hindurchgeht.



geht,  $OU$  berührt und seinen Mittelpunkt  $M$  auf der zur Terrainsfläche senkrechten Geraden  $OC$  hat, so entspricht dieser Kreis dem unteren Grenzzustande des Gleichgewichtes. Zieht man daher durch  $A$  eine zur Wandfläche  $CB$  Parallele  $AE$ , so gelangt man durch den Schnittpunkt  $J$  dieser letzteren mit dem Kreise zu der Strecke  $OJ$ , welche die Pressung  $p$  pro Flächeneinheit der Wandfläche in  $C$  angiebt, während der Winkel  $MOJ = \delta$  die Abweichung der Druckrichtung von der Normalen  $CD$  zur Wandfläche in  $C$  angiebt. Macht man daher  $DCD_1 = MOJ$  und  $CD_1 = OJ$ , so stellt  $CD_1$  der Richtung und Größe nach die Pressung der Wandfläche in  $C$ , d. h. den Druck pro Flächeneinheit vor. Da die Pressung auf alle übrigen Punkte der ebenen Wandfläche  $CB$  dieselbe Richtung hat, so gilt dies natürlich auch von der Mittelkraft  $P$  der Druckkräfte auf alle Wandelemente. Auch ist leicht ersichtlich, daß der Angriffspunkt  $F'$  dieser Mittelkraft  $P$  von der unteren Mauerkante  $C$  einen Abstand  $FC = \frac{1}{3} BC$  haben muß. Da nämlich nach dem vorigen Paragraphen die Pressungen der einzelnen Punkte der Wandfläche proportional mit den Abständen derselben von der Oberfläche, also auch von dem Punkte  $B$  sind, so erkennt man, daß das rechtwinkelige Dreieck  $BCD$ , in welchem  $CD = CD_1 = p$  ist, die Größe und Vertheilung des Druckes auf die Wandfläche darstellt. Zieht man daher von dem Schwerpunkte  $S$  dieses Dreiecks die Normale  $SF$

zur Wandfläche, so erhält man in  $F$  den Angriffspunkt für die mit  $CD_1$  parallele Mittelkraft  $P$  aller Einzelpressungen, welche Mittelkraft selbstredend auch durch den Schwerpunkt des Dreiecks  $BCD_1$  hindurchgeht.

Anstatt die Richtung des Erddruckes durch Antragen des Winkels  $\delta$  an  $CD$  zu erhalten, könnte man auch diese Richtung direct finden, indem man den Durchmesser  $AH$  zieht, durch  $H$  und  $J$  eine Gerade legt und deren Durchschnitt  $N$  mit der Oberfläche  $OO_1$  mit dem Durchschnitte  $E$  zwischen  $AJ$  und  $OM$  verbindet. Man erhält dann nach dem Vorhergehenden in  $EN$  die Richtung des Erddruckes auf die Wandfläche  $BC$ .

Die hier angegebene Construction behält noch ihre Gültigkeit, wenn die Oberfläche  $OO_1$  der Erdmasse durch eine besondere Belastung  $Q$  gleichmäßig beschwert ist. In diesem Falle denke man sich diese Belastung  $Q$  durch das Gewicht einer ebenso schweren Erdmasse von der Höhe  $BB'$  dargestellt, deren durch  $B'$  gehende Begrenzung wegen der gleichmäßig vorausgesetzten Vertheilung der Last parallel zu  $OO_1$  anzunehmen ist. Hierdurch wird in dem Gleichgewichtszustande der Erdmasse nichts weiter geändert, als daß für jeden Punkt der Wandfläche der in dem Vorhergehenden mit  $\gamma$  bezeichnete normale Abstand von der Erdoberfläche um die Größe  $OO'$  vergrößert wird. Daher wird auch für jeden Punkt die mit diesem Abstände  $\gamma$  proportionale Pressung um einen constanten von  $OO'$  abhängigen Werth vergrößert werden, welcher in  $BB_1 = DD'$  gefunden wird, wenn man durch  $B'$  die Gerade  $B'D'$  parallel zu  $BD$  zieht. Die Größe des nunmehr auf die ganze Mauer wirkenden Druckes, dessen Richtung durch die Belastung nicht geändert wird, ist jetzt durch das Trapez  $CBB_1D'$  dargestellt, dessen Schwerpunkt  $S'$  durch die zur Wandfläche Normale  $S'F'$  in  $F'$  den Angriffspunkt des Erddruckes  $P'$  liefert. Die Figur läßt unmittelbar erkennen, daß durch die Belastung der Oberfläche nicht nur der Wanddruck im Verhältniß der Flächenräume  $CBD$  und  $CBB_1D'$ , sondern auch der Hebelarm im Verhältniß  $FC$  zu  $F'C$  vergrößert wird.

Um den Abstand  $CF' = a$  des Fußes  $C$  von dem Angriffspunkte  $F'$  des Erddruckes  $P'$  der belasteten Erde zu finden, setze man  $CB = l$  und  $BB' = l'$ , sowie

$$\frac{CD}{CB} = \tan \beta,$$

dann hat man für den Fußpunkt  $C$  die Momentengleichung:

$$\frac{l^2}{2} \tan \beta \cdot \frac{1}{3} + l l' \tan \beta \cdot \frac{1}{2} = \left( \frac{l^2}{2} + l l' \right) \tan \beta \cdot a,$$

woraus

$$a = \frac{l^2 + 3 l l'}{3 l + 6 l'} = \frac{l}{3} \frac{l + 3 l'}{l + 2 l'}$$

folgt, also zwischen  $\frac{l}{3}$  für  $l' = 0$  und  $\frac{l}{2}$  für  $l' = \infty$  liegend.

Verbindet man in der Figur den Punkt  $A$  mit dem Berührungspunkte  $U$  und  $V$  der Tangenten an den Kreis, so erhält man die Ebenen, in welchen der Erddruck den Reibungswinkel  $\varphi$  mit der Normalen zur Fläche bildet. Man erhält daher im vorliegenden Falle in  $AV$  die Richtung der Gleitfläche  $CG$ , d. h. derjenigen Ebene, in welcher bei einem Ausweichen der Mauer voraussichtlich ein Erdprisma  $BCG$  von der übrigen Erdmasse abgleiten wird. Dieser Gleitfläche kann man sich zur Ermittlung des Wanddruckes bedienen in dem Falle, in welchem die Oberfläche der Erdmasse, Fig. 16, nicht durch eine Ebene gebildet wird. Ist hier z. B. die Erdmasse oben durch  $BDEF$  begrenzt, und kann man die Lage  $CF$  der Gleitfläche bestimmen, so findet man den Wanddruck genau wie in Fig. 15 angegeben, sobald man jetzt für die wirkliche Erdoberfläche  $BDEF$  eine ideale ebene Begrenzung nach  $BG$  von solcher Neigung annimmt, daß die beiden Flächenräume  $CBG$  und  $CBDEF$  gleich groß sind, weil von dem Gewichte des abrutschenden Prismas allein der Wanddruck abhängt. Zu dieser Bestimmung muß allerdings die Lage der Gleitfläche  $CF$  zuvörderst bekannt sein, welche nach dem Obigen wiederum von der Neigung der Linie  $BG$  abhängt, doch wird man leicht diese Lage mit genügender Schärfe ermitteln können, wenn man sie zuerst schätzungsweise annimmt, dann die Neigung  $BG$  ermittelt, und dann für diese Neigung nach Fig. 15 die wahre Gleitfläche bestimmt, um, wenn nöthig, eine entsprechende Correction vornehmen zu können.

Fig. 16.

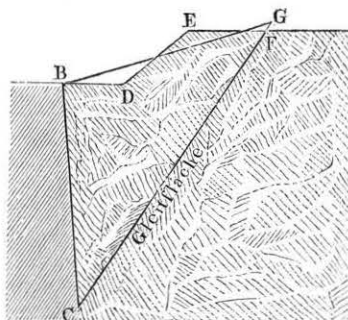
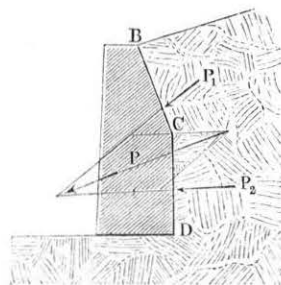


Fig. 17.



Wenn andererseits die Wandfläche nicht durch eine einzige Ebene begrenzt ist, sondern etwa nach Fig. 17 mehrere Parthien  $BC$ ,  $CD$  von verschiedener Neigung enthält, so ergibt sich von selbst, daß man den gesammten Erddruck auf die Wandfläche nach bekannten Regeln als die Mittellost  $P$  aus den auf die einzelnen Wandtheile wirkenden Drücken  $P_1$  und  $P_2$  zu ermitteln hat.

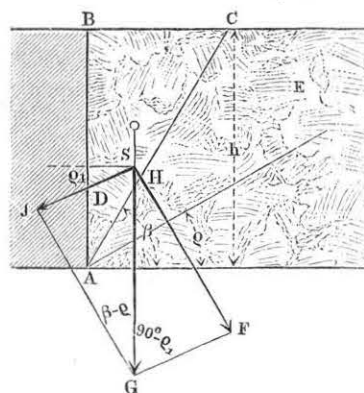
Wenn man in der vorgedachten Art den Erddruck auf eine Wandfläche bestimmt, so findet man, daß derselbe, je nach der Lage der Wandfläche, um den mehr oder minder großen Winkel  $\delta$  von der Normalen zur Wandfläche abweicht. Der Druck wirkt nur dann zur Wandfläche normal, wenn diese die Richtung von  $p_{max}$  in sich aufnimmt, wie dies z. B. nach Fig. 9 bei verticaler Wand und horizontaler Oberfläche der Fall ist. Andererseits erreicht der Abweichungswinkel  $\delta$  einen um so größeren Werth, je mehr sich die Wandfläche einer Gleitfläche nähert, und beim Zusammenfallen beider wird  $\delta = \varphi$ , wie dies nach Fig. 10 eintritt, wenn eine verticale Wandfläche eine Erdmasse mit natürlich geböschter Oberfläche stützt. Im Allgemeinen ist daher der Neigungswinkel des Erddruckes gegen die Normale zur Stützfläche kleiner als der Reibungswinkel  $\varphi$ . Diesem Umstande zufolge hat man wohl Einwände gegen die Anwendbarkeit der allgemeinen Theorie des Erddruckes zur Bestimmung des Wanddruckes erhoben, welche darauf begründet sind, daß für den Fall des Ausweichens der Futtermauer an derselben ein Herabgleiten der Erdmasse stattfindet, demzufolge man annehmen muß, daß der Druck zwischen dieser Erdmasse und der Wandfläche von der Normalen der letzteren um den Reibungswinkel  $\varphi_1$  zwischen beiden, oder da derselbe meistens gleich dem der Erdmasse gesetzt werden darf, um den Winkel  $\varphi$  abweicht. Demgemäß hat man wohl die Zulässigkeit der Erddrucktheorie nur auf diejenigen höchst seltenen Ausnahmefälle beschränken zu müssen geglaubt, in denen die Wandfläche mit einer Gleitfläche zusammenfällt. Diese Einwände hat schon Mohr durch die Bemerkung widerlegt, daß der gedachte Zustand des Ausweichens der Mauer nicht der bei Stabilitätsuntersuchungen allein in Frage kommende Gleichgewichtszustand der Ruhe, sondern vielmehr ein Zustand der Bewegung ist, und wenn für den letzteren durch die Bewegung selbst jene Richtung der zwischen der Wand und Erdmasse wirkenden Kraft auch bedingt wird, so kann daraus doch nicht geschlossen werden, daß schon vor der Bewegung diese Reibungswiderstände vorhanden waren. Auch aus den Resultaten der über den Erddruck angestellten Versuche läßt sich, insofern hierbei immer der Druck der Erdmasse bei beginnender Bewegung gemessen wird, in dieser Beziehung kein Beweis für die Richtigkeit des gedachten Einwandes herleiten. Man darf daher die hier angeführte Methode der Bestimmung des Erddruckes nach der allgemeinen Theorie desselben in allen den Fällen, für welche nach dem Obigen ihre Anwendbarkeit gezeigt wurde, als zuverlässig und sicher betrachten. Um indessen auch die bisher meist angewendete Bestimmungsart mittelst der Theorie vom Prisma des größten Druckes kennen zu lernen, soll diese Methode in den nächsten Paragraphen noch behandelt werden. Dies erscheint schon mit Rücksicht auf diejenigen Fälle erforderlich, für welche nach dem vorstehend Bemerkten die Anwendbarkeit der Erddrucktheorie nicht zu-



lässig ist, und für welche man den Wanddruck nach der Theorie von dem Prisma des größten Erddruckes wird bestimmen müssen.

§. 6. Das Prisma des grössten Erddruckes. Es sei in Fig. 18 eine Erdmasse  $E$  durch eine verticale Futtermauer  $AB$  gestützt und vorausgesetzt, daß

Fig. 18.



die letztere dem Erddrucke nicht genügenden Widerstand entgegensetzen kann, sondern nach der Seite ausweichen, so wird eine gewisse Erdmasse  $ABC$  herabgleiten. Ueber die Form dieser abgleitenden Masse ist nun etwas Bestimmtes nicht anzugeben, und man begnügt sich bei der folgenden Untersuchung damit, anzunehmen, daß die Erdmasse in einer ebenen Trennungsfäche  $AC$  abgleite. Zu dieser Annahme ist man veranlaßt, um die an sich schon sehr verwinkelten Rechnungen überhaupt durchführen zu können, obwohl, wie oben bereits erwähnt wurde, die

Wahrscheinlichkeit eine viel größere ist, daß die Trennung der Erdmasse in einer gekrümmten Fläche erfolgt.

Setzt man eine ebene Trennungsfäche in  $AC$  voraus, so wird also ein dreieckiges Prisma  $ABC$  auf der als feste Ebene zu denkenden Erdmasse  $E$  abrutschen und man kann dieses abgleitende Stück vom Gewichte  $G$  wie einen Keil ansehen, welcher einen gewissen Druck auf die Gleitfläche  $AC$  sowohl wie gegen die Wandfläche  $AB$  ausübt. Bei der gedachten Bewegung stellen sich Reibungswiderstände ebenfalls an beiden Flächen  $AC$  und  $AB$  ein, und man hat sich dann zu denken, daß die resultirende Druckkraft gegen jede dieser Flächen für den Zustand der beginnenden Bewegung um den entsprechenden Reibungswinkel von der Normalen zur Fläche abweicht. Für die Gleitfläche  $AC$  hat man den natürlichen Böschungswinkel  $\varrho$  der Erdmasse als Reibungswinkel anzunehmen, während der Winkel  $\varrho_1$  für die Wand  $AB$  dem Reibungskoeffizienten zwischen der Erde und der Mauerfläche entspricht. Dieser Winkel  $\varrho_1$  wird von verschiedenen Autoren verschieden angegeben. Während nach den Versuchen von Audé für die Reibung von Sand an einer hölzernen Bekleidungswand

$$\varphi_1 = \tan \varrho_1 = 0,6, \text{ also } \varrho_1 = 31^\circ$$

angenommen wird, ist nach Poncelet für grob behauenen Stein und verschiedene Erdarten  $\varphi_1$  zwischen 0,51 und 0,34 schwankend. Jedenfalls darf

$\varphi_1$  niemals größer als  $\varphi$  in Rechnung gestellt werden, denn wenn die Reibung zwischen der Erde und der Wandfläche größer ist, als diejenige zwischen Erde und Erde, so wird der letztere Widerstand überwunden, indem man sich zu denken hat, daß an der Mauerfläche eine unendlich dünne Erbschicht haften wird, an welcher das Erdprisma gleitet. Aus diesem Grunde wird von Rebhann und Scheffler der Reibungskoeffizient  $\varphi_1$  gleich demjenigen  $\varphi$  für die Erdmasse angenommen. Für den gedachten Grenzzustand, d. h. für ein beginnendes Abgleiten des Prismas  $ABC$  vom Gewichte  $G$  müssen die beiden Reactionen  $R$  der Gleitfläche  $AC$  und  $P$  der Wandfläche  $AB$  mit diesem Gewichte  $G$  im Gleichgewichte sein. Setzt man diese drei Kräfte, von denen also  $R$  und  $P$  um die Reibungswinkel  $\varrho$  und  $\varrho_1$  von den Normalen der Gleitflächen abweichen, zu dem Dreiecke  $SFG$  zusammen, in welchem nach der Figur

$$SGF = G SJ = 90^\circ - \varrho_1$$

und

$$FSG = \beta - \varrho$$

ist, so erhält man:

$$\frac{P}{G} = \frac{\sin(\beta - \varrho)}{\sin(90 - \varrho_1 + \beta - \varrho)} = \frac{\sin(\beta - \varrho)}{\cos[\beta - (\varrho + \varrho_1)]},$$

also den Druck gegen die Wand:

$$P = G \frac{\sin(\beta - \varrho)}{\cos[\beta - (\varrho + \varrho_1)]} = \frac{\gamma h^2}{2} \cotg \beta \frac{\sin(\beta - \varrho)}{\cos[\beta - (\varrho + \varrho_1)]}, \quad (1)$$

da man das Gewicht des Erdprismas

$$G = \gamma \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\gamma h^2}{2} \cotg \beta$$

zu setzen hat, unter  $\gamma$  wie früher das Gewicht einer Raumeinheit Erde verstanden, und eine Länge des Prismas senkrecht zur Bildebene gleich der Einheit vorausgesetzt.

Der in (1) gefundene Werth für den Wanddruck  $P$  ist mit dem Winkel  $\beta$  veränderlich, unter welchem die vorausgesetzte Gleitfläche gegen den Horizont geneigt ist. Jedes von den unzählig vielen Prismen  $ABC$ , welche man erhält, wenn man der Ebene  $AC$  alle möglichen Lagen ertheilt denkt, wird in dem Bestreben, abzugleiten, einen gewissen von  $\beta$  abhängigen Druck  $P$  auf die Wand ausüben, welchem Drucke die letztere widerstehen muß, wenn sie das gedachte Prisma an dem Abgleiten verhindern soll. Damit nun von allen diesen möglichen Prismen kein einziges abgleite, ist es nöthig, daß die Wandfläche einen Gegendruck —  $P$  gegen die Erdmasse ausübe, welcher gleich dem größten aller derjenigen Erddrucke ist, die von den verschiedenen Erdprismen auf die Wand ausgeübt werden. Dieses Prisma

nennt man das Prisma des größten Erddruckes, und daher läuft die Bestimmung des Erddruckes gegen die Wandfläche auf die Aufgabe hinaus, in jedem speciellen Falle denjenigen Winkel  $\beta$  für die Neigung der Gleitfläche zu ermitteln, für welchen der Druck  $P$  ein Maximum wird.

Diese Bestimmung führt, wenn sie analytisch vorgenommen wird, im Allgemeinen zu verwickelten und wenig übersichtlichen Formeln, so daß man in neuerer Zeit in der Praxis meistens den bequemeren Weg der graphischen Ermittlung einschlägt. Um indessen den Gang des analytischen Verfahrens zu zeigen, soll dasselbe zunächst für den der Fig. 18 zu Grunde gelegten Fall durchgeführt werden, d. h. für eine verticale Wandfläche und horizontale Erdbegrenzung.

Hierfür fand sich die Größe des Erddruckes gegen die Wand zu

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \cotg \beta \frac{\sin(\beta - \varrho)}{\cos[\beta - (\varrho + \varrho_1)]},$$

welcher Ausdruck umgeformt werden möge in:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma h^2 \cos \beta}{2} \frac{\sin \beta \cos \varrho - \cos \beta \sin \varrho}{\sin \beta \cos \beta \cos(\varrho + \varrho_1) + \sin \beta \sin(\varrho + \varrho_1)} \\ &= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin \varrho}{\sin(\varrho + \varrho_1)} \frac{\cotg \varrho - \cotg \beta}{\cotg(\varrho + \varrho_1) + \tan \beta} \dots (2) \end{aligned}$$

Setzt man, um  $P_{\max}$  zu finden, den Differentialquotienten nach  $\beta$  gleich Null, so erhält man:

$$\frac{\cotg(\varrho + \varrho_1) + \tan \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{\cotg \varrho - \cotg \beta}{\cos^2 \beta} \dots (3)$$

oder

$$\cotg(\varrho + \varrho_1) + \tan \beta = \tan^2 \beta \cotg \varrho - \tan \beta,$$

d. i.

$$\tan^2 \beta - 2 \tan \varrho \tan \beta = \tan \varrho \cotg(\varrho + \varrho_1).$$

Diese quadratische Gleichung liefert den Neigungswinkel  $\beta$  für die Gleitfläche des Prismas vom größten Drucke:

$$\tan \beta = \tan \varrho [1 + \sqrt{1 + \cotg \varrho \cotg(\varrho + \varrho_1)}] \dots (4)$$

und man erhält durch Einsetzen des so gefundenen Werthes von  $\beta$  in die Gleichung (1) für  $P$  den Erddruck, welchen die Wandfläche mindestens aushalten muß, wofür nach einigen Umformungen

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin \varrho}{\cos^2(\varrho + \varrho_1)} \left[ \sqrt{\frac{\cos \varrho_1}{\sin \varrho}} - \sqrt{\sin(\varrho + \varrho_1)} \right]^2 \dots (5)$$

folgt\*).

\*) Dieser Ausdruck ermittelt sich wie folgt: Man findet aus Gleichung (4) auch

Diese Kraft  $P$  ist unter dem Winkel  $\varrho_1$  gegen die Normale zu der Wandfläche geneigt, und greift in einem Punkte  $D$  an, welcher von dem Fußpunkte  $A$  um die Höhe  $DA = \frac{1}{3} h$  entfernt ist. Hiervon überzeugt man

sich leicht, wenn man den obigen Werth von  $P$  aus (5) durch  $P = \gamma \frac{h^2}{2} A$  ausdrückt, unter  $A$  den constanten nur von  $\varrho$  und  $\varrho_1$  abhängigen Factor verstanden. Für einen beliebigen Punkt der Wandfläche, welcher um  $y$  unter  $B$  gelegen ist, hat man dann

$$P = \frac{\gamma A}{2} y^2,$$

und daher erhält man den Druck auf ein Element daselbst von der Höhe  $\partial y$  zu

$$\partial P = \gamma A y \partial y.$$

Diese elementare Druckkraft hat für den Punkt  $B$  als Drehpunkt ein statisches Moment

$$\partial P y \cos \varrho_1 = \gamma A \cos \varrho_1 y^2 \partial y,$$

folglich erhält man das Moment  $M$  des gesammten Erddruckes auf die Wand  $BA$  durch Integration zu

$$M = \gamma A \cos \varrho_1 \int_0^h y^2 \partial y = \frac{\gamma A}{3} \cos \varrho_1 h^3 \dots (6)$$

Dieses Moment ist nun aber auch, wenn  $b = BD$  den Abstand des Angriffspunktes  $D$  des Erddruckes von  $B$  bezeichnet, durch

$$M = P \cos \varrho_1 b = \frac{\gamma h^2}{2} A \cos \varrho_1 b \dots (7)$$

$$\cotg \beta = \frac{\sqrt{1 + \cotg \varrho \cotg(\varrho + \varrho_1)} - 1}{\cotg(\varrho + \varrho_1)},$$

und aus Gleichung (3)

$$\cotg^2 \beta = \frac{\cotg \varrho - \cotg \beta}{\cotg(\varrho + \varrho_1) + \tan \beta},$$

folglich wird nach (2)

$$\begin{aligned} P &= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin \varrho}{\sin(\varrho + \varrho_1)} \frac{\cotg \varrho - \cotg \beta}{\cotg(\varrho + \varrho_1) + \tan \beta} \\ &= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin \varrho}{\sin(\varrho + \varrho_1)} \left[ \frac{\sqrt{1 + \cotg \varrho \cotg(\varrho + \varrho_1)} - 1}{\cotg(\varrho + \varrho_1)} \right]^2 \\ &= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin \varrho}{\cos^2(\varrho + \varrho_1)} \left[ \frac{\sqrt{\sin(\varrho + \varrho_1) \sin \varrho + \cos(\varrho + \varrho_1) \cos \varrho} - \sqrt{\sin(\varrho + \varrho_1)}}{\sin \varrho} \right]^2 \\ &= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin \varrho}{\cos^2(\varrho + \varrho_1)} \left[ \sqrt{\frac{\cos \varrho_1}{\sin \varrho}} - \sqrt{\sin(\varrho + \varrho_1)} \right]^2. \end{aligned}$$

ausgedrückt, so daß man durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (6) und (7)

$$b = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}AB$$

erhält.

Wenn man, wie dies häufig geschieht, auf die Reibung der Erde an der Futtermauer keine Rücksicht nehmen will, wodurch man den Erddruck größer, das Bauwerk daher entsprechend sicherer erhält, so hat man in obigen Formeln  $\varphi_1 = 0$  zu setzen, und erhält dann aus (5):

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{\gamma h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2},$$

und aus (4):

$$\tan \beta = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \frac{90^\circ + \varphi}{2},$$

woraus man ersieht, daß unter dieser Voraussetzung die Trennungsebene  $AC$  den Winkel zwischen der Wand  $AB$  und der natürlichen Böschung  $AE$  halbiert.

In ähnlicher Art, wie im Vorstehenden der active Erddruck gegen Futtermauern durch die Ermittlung des Prismas vom größten Drucke bestimmt worden ist, läßt sich auch der passive Erddruck oder der Widerstand bestimmen, welchen die Erdmasse einem gegen dieselbe ausgeübten Schube entgegensetzt, indem man von allen verschiedenen Prismen, welche hierbei möglicher Weise fortgeschoben werden können, dasjenige ermittelt, welches seiner Verschiebung den kleinsten Widerstand entgegensetzt. In diesem Sinne spricht man von einem Prisma des kleinsten Widerstandes, bei dessen Ermittlung man selbstredend die Reibungswiderstände in einer der oben vorausgesetzten entgegengesetzten Richtung, d. h. ebenfalls in einem der angestrebten Verschiebung entgegenwirkenden Sinne anzunehmen hat. Die Formeln für den activen Erddruck gelten ohne Weiteres auch für den passiven Schub, sobald man darin  $\varphi = -\varphi$  und  $\varphi_1 = -\varphi_1$  einführt.

Beispiel. Wie groß ist der active Erddruck gegen eine 3 m hohe verticale Futtermauer, hinter welcher die Erde horizontal abgeglitten ist, wenn das specifische Gewicht der Erdmasse zu 1,5, der natürliche Böschungswinkel zu  $\varphi = 36^\circ$  und der Reibungswinkel zwischen der Erde und der Mauerfläche zu  $\varphi_1 = 25^\circ$  angenommen wird?

Man erhält den Druck  $P$  gegen eine Mauer von 1 m Länge nach (5) zu:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1500 \cdot 3 \cdot 3}{2} \frac{\sin 36^\circ}{\cos^2 61^\circ} \left( \sqrt{\frac{\cos 25^\circ}{\sin 36^\circ}} - \sqrt{\sin 61^\circ} \right)^2 \\ &= 6750 \frac{0,5878}{0,4848^2} (V1,542 - V0,8746)^2 \\ &= 6750 \cdot 2,501 \cdot 0,0942 = 1590 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Für den Gleitwinkel  $\beta$  findet sich aus (4):

$$\begin{aligned} \tan \beta &= \tan 36^\circ (1 + \sqrt{1 + \cotg 36^\circ \cotg 61^\circ}) \\ &= 0,7265 (1 + \sqrt{1 + 1,3764 \cdot 0,5543}) \\ &= 0,7265 \cdot 2,326 = 1,6898 = \tan 59^\circ 23'. \end{aligned}$$

Ohne Berücksichtigung der Reibung an der Wand hätte man:

$$\beta_0 = \frac{90^\circ + 36^\circ}{2} = 63^\circ$$

und den Erddruck:

$$P_0 = \frac{1500 \cdot 9}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - 36^\circ}{2} = 6750 \cdot 0,5095^2 = 1752 \sim 1750 \text{ kg,}$$

also um 162 kg größer als mit Berücksichtigung der Reibung. Von dem gefundenen Erddrucke  $P$  wirkt die horizontale Componente

$$H = P \cos 25^\circ = 1590 \cdot 0,9063 = 1441 \text{ kg}$$

auf Umstürzen der Mauer, während die verticale Seitenkraft

$$V = P \sin 25^\circ = 1590 \cdot 0,4226 = 672 \text{ kg}$$

die Mauer belastet und dadurch die Stabilität erhöht.

Der passive Erdschub würde sich, wenn man die Reibung an der Wandfläche vernachlässigt, zu

$$P = \frac{1500 \cdot 9}{2} \tan^2 \frac{90^\circ + 36^\circ}{2} = 6750 \cdot 1,9626^2 = 26000 \text{ kg}$$

berechnen, entsprechend einem Gleitwinkel

$$\beta = \frac{90^\circ - 36^\circ}{2} = 27^\circ.$$

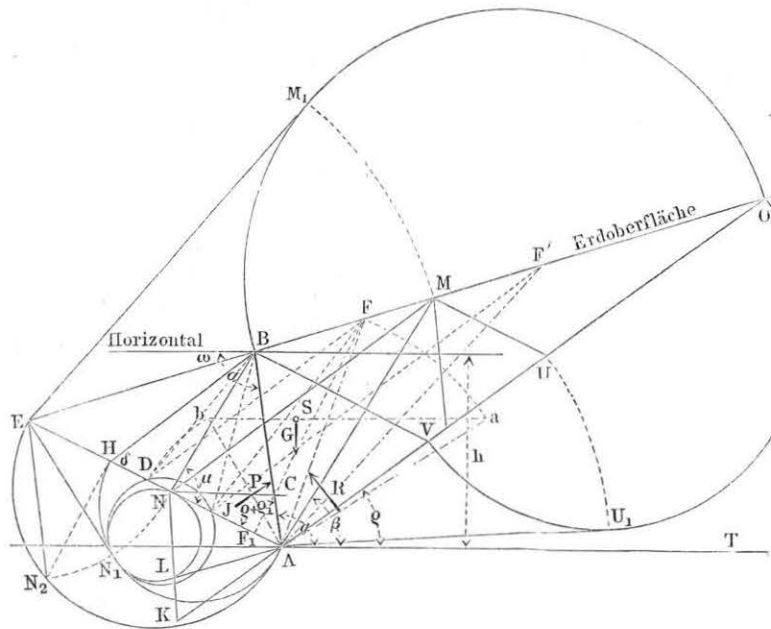
**Graphische Druckermittelung.** Die im vorhergehenden Paragraphen §. 7. graphen unter den beschränkenden Voraussetzungen einer verticalen Stützwand und einer horizontalen Erdoberfläche angegebene rechnerische Bestimmung des Erddruckes führt für den allgemeinen Fall einer beliebig geneigten Futtermauer und einer beliebig begrenzten Erdoberfläche zu so verwickelten Formeln, daß es für alle Fälle der Praxis jedenfalls vorzüglicher erscheint, zu dieser Druckermittelung sich graphischer Methoden zu bedienen, welche in vergleichsweise einfacher Art in fast allen vorkommenden Fällen zum Ziele führen. Deshalb soll hier noch das von Poncelet\*) angegebene Verfahren angeführt werden.

Zu dem Behufe sei  $AB$ , Fig. 19 (a. f. S.), die stützende Fläche einer unter dem beliebigen Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont  $AT$  geneigten Futtermauer, welche einer Erdmasse zu widerstehen hat, deren ebene Oberfläche  $BO$  unter dem Winkel  $\omega$  gegen den Horizont geneigt ist, wobei  $\omega$  ebenfalls beliebig groß, wenn nur kleiner als der Böschungswinkel  $\varphi$  der Erdmasse

\*) Ueber die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente, von Poncelet, übersetzt von W. Lahmeyer. Braunschweig 1844.

Weisbach & Herrmann, Lehrbuch der Mechanik. II. 1.

sein kann. Es werde als Gleitfläche eine beliebige Ebene  $AF$  angenommen, so hat man sich im Schwerpunkte  $S$  des dreiseitigen Prismas  $ABF$  das Fig. 19.



Gewicht  $G$  der abrutschenden Erdmasse zu denken. Durch dieses Gewicht  $G$  werden Reactionen  $R$  und  $P$  der Gleitfläche  $AF$  und der Mauerfläche  $AB$  erzeugt, welche mit  $G$  im Gleichgewichte sein müssen. Von den Richtungen dieser Reactionen muß man annehmen, daß sie im Momente des Abgleitens um die Reibungswinkel  $\varphi$  bzw.  $\varphi_1$  von den Normalen der Gleitfläche bzw. der Wandfläche abweichen. Würde man diese Kräfte der Richtung und Größe nach an einander antragen, so erhielte man als Kräftepolygon ein geschlossenes Dreieck, dessen Seiten den Kräften verhältnißgleich sind. Es ist auch deutlich, daß man ein mit diesem Kräftepolygone ähnliches Dreieck erhalten wird, wenn man irgendwo zu den Kraftrichtungen senkrechte Gerade zieht; ein solches Dreieck ist z. B.  $Aab$ , worin  $Aa$  senkrecht zu  $R$ ,  $Ab$  senkrecht zu  $P$  und  $ab$  senkrecht zu  $G$ , also horizontal gezogen ist. Offenbar sind auch die Seiten dieses Dreiecks mit den Kräften proportional, und zwar jede Seite mit derjenigen Kraft, auf welcher sie senkrecht steht, z. B. stellt  $Ab$  die Kraft  $P$  nach demjenigen Maßstabe vor, nach welchem das Gewicht  $G$  durch  $ab$  ausgedrückt ist. Von dem Dreiecke  $Aab$  bildet ferner

die Seite  $Aa$  mit der Gleitfläche  $AF$  ebenso den Winkel  $\varphi$ , wie die entsprechende Kraft  $R$  mit ihrer Flächennormale, und wenn man daher dem besagten Dreiecke  $Aab$  eine Linksdrehung um  $A$  im Winkelbetrage  $\varphi$  ertheilt denkt, so fällt die Seite  $Aa$  in die Gleitfläche  $AF$  hinein, und zwar trifft  $a$  nach  $F$ , wenn man von vornherein die willkürliche Länge  $Aa = AF$  machte. Die das Gewicht  $G$  darstellende horizontale Seite  $ab$  gelangt durch die Drehung um  $\varphi$  in eine Lage  $FD$  parallel zur natürlichen Böschung der Erdmasse, während die dritte Seite  $Ab$ , welche zuvor den Winkel  $\varphi_1$  mit der Wandfläche  $AB$  bildete, nach der Drehung mit der Wandfläche  $AB$  offenbar den Winkel  $BAD = \varphi + \varphi_1$  einschließt. Das Dreieck  $AFD$  repräsentirt also in seinen Seitenlängen die Größen der Kräfte  $R$ ,  $G$  und  $P$ , wenn man einen Kräftemaßstab von solcher Eintheilung zu Grunde legt, daß die Länge  $FD$  danach dem Gewichte des dreiseitigen Erdprismas  $ABF$  entspricht, dabei immer eine Dimension des Prismas senkrecht zur Bildebene gleich 1 m vorausgesetzt. Daher folgt ohne Weiteres die Größe des Erddruckes auf die Wandfläche:

$$P = G \frac{AD}{DF} \dots \dots \dots (1)$$

Um das Gewicht  $G$  des Erdprismas  $ABF$  zu bestimmen, kann man, wenn  $BJ$  parallel  $FA$  geführt wird, anstatt des Dreiecks  $ABF$  das flächengleiche Dreieck  $AJF$  setzen, dessen Inhalt durch

$$\frac{1}{2} AJ \cdot FF_1 = \frac{1}{2} AJ \cdot DF \sin \delta$$

gefunden wird, wenn  $FF_1$  die senkrechte Höhe zur Grundlinie  $AJ$  und  $\delta$  der Winkel  $FDA$  ist. Man hat daher, unter  $\gamma$  das Gewicht von 1 cbm Erde verstanden, das Gewicht des Prismas:

$$G = \frac{1}{2} \gamma \sin \delta \cdot AJ \cdot DF,$$

und daher den Wanddruck nach (1):

$$P = G \frac{AD}{DF} = \frac{1}{2} \gamma \sin \delta \cdot AJ \cdot AD \dots \dots (2)$$

Man hat also, um das Prisma vom größten Drucke zu erhalten, die Lage der Gleitfläche  $AF$  so zu wählen, daß das Product  $AJ \cdot AD$  zu einem Maximum wird. Um zu erkennen, unter welcher Bedingung dies der Fall ist, ziehe man noch durch den obersten Punkt  $B$  der Wandfläche die Gerade  $BH$  parallel zu  $FD$ , also unter dem Winkel  $\varphi$  gegen den Horizont, alsdann hat man wegen des Parallelismus der beiden von  $B$  und  $F$  ausgehenden Linienpaare

$$EH : ED = EB : EF = EJ : EA,$$

folglich auch

$$ED \cdot EJ = EH \cdot EA = \text{Const.}$$



Die beiden Punkte  $D$  und  $J$ , welche sich in vorstehender Art für irgend eine angenommene Gleitfläche  $AF$  ergaben, haben also die Eigenschaft, daß das Product ihrer Abstände  $ED \cdot EJ$  von dem bekannten Punkte  $E$  eine constante Größe, nämlich gleich  $EH \cdot EA = EN_1^2$  ist, wenn  $EN_1$  die von  $E$  aus an den über  $AH$  gezeichneten Halbkreis gezogene Tangente bedeutet. Aus den bekannten Eigenschaften des Kreises geht nunmehr hervor, daß ein Kreis, welcher durch die drei Punkte  $D, J$  und  $N_1$  gelegt wird, in  $N_1$  ebenfalls von der Geraden  $EN_1$  berührt werden muß. Zieht man nun von  $A$  aus an diesen letztgedachten Kreis die Tangente  $AL$ , so hat man:

$$AL^2 = AJ \cdot AD,$$

also auch nach (2) in  $AL^2$  ein Maß für den gefundenen Erddruck:

$$P = \frac{1}{2} \gamma \sin \delta \cdot AJ \cdot AD.$$

Es ist nun aber ersichtlich, daß von allen möglichen Kreisen  $N_1L$ , welche die Gerade  $EN_1$  in  $N_1$  berühren und durch zwei Punkte  $D$  und  $J$  der Geraden  $AH$  gehen, derjenige die größte von  $A$  aus gezogene Tangente  $AL$  hat, welcher  $AH$  ebenfalls berührt, d. h. für welchen die beiden Punkte  $D$  und  $J$  zusammenfallen. Dieser fragliche Kreis berührt offenbar die Gerade  $AE$  in einem Punkte  $N$ , für welchen  $EN = EN_1$  ist, und man findet durch die Tangente  $AN$  an diesen Kreis von  $A$  aus und zwar in  $AN^2$  das Maximum von  $AJ \cdot AD$ , und daher das Maß für den größten Erddruck. Es ist nun leicht zu erkennen, daß man das diesem größten Erddrucke entsprechende Prisma erhält, wenn man durch  $N$  die Gerade  $NM$  parallel mit  $DF$  oder  $HB$ , d. h. parallel zur natürlichen Böschung der Erdmasse legt, und  $M$  mit  $A$  verbindet. Man hat dann in  $ABM$  das Prisma des größten Druckes erhalten, für welches die Ebene  $AM$  als Bruchfläche anzusehen ist. Es ist übrigens leicht ersichtlich, daß diese Gleitfläche  $AM$  auch parallel mit  $NB$  ausfällt, so daß man auch  $N$  mit  $B$  verbinden und in der durch  $A$  zu  $NB$  parallelen Geraden  $AM$  die Gleitfläche construiren kann. Ebenso ergibt sich, wenn man noch  $AO$  parallel zu  $HB$  legt, daß auch  $EB \cdot EO = EM^2$  sein muß, woraus eine andere Construction von  $M$  folgt, indem man  $EM$  gleich der mittleren Proportionale  $EM_1$  zwischen  $EB$  und  $EO$  aufträgt. Selbstredend würde man den Punkt  $N$  auch dadurch bestimmen können, daß man in  $H$  eine zu  $AE$  senkrechte Gerade bis zum Durchschnitte  $N_2$  mit dem über  $AE$  beschriebenen Halbkreise zeichnet und  $EN = EN_2$  anträgt. Ebenso ist es ersichtlich, daß man zu dem Punkte  $M$  gelangt, wenn man  $BV$  parallel zu  $AE$  zieht, und zu  $AV$  und  $AO$  die mittlere Proportionale  $AU_1$  sucht, dieselbe nach  $AU$  überträgt und durch  $U$  eine Parallele zu  $AE$  zieht, denn es gilt auch die Gleichung  $AU^2 = AV \cdot AO$  u. s. f. Man wird von diesen verschiedenen Con-

structionen zur Ermittlung von  $N$  oder  $M$  in jedem besonderen Falle die bequemste auswählen.

Wenn man ferner noch durch  $J$  eine Parallele zu  $AO$  zieht, so findet man einen Punkt  $F'$ , von welchem sofort zu erkennen ist, daß das durch die Ebene  $AF'$  begrenzte Prisma  $ABF'$  denselben Wanddruck  $P$  erzeugen muß, wie das Prisma  $ABF$ , denn für beide gilt die Beziehung

$$P = \frac{1}{2} \gamma \sin \delta \cdot AJ \cdot AD.$$

Von dem Erddrucke  $P = \frac{1}{2} \gamma \sin \delta \cdot AN^2$  giebt die Figur ebenfalls eine Darstellung in dem Dreiecke  $ANK$ , welches man erhält, wenn man  $OA$  rückwärts um  $AK = AN$  verlängert, denn der Inhalt dieses Dreiecks  $NAK$  ist dann offenbar durch  $\frac{1}{2} \sin \delta \cdot AN^2$  ausgedrückt, und es verhält sich daher der Erddruck  $P$  zu dem Gewichte des abgleitenden Prismas  $BAM$  wie der Inhalt des Dreiecks  $NAK$  zu demjenigen des Dreiecks  $BAM$ .

Man kann bemerken, daß es außer dem gezeichneten Kreise  $NN_1$  noch einen zweiten solchen giebt, welcher  $AE$  auf der Verlängerung über  $E$  hinaus berührt, und es ist ersichtlich, daß diesem Kreise von allen denjenigen, welche  $EN_1$  in  $N_1$  berühren, und die Verlängerung von  $AE$  in zwei Punkten schneiden, die kleinste von  $A$  aus gezogene Tangente zukommt, deren Größe durch  $AE + EN$  sich ausdrückt. Dieser Kreis entspricht dem oberen Grenzzustande und ist daher zu benutzen, wenn es sich um die Ermittlung des Prismas vom kleinsten Widerstande behufs Bestimmung des passiven Erddruckes handelt.

Nach dem Vorhergehenden ist es nun leicht, die Construction anzugeben, vermöge deren in irgend einem vorliegenden Falle der Erddruck, bezw. der Erdwiderstand in Hinsicht auf eine Futtermauer gefunden wird.

Es sei zu dem Ende  $AB$ , Fig. 20 und 21 (a. f. S.), die betreffende Mauerfläche und  $EO$  die ebene, beliebig gegen den Horizont geneigte Oberfläche der Erde, deren Druck (Fig. 20) bezw. Widerstand (Fig. 21) zu ermitteln ist. Hierzu lege man durch den Fußpunkt  $A$  die beiden Geraden  $AO$  unter dem natürlichen Böschungswinkel  $\varphi$  gegen den Horizont  $AH$ , und  $AE$  unter dem Winkel  $BAE = \varphi + \varphi_1$  gegen die Mauerfläche, und zwar zur Ermittlung des Erddruckes (Fig. 20) von der Mauerfläche  $AB$  nach außen und zur Bestimmung des Erdwiderstandes (Fig. 21) nach der Erdmasse hin gerichtet. Zieht man dann an den über  $OB$  gezeichneten Halbkreis die Tangente  $EM_1$  und trägt  $EM = EM_1$  auf, so erhält man in  $AM$  die Gleitfläche, und wenn man  $MN$  parallel der natürlichen Böschung  $AO$  führt, so liefert die Strecke  $AN$  ein Maß für den Druck auf die Wandfläche, welcher durch

$$P = \frac{1}{2} \sin \delta \cdot AN^2$$

ausgedrückt und durch das Dreieck  $ANK$  dargestellt ist, in welchem

$AK = AN$  gemacht ist. Es ist nach dem Vorhergehenden deutlich, daß man anstatt des Halbkreises über  $OB$  auch denjenigen über  $AB_1$  benutzen kann, nachdem man durch  $B$  die zu  $AO$  parallele Gerade  $BB_1$  gezogen hat.

Fig. 20.

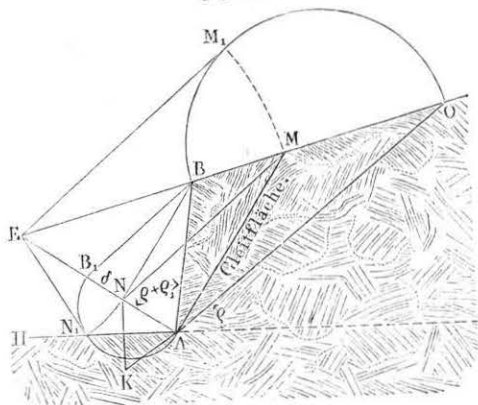
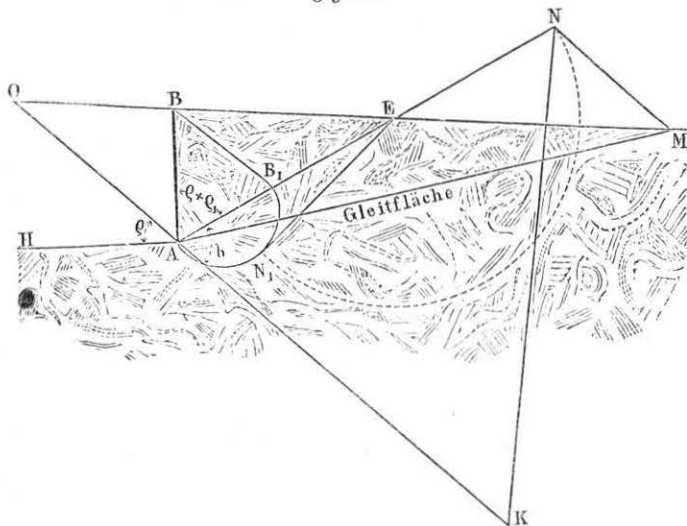


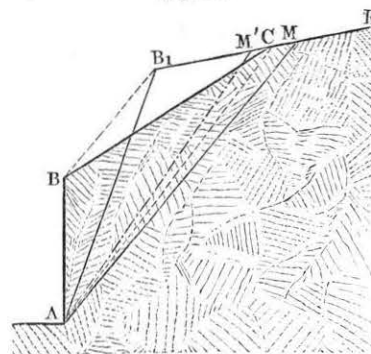
Fig. 21.



Wenn die Oberfläche der Erdmasse nicht, wie bisher angenommen wurde, durch eine einzige Ebene gebildet, sondern etwa nach einer gebrochenen Linie *BCE*, Fig. 22, profilirt ist, so hat man für die Untersuchung zunächst das

Fig. 22.

Fig. 22.



fläche alsdann ohne Einfluß auf den Wanddruck ist. Den Punkt  $B_1$  findet man leicht in dem Durchschnitte der verlängerten Terrainlinie  $EC$  mit einer von  $B$  aus zu  $AC$  gezogenen Parallelen.

Wenn ferner die Oberfläche der Erdmasse durch eine gleichmäßig vertheilte Belastung gedrückt wird, so hat man sich diese Last wie eine parallel zur Oberfläche begrenzte Erderhöhung zu denken, deren Höhe so bemessen ist, daß sie dasselbe Gewicht repräsentirt, wie die vorhandene Belastung, der Wanddruck wird dadurch natürlich entsprechend vergrößert, in der Neigung der Bruchfläche und der Richtung des Druckes wird durch die zusätzliche Belastung nichts geändert, wohl aber wird, wie in §. 5 bereits gezeigt wurde, dadurch der Angriffspunkt des Erddruckes höher gerückt.

**Formeln für den Erddruck.** Vermittelt der im vorigen Para- §. 8.  
graphen angegebenen Construction ist es nun leicht, für die Größe des Erd-  
druckes eine allgemeine Formel aufzustellen, da es nur darauf ankommt, in  
der daselbst für den Erddruck gefundenen Gleichung

$$P = 1/2 \gamma \sin \delta \cdot \overline{AN^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

die Strecke  $AN$  durch die gegebenen Größen auszudrücken. Der Winkel  $\delta = MNA = NAK$ , Fig. 19, bestimmt sich zunächst nach der Figur durch

$$\delta + \varrho + \varrho_1 + \alpha - \varrho = 180^\circ \text{ и } \delta = 180^\circ - (\alpha + \varrho_1). \quad (2)$$

so daß man hat

$$\sin \delta = \sin (\alpha + \varrho_1) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (3)$$



Ferner ist

$$AN = EA - EN = EA - \sqrt{EH \cdot EA} = EA \left(1 - \sqrt{\frac{EH}{EA}}\right) \quad (4)$$

Nun folgt aus dem Dreiecke  $ABE$ :

$$\begin{aligned} EA &= AB \frac{\sin EBA}{\sin AEB} = AB \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin(\alpha - \omega + \varrho + \varrho_1)} \\ &= \frac{h}{\sin \alpha} \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin(\alpha - \omega + \varrho + \varrho_1)} \quad \dots \quad (5) \end{aligned}$$

und

$$\frac{EH}{EA} = \frac{EH \cdot EB}{EB \cdot EA} = \frac{\sin(\varrho - \omega) \sin(\varrho + \varrho_1)}{\sin(\alpha + \varrho_1) \sin(\alpha - \omega)} \quad \dots \quad (6)$$

Mit den Werthen von (5) und (6) erhält man aus (4):

$$\begin{aligned} AN &= \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin(\alpha - \omega + \varrho + \varrho_1)} \left(1 - \sqrt{\frac{\sin(\varrho - \omega) \sin(\varrho + \varrho_1)}{\sin(\alpha + \varrho_1) \sin(\alpha - \omega)}}\right) \\ &= c \frac{h}{\sin \alpha} \quad \dots \quad (7) \end{aligned}$$

wenn man den Coefficienten von  $\frac{h}{\sin \alpha}$  der Kürze wegen mit  $c$  bezeichnet.

Daher wird schließlich nach (1) und (3) der Erddruck:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin(\alpha + \varrho_1)}{\sin^2 \alpha} \frac{\sin^2(\alpha - \omega)}{\sin^2(\alpha - \omega + \varrho + \varrho_1)} \left(1 - \sqrt{\frac{\sin(\varrho - \omega) \sin(\varrho + \varrho_1)}{\sin(\alpha + \varrho_1) \sin(\alpha - \omega)}}\right)^2 \\ &= \frac{\gamma h^2}{2} \frac{\sin(\alpha + \varrho_1)}{\sin^2 \alpha} c^2 = k \gamma \frac{h^2}{2} \quad \dots \quad (8) \end{aligned}$$

wenn man

$$\frac{\sin(\alpha + \varrho_1)}{\sin^2 \alpha} c^2 = k \quad \dots \quad (9)$$

setzt.

Dieser Ausdruck für  $P$ , welcher allgemein für alle Fälle gilt, in denen die Oberfläche der Erdmasse durch eine Ebene begrenzt ist, läßt die Analogie des Erddruckes mit dem Drucke einer Flüssigkeit erkennen. Da der Werth  $k$  nur von den Winkeln  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\varrho$  und  $\varrho_1$  abhängig ist, also für alle Punkte im Innern der Erdmasse derselbe ist, so kann man der Gleichung (8) zufolge den Druck der Erde gegen die Wandfläche wie den hydrostatischen Druck einer Flüssigkeit ansehen, welche das Gewicht  $k\gamma$  pro Cubikeinheit hat. Dem entsprechend wird auch der Angriffspunkt des resultirenden Erddruckes wie bei Flüssigkeiten in  $\frac{1}{3}$  der Höhe  $h$  über dem Fußpunkte  $A$  der gedrückten Wandfläche  $AB$  gelegen sein, wie dies auch schon früher gefunden wurde.

Aus der Fig. 19 kann man auch einen analytischen Ausdruck für den Winkel  $\beta = MAT$  entnehmen, welchen die Gleitfläche  $MA$  mit dem Horizonte bildet. Bezeichnet man zu dem Zwecke mit  $\mu$  den Winkel  $BNA$ , welchen die Richtung der Gleitfläche mit der unter der Neigung  $\varrho + \varrho_1$  gegen die Wandfläche gezogenen Geraden  $AE$  bildet, so ersieht man aus dem Dreiecke  $ABN$ , daß

$$\tan \mu = \frac{AB \sin(\varrho + \varrho_1)}{AN - AB \cos(\varrho + \varrho_1)} \text{ ist.}$$

Setzt man hierin  $AB = \frac{h}{\sin \alpha}$  und nach Gleichung (7)  $AN = c \frac{h}{\sin \alpha}$  ein, so folgt:

$$\tan \mu = \frac{\sin(\varrho + \varrho_1)}{c - \cos(\varrho + \varrho_1)} \quad \dots \quad (10)$$

Da nun aber nach der Figur, wenn  $NC$  horizontal ist,  $\mu = BNA = BNC + CNA = \beta + 180^\circ - (\alpha + \varrho + \varrho_1)$  ist, so hat man auch:

$$\beta = \alpha + \varrho + \varrho_1 - 180^\circ + \mu,$$

und mit Bezug auf (10):

$$\beta = \alpha + \varrho + \varrho_1 - 180^\circ + \arctan \frac{\sin(\varrho + \varrho_1)}{c - \cos(\varrho + \varrho_1)} \quad \dots \quad (11)$$

worin man für  $c$  den aus (7) zu entnehmenden Werth:

$$c = \frac{\sin(\alpha - \omega)}{\sin(\alpha - \omega + \varrho + \varrho_1)} \left(1 - \sqrt{\frac{\sin(\varrho - \omega) \sin(\varrho + \varrho_1)}{\sin(\alpha + \varrho_1) \sin(\alpha - \omega)}}\right) \quad (12)$$

einzuführen hat.

Es mögen noch die obigen Formeln auf einige besondere, häufiger vorkommende Fälle angewendet werden.

Setzt man, wie in §. 6, eine verticale Wandfläche und eine horizontale Oberfläche, also  $\alpha = 90^\circ$  und  $\omega = 0$  voraus, so erhält man, wenn man auch die Reibung an der Wand vernachlässigt, also mit  $\varrho_1 = 0$ , aus (12):

$$c = \frac{1 - \sin \varrho}{\cos \varrho} = \tan \frac{90^\circ - \varrho}{2},$$

und aus (8):

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - \varrho}{2}.$$

Ferner ist nach (10):

$$\begin{aligned} \tan \mu &= \frac{\sin \varrho}{c - \cos \varrho} = \frac{\sin \varrho \cos \varrho}{1 - \sin \varrho - \cos^2 \varrho} = \frac{\cos \varrho}{\sin \varrho - 1} \\ &= -\cotg \frac{90^\circ - \varrho}{2}, \end{aligned}$$

daher folgt:

$$\mu = 90^\circ + \frac{90^\circ - \varrho}{2},$$

und aus (11):

$$\beta = \frac{90^\circ + \varrho}{2},$$

wie schon früher gefunden.

Setzt man  $\varrho_1$  nicht gleich Null, so wird in diesem Falle:

$$c = \frac{1}{\cos(\varrho + \varrho_1)} \left( 1 - \sqrt{\frac{\sin \varrho \sin(\varrho + \varrho_1)}{\cos \varrho_1}} \right),$$

und damit

$$k = \left( \frac{\sqrt{\cos \varrho_1} - \sqrt{\sin \varrho \sin(\varrho + \varrho_1)}}{\cos(\varrho + \varrho_1)} \right)^2.$$

Nimmt man ferner bei ebenfalls verticaler Wandfläche  $\omega = \varrho$  und  $\varrho_1 = 0$  an, so erhält man aus (12)  $c = \cos \varrho$ , und damit aus (8):

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \cos^2 \varrho;$$

ferner aus (10)  $\tan \mu = \infty$ , also:

$$\mu = 90^\circ \text{ und } \beta = \varrho.$$

Würde man im letzteren Falle den Reibungswinkel  $\varrho_1$  für die Wandfläche gleich dem  $\varrho$  der Erdmasse annehmen, so erhielte man:

$$c = 1 \text{ und } P = \frac{\gamma h^2}{2} \cos \varrho,$$

während auch dann  $\beta = \varrho$  bleibt. Diese Resultate stimmen mit den für denselben Fall nach der Mohr'schen Theorie des Erddruckes in §. 4 gefundenen überein, wie es auch in der Natur der Sache ist, da in diesem Falle (s. Fig. 10) die eine Gleitfläche der Erdmasse, in welcher der Druck um den Winkel  $\varrho$  gegen die Normale zur Fläche abweicht, mit der Wandfläche zusammenfällt.

**Beispiel.** Es soll der Druck einer Erdmasse gegen eine 5 m hohe Mauer gefunden werden, deren dem Erddrucke ausgesetzte Fläche einen Anlauf von  $\frac{1}{20}$  hat, wenn die Erdoberfläche unter dem Winkel  $\omega = 20^\circ$  gegen den Horizont geneigt ist, wenn ferner der Reibungswinkel für die Erde  $\varrho = 35^\circ$  und derjenige für die Mauerfläche  $\varrho_1 = 25^\circ$  ist, und 1 Cubikmeter Erde 1600 kg wiegt?

Man hat hier für die überhängende Mauerfläche

$$\alpha = 90^\circ + \arctan 0,05 = 93^\circ \text{ und } \omega = 20^\circ.$$

Mit diesen Werthen erhält man zunächst aus (12):

$$c = \frac{\sin 73^\circ}{\sin 133^\circ} \left( 1 - \sqrt{\frac{\sin 15^\circ \sin 60^\circ}{\sin 125^\circ \sin 73^\circ}} \right) = 1,307 \cdot 0,4546 = 0,595,$$

und damit aus (8) den Erddruck für jede Mauerfläche von 1 m Länge:

$$P = \frac{1600 \cdot 25}{2} \frac{\sin 118^\circ}{\sin^2 93^\circ} 0,595^2 = 20000 \cdot 0,885 \cdot 0,354 = 6260 \text{ kg},$$

welcher Druck unter einem Winkel von  $3^\circ + 25^\circ = 28^\circ$  gegen den Horizont in einer Höhe  $a = \frac{5}{3} = 1,667 \text{ m}$  über dem Fußpunkte der Mauer wirkt. Zur Bestimmung des Neigungswinkels  $\beta$  der Gleitfläche hat man zunächst nach (10):

$$\tan \mu = \frac{\sin 60^\circ}{0,595 - \cos 60^\circ} = 9,116,$$

womit  $\mu = 83^\circ 44'$  und nach (11):

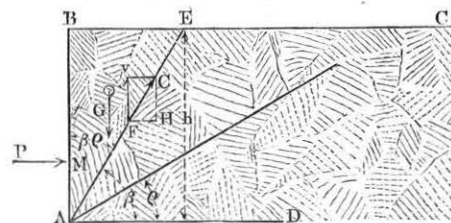
$$\beta = 93^\circ + 35^\circ + 25^\circ - 180^\circ + 83^\circ 44' = 56^\circ 44'$$

folgt.

**Cohäsion lockerer Massen.** Bei den bisherigen Ermittlungen §. 9. wurde die Cohäsion ganz außer Acht gelassen, welche gewisse, besonders lehmhaltige Massen ihrer Trennung entgegensetzen. Da diese Kraft indessen bei festgestampfter Erde und bei gewöhnlichem Boden oft nicht unbedeutend ist, so soll hier noch die Untersuchung mit Berücksichtigung der Cohäsion geführt werden. Während die Reibung proportional mit dem Normaldrucke, jedoch unabhängig von der Berührungsfläche ist, hat man dagegen die Cohäsion als von dem Drucke unabhängig und mit der Größe der Trennungsfläche im directen Verhältnisse stehend anzunehmen. Als Maß oder Modul der Cohäsion möge diejenige Kraft  $c$  angenommen werden, welche erforderlich ist, um den Zusammenhang der Erdmasse in einer Trennungsfläche gleich 1 Quadratmeter aufzuheben.

Um nun den Druck der durch eine horizontale Ebene  $BC$ , Fig. 23, begrenzten Erdmasse gegen die verticale Stützwand  $AB$  zu ermitteln, sei

Fig. 23.



wieder vorausgesetzt, daß ein keilförmiges Prisma  $ABE$  vom Gewichte  $G$  auf der schiefen Ebene  $AE$  vom Neigungswinkel

$$EAD = \beta$$

herabzugleiten strebe, und durch die von der Futtermauer  $AB$  ausgeübte Reaction  $P$  daran verhindert werde. Außer den

beiden Kräften  $G$  und  $P$  und der Reibung auf der schiefen Ebene wirkt nun hier noch in  $AE$  die Cohäsionskraft

$$C = c \cdot AE = c \frac{h}{\sin \beta},$$

welche in gleichem Sinne wie die Reibung eine Bewegung zu hindern strebt, also im vorliegenden Falle aufwärts gerichtet ist. Die Cohäsionskraft  $C$  läßt sich nun in zwei Componenten, horizontal und vertical, zerlegen, von denen die erstere

$$H = C \cos \beta = ch \cotg \beta$$

in gleichem Sinne mit dem Drucke  $P$  der Futtermauer wirkt, während die verticale Componente

$$V = C \sin \beta = ch$$

dem Gewichte  $G$  des Erdprismas direct entgegenwirkt. Man kann daher für den vorliegenden Fall die bekannte Gleichung der schiefen Ebene

$$K = Q \tan (\beta - \varrho)$$

anwenden, wenn man für die vertical wirkende Last  $Q$  hier  $G - V$  und für die horizontale Kraft  $K$  die Summe  $P + H$  einführt. Hierdurch erhält man:

$$P + H = (G - V) \tan (\beta - \varrho),$$

oder, wenn man hierin für  $H$  und  $V$  die obigen Werthe und

$$G = \frac{\gamma h^2}{2} \cotg \beta$$

setzt:

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \cotg \beta \tan (\beta - \varrho) - ch \tan (\beta - \varrho) - ch \cotg \beta \quad (1)$$

Nun hat man wieder denjenigen Werth von  $\beta$  zu ermitteln, für welchen  $P$  ein Maximum wird, um den activen Erddruck zu erhalten. Um der Gleichung (1) zu dem Zwecke die geeignete Form zu ertheilen, addire und subtrahire man  $ch \cotg \varrho \cotg \beta \tan (\beta - \varrho)$ , so erhält man:

$$P = h \left[ \left( \frac{\gamma h}{2} + c \cotg \varrho \right) \cotg \beta \tan (\beta - \varrho) - c \cotg \beta - c (1 + \cotg \beta \cotg \varrho) \tan (\beta - \varrho) \right].$$

Nun folgt aber leicht

$$(1 + \cotg \beta \cotg \varrho) \tan (\beta - \varrho) = \cotg \varrho - \cotg \beta^*),$$

folglich erhält man auch:

$$P = \left[ \left( \frac{\gamma h}{2} + c \cotg \varrho \right) \cotg \beta \tan (\beta - \varrho) - c \cotg \varrho \right] h \quad (2)$$

\*) Man erhält diesen Ausdruck durch:

$$\begin{aligned} \tan (\beta - \varrho) &= \frac{\tan \beta - \tan \varrho}{1 + \tan \beta \tan \varrho} = \frac{\tan \beta - \tan \varrho}{1 + \tan \beta \tan \varrho} \frac{\cotg \beta \cotg \varrho}{\cotg \beta \cotg \varrho} \\ &= \frac{\cotg \varrho - \cotg \beta}{\cotg \beta \cotg \varrho + 1}. \end{aligned}$$

Um nun das Maximum von  $P$  zu finden, setzt man  $\frac{\partial P}{\partial \beta} = 0$ , und erhält dadurch:

$$\frac{\cotg \beta}{\cos^2 (\beta - \varrho)} = \frac{\tan (\beta - \varrho)}{\sin^2 \beta},$$

woraus

$$\sin 2\beta = \sin 2(\beta - \varrho),$$

also

$$2\beta = 180^\circ - 2(\beta - \varrho),$$

d. i.

$$\beta = \frac{90^\circ + \varrho}{2} \quad \dots \dots \dots (3)$$

folgt.

Die unter diesem Winkel  $\beta$  gegen den Horizont geneigte Gleitfläche bildet also mit der natürlichen Böschung und der Wand gleiche Winkel  $\frac{90^\circ + \varrho}{2}$ .

Setzt man diesen Werth für  $\beta$  in die Gleichung (1), so erhält man, da hierfür  $\cotg \beta = \tan (\beta - \varrho) = \tan \frac{90^\circ - \varrho}{2}$  ist, die Größe des activen Erddruckes zu:

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - \varrho}{2} - 2ch \tan \frac{90^\circ - \varrho}{2} \quad \dots \quad (4)$$

Diese Kraft wird gleich Null für

$$\frac{\gamma h}{2} \tan \frac{90^\circ - \varrho}{2} = 2c,$$

d. h. für die Höhe:

$$h_0 = \frac{4c}{\gamma \tan \frac{90^\circ - \varrho}{2}} = \frac{4c}{\gamma} \tan \frac{90^\circ + \varrho}{2} \quad \dots \quad (5)$$

Auf diese Höhe  $h_0$  läßt sich also eine cohärente Erdmasse, deren Cohäsionsmodul  $c$  ist, senkrecht abstecken, ohne daß ein Nachrollen erfolgt, und umgekehrt läßt sich aus der Höhe  $h_0$ , auf welche man eine Erdmasse senkrecht aufschneiden kann, der Cohäsionsmodul  $c$  bestimmen durch:

$$c = \frac{\gamma h_0}{4} \tan \frac{90^\circ - \varrho}{2} \quad \dots \dots \dots (6)$$

Führt man noch diesen Werth für  $c$  in die Gleichung (4) ein, so erhält man auch:

$$P = \frac{\gamma h}{2} (h - h_0) \tan^2 \frac{90^\circ - \varrho}{2} \quad \dots \dots \dots (7)$$

Bei Sand, Getreide, Schrot, sowie bei aufgelöster und frisch gegrabener Erde ist  $h_0$  nahezu gleich Null, bei zusammengedrückter oder feucht gewesener

Erde jedoch ist die Höhe  $h_0$  oft beträchtlich, und zwar geringer bei Garten-erde, größer bei thoniger und lehmiger Erdmasse. Für lockere, etwas feuchte Dammerde z. B. fand Martony  $h_0 = 0,9$  Fuß (0,285 m), dagegen bei ganz mit Wasser durchweichter Erde  $h_0 = 0$ . Dichte Pflanzenerde läßt sich höchstens bis 2 m, thonige Erde dagegen etwa 3 bis selbst 4 m hoch senkrecht abgraben. In den meisten Fällen der Anwendung, insbesondere bei angeschütteter Erde, ist es rathsam, die Cohäsionskraft unbeachtet zu lassen.

Zur Bestimmung des passiven Erddruckes hat man in den vorstehenden Formeln nur  $q$  und  $c$  mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftet einzuführen, da sowohl die Reibung, wie die Cohäsion für diesen Fall in entgegengesetzter Richtung wirken. Man erhält daher für den passiven Erddruck oder Erdwiderstand:

$$P' = \frac{\gamma h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ + q}{2} + 2ch \tan \frac{90^\circ + q}{2},$$

oder:

$$P' = \frac{\gamma h}{2} (h + h') \tan^2 \frac{90^\circ + q}{2} \quad \dots \quad (8)$$

wenn man noch:

$$h' = \frac{4c}{\gamma \tan \frac{90^\circ + q}{2}} = \frac{4c}{\gamma} \tan \frac{90^\circ - q}{2} = h_0 \tan^2 \frac{90^\circ - q}{2} \quad (9)$$

setzt.

Durch die Cohäsion der Erdmasse wird nicht nur die Größe, sondern auch der Angriffspunkt der Kraft oder deren Moment verändert. Der Erddruck

$$P = \frac{\gamma h}{2} (h - h_0) \tan^2 \frac{90^\circ - q}{2}$$

besteht aus zwei Theilen, nämlich aus:

$$P_1 = \frac{\gamma h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - q}{2},$$

dessen Angriffspunkt, wie oben mehrfach gezeigt, um die senkrechte Höhe  $\frac{2}{3}h$  unter der Oberfläche der Erdmasse liegt, und aus:

$$P_2 = - \frac{\gamma h h_0}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - q}{2},$$

dessen Angriffspunkt, entsprechend der in der Mitte  $F$  von  $AE$  angreifend zu denkenden Cohäsionskraft um  $\frac{h}{2}$  unter der oberen Mauerfante  $B$  gelegen ist. Man hat folglich das Moment des ganzen Erddruckes in Bezug auf den Mauerfuß  $A$  durch

$$\begin{aligned} P \cdot AM &= \frac{h}{3} \frac{\gamma h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - q}{2} - \frac{h}{2} \frac{\gamma h h_0}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - q}{2} \\ &= \frac{\gamma h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - q}{2} \left( \frac{h}{3} - \frac{h_0}{2} \right). \end{aligned}$$

Dividirt man diese Gleichung durch den Werth von  $P$  in (7), so folgt für den Abstand des Erddruckes von  $A$ :

$$AM = a = \frac{h \left( \frac{h}{3} - \frac{h_0}{2} \right)}{h - h_0} = \frac{2h - 3h_0}{h - h_0} \frac{h}{6} \quad \dots \quad (9)$$

oder annähernd, wenn  $h_0$  klein gegen  $h$  ist,

$$a \sim \left( 1 - \frac{3}{2} \frac{h_0}{h} \right) \frac{h}{3} \quad \dots \quad (9a)$$

Durch die Cohäsion der Erdmasse wird also der active Erddruck verringert und der Angriffspunkt desselben tiefer gerückt. Für den Erdwiderstand erhält man den Abstand  $a'$  des Angriffspunktes vom Fußpunkte der Mauer, ebenso, wenn man die Zeichen von  $q$  und  $c$  umkehrt, und wieder

$$h' = \frac{4c}{\gamma \tan \frac{90^\circ + q}{2}}$$

setzt. Dadurch wird

$$P' a' = \frac{\gamma h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ + q}{2} \left( \frac{h}{3} + \frac{h'}{2} \right)$$

und

$$a' = \frac{2h + 3h'}{h + h'} \frac{h}{6} \quad \dots \quad (10)$$

oder annähernd:

$$a' \sim \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{h'}{h} \right) \frac{h}{3} \quad \dots \quad (10a)$$

Durch die Cohäsion wird also der passive Erddruck vergrößert und sein Angriffspunkt höher gerückt.

Beispiel. Man soll für eine Höhe von 5 m die Größe und den Angriffspunkt des Druckes einer Erdmasse bestimmen, deren Reibungswinkel  $40^\circ$ , und deren specifisches Gewicht  $\gamma = 2000$  kg beträgt, und welche sich, ohne nachzustoßen, 1,2 m hoch senkrecht abstecken läßt.

Ohne Rücksicht auf Cohäsion ist der active Erddruck für die Mauerfläche von 1 m Breite:

$$P = \frac{\gamma h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - q}{2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 2000}{2} \tan^2 25^\circ = 5435 \text{ kg},$$

und der passive Erddruck:







vertical abgestochen werden kann, indem für diesen Fall der active Erddruck gleich Null ausfällt.

Wenn die Höhe der Erdmasse größer ist, als dieser Werth  $h_0$ , so kann sich die Masse ohne Stützung nur halten, wenn sie unter einer bestimmten Böschung ansteigt, deren Betrag sich folgendermaßen bestimmen läßt. Es sei  $AB$ , Fig. 25 (a. v. S.), die vordere gegen den Horizont unter dem Winkel  $\alpha$  ansteigende ebene Fläche einer cohärenten Erdmasse, welche von dem Punkte  $B$  in der Höhe  $DB = h$  über dem Fuße aus durch eine ebene unter dem Winkel  $\omega$  gegen den Horizont geneigte Oberfläche begrenzt ist, wobei  $\omega$  den natürlichen Böschungswinkel  $\varrho$  nicht überschreiten soll, sonst aber ganz beliebig sein kann. Damit diese Masse im Gleichgewichte verharre, muß irgend ein keilförmiges Prisma  $ABE$  vom Gewichte  $G$  an dem Abgleiten auf der Ebene  $AE$  von der Länge  $l$  durch die Reibung daselbst und die Cohäsion  $C = lc$  verhindert werden. Man hat daher, unter  $\beta = EAD$  die Neigung dieser Gleitfläche verstanden, die Bedingung:

$$G \sin \beta = \varphi G \cos \beta + lc. \quad (1)$$

Für das Gewicht  $G$  kann man setzen:

$$G = \gamma \frac{AB \cdot AE}{2} \sin(\alpha - \beta) = \frac{\gamma}{2} \frac{h}{\sin \alpha} l \sin(\alpha - \beta),$$

und daher erhält man mit diesem Werthe aus (1)

$$\frac{\gamma}{2} \frac{h}{\sin \alpha} l \sin(\alpha - \beta) (\sin \beta - \varphi \cos \beta) = lc$$

oder

$$c = \gamma \frac{h}{2} \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \varphi)}{\sin \alpha \cos \varrho}. \quad (2)$$

Diese Gleichung muß bestehen, wie groß man auch die Neigung  $\beta$  der Gleitfläche annehmen möge, also muß für ein bestimmtes  $h$  und  $\alpha$  der Cohäsionsmodul  $c$  mindestens einen Werth gleich dem Maximum haben, welches der Gleichung (2) zukommt. Dieser größte Werth von  $c$  ergibt sich aus:

$$\frac{\partial c}{\partial \beta} = \sin(\alpha - \beta) \cos(\beta - \varphi) - \cos(\alpha - \beta) \sin(\beta - \varphi) = 0;$$

d. h. für  $\sin(\alpha + \varphi - 2\beta) = 0$ , woraus für das Prisma, welches die größte Tendenz zum Abgleiten hat,

$$\beta = \frac{\alpha + \varphi}{2}. \quad (3)$$

folgt, und zwar erhält man mit diesem Werthe von  $\beta$  aus (2) den Cohäsionsmodul:

$$c = \gamma \frac{h}{2} \frac{\sin^2 \frac{\alpha - \varphi}{2}}{\sin \alpha \cos \varrho}. \quad (4)$$

Die Gleitfläche  $AE$  halbirt also auch hier den Winkel  $BAO$ , welchen die vordere Ebene  $AB$  mit der natürlichen Böschung  $AO$  bildet, indem sie mit jeder dieser beiden Ebenen den Winkel

$$BAE = OAE = \frac{\alpha - \varphi}{2}$$

einschließt. Die durch (4) bestimmte Größe  $c$  muß der Cohäsionsmodul der Masse haben, wenn die Vorderfläche derselben bei einer Neigung  $\alpha$  gegen den Horizont die Höhe  $h$  erhalten soll, oder aber, die Höhe  $h$  darf bei gegebenen Werthen von  $c$  und  $\alpha$  die Größe

$$h = \frac{2c}{\gamma} \frac{\sin \alpha \cos \varrho}{\sin^2 \frac{\alpha - \varphi}{2}}. \quad (5)$$

nicht übersteigen.

Mit  $\alpha = 90^\circ$  erhält man wieder den schon oben gefundenen Werth:

$$h = \frac{2c}{\gamma} \frac{\cos \varrho}{\sin^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2}} = \frac{4c}{\gamma} \frac{\tan \frac{90^\circ + \varphi}{2}}{2} = h_0,$$

während man mit  $\alpha = \varphi$ ,  $h = \infty$  erhält. Da die Länge  $l = AE$  der Trennungsebene aus der Rechnung herausgefallen ist, so folgt, daß das Resultat von dieser Länge, d. h. also von der Neigung  $\omega$  der Oberfläche ganz unabhängig ist, so lange nur  $\omega$  nicht größer als  $\varrho$  ist, und so lange die obere ebene Begrenzung  $BO$  der Erdmasse sich hinreichend weit erstreckt, um den Punkt  $E$  zu enthalten, in welchem die Gleitlinie  $AE$  zu Tage tritt (s. weiter unten). Mit dem Werthe

$$h_0 = \frac{2c}{\gamma} \frac{\cos \varrho}{\sin^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2}}$$

und (5) erhält man auch:

$$\frac{h}{h_0} = \sin \alpha \frac{\sin^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha - \varphi}{2}}. \quad (6)$$

Hieraus oder aus (5) kann man jederzeit für einen gegebenen Neigungswinkel  $\alpha$  die Höhe  $h$  oder umgekehrt berechnen, je nachdem  $h_0$  oder  $c$  für die Erdmasse bekannt sind.

Hierzu dient folgende

Tabelle der Werthe von

$$\frac{h}{h_0} = \sin \alpha \frac{\sin^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha - \varphi}{2}}.$$

$\alpha =$	80°	70°	60°	50°	45°	40°	35°	30°
$\varphi = 45^\circ$	1,595	2,938	7,444	58,96	$\infty$			
$\varphi = 40^\circ$	1,504	2,511	5,130	18,01	66,38	$\infty$		
$\varphi = 35^\circ$	1,434	2,216	3,942	9,587	19,85	72,03	$\infty$	
$\varphi = 30^\circ$	1,379	2,008	3,232	8,351	10,38	21,16	75,37	$\infty$

Denkt man sich die Höhe  $h$  für jeden beliebigen Werth von  $\alpha$  aufgetragen, so erhält man als den geometrischen Ort für den oberen Endpunkt  $B$  der Böschung eine Parabel, deren Brennpunkt im Fußpunkte  $A$  liegt, und deren Axe unter dem natürlichen Böschungswinkel  $\varphi$  gegen den Horizont geneigt ist. Um dies zu erkennen, sei der Fußpunkt  $A$  als Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten gewählt, und die Axe  $AX$  unter dem Winkel  $\varphi = DAX$  gegen den Horizont angenommen. Dann ist:

$$AB = \frac{h}{\sin \alpha} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\sin(\alpha - \varphi) = \frac{BF}{AB} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

und

$$\cos(\alpha - \varphi) = \frac{AF}{AB} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Schreibt man nun die Gleichung (5)

$$\begin{aligned} \frac{h}{\sin \alpha} &= \frac{2c}{\gamma} \frac{\cos \varphi}{\sin \frac{\alpha - \varphi}{2} \cos \frac{\alpha - \varphi}{2} \tan \frac{\alpha - \varphi}{2}} \\ &= \frac{4c}{\gamma} \frac{\cos \varphi}{\sin(\alpha - \varphi)} \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{1 - \cos(\alpha - \varphi)} = \frac{4c}{\gamma} \frac{\cos \varphi}{1 - \cos(\alpha - \varphi)}, \end{aligned}$$

so erhält man mit obigen Werthen:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4c}{\gamma} \cos \varphi \frac{1}{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \frac{4c}{\gamma} \cos \varphi \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - x},$$

oder

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + \frac{4c}{\gamma} \cos \varphi;$$

woraus

$$y^2 = 2 \frac{4c}{\gamma} \cos \varphi \left( x + \frac{2c}{\gamma} \cos \varphi \right) \dots \dots \dots (7)$$

Diese Gleichung gilt offenbar für eine Parabel, deren Brennpunkt in  $A$  gelegen, und deren Scheitel um  $AS = \frac{2c}{\gamma} \cos \varphi$  von  $A$  in der Richtung der natürlichen Böschung entfernt ist. Da die Tangente der Parabel den Winkel zwischen der Axe und dem an ihren Berührungspunkt gezogenen Brennstrahl halbt, so folgt ferner nach dem Vorstehenden, daß die einer Begrenzung  $AB$  des Terrains entsprechende Gleitfläche  $AE$  mit der Tangente der Parabel in  $B$  parallel ist.

Aus den bekannten Eigenschaften der Parabel ergibt sich nun leicht, wie man in jedem Falle die zu einem gegebenen Neigungswinkel  $\alpha$  der Böschung gehörige Höhe  $h$  derselben construiren kann. Zu dem Ende macht man  $AH = \frac{4c}{\gamma}$  und zieht  $HJ$  senkrecht zur natürlichen Böschung  $AF$ , um in

$AJ = \frac{4c}{\gamma} \cos \varphi$  den Parameter und in  $JH$  die Directrix der betreffenden

Parabel zu finden. Für irgend einen Böschungswinkel  $DAB = \alpha$  hat man demnach nur den Winkel  $BAJ$  durch  $AL$  zu halbiren und von dem Durchschnittspunkte  $L$  der Halbierungslinie mit der Directrix eine Parallele  $LB$  zur natürlichen Böschung zu ziehen, um in dem Durchschnitte  $B$  den Endpunkt der Böschung zu erhalten, da dieser auf der gedachten Parabel liegt, weil das Dreieck  $ALB$  wegen der Gleichheit der Winkel bei  $A$  und  $L$  gleichschenkelig ist.

Ebenso findet man für eine gegebene Höhe  $h$  den Böschungswinkel  $\alpha$ , wenn man in der Höhe  $h$  über  $AD$  eine Horizontale zieht, und deren Durchschnittspunkt  $B$  mit der Parabel durch eine Gerade  $BA$  mit dem Brennpunkte der Parabel verbindet.

Wenn von der Erdmasse nur der natürliche Böschungswinkel  $\varphi$  gegeben, der Cohäsionscoefficient  $c$  aber noch unbekannt ist, so kann man den letzteren leicht finden, sobald man durch Beobachtung festgestellt hat, bis zu welcher Höhe  $h = BD$  sich die Erdmasse bei einem beliebigen Böschungswinkel  $BAD = \alpha$  noch abgraben läßt, ohne einzustürzen. Zu dem Ende hat man nur mit dem Halbmesser  $BA$  um  $B$  den Kreis  $R$  zu beschreiben und an denselben die zur natürlichen Böschung  $AO$  senkrechte Tangente  $LJ$  zu ziehen, um darin die Directrix der betreffenden Parabel und in  $AJ$  den Werth  $\frac{4c}{\gamma} \cos \varphi$  zu erhalten. Zu demselben Werthe gelangt man auch, wenn

man nach Eulmann  $AM = AB$  auf der Linie der natürlichen Böschung  $AO$  anträgt, und  $BF$  senkrecht zu  $AO$  zieht. Dann ist:

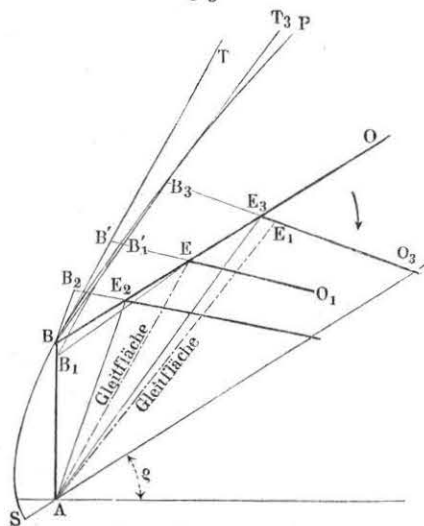
$$MN = AH = \frac{4c}{\gamma},$$

wenn  $MN$  horizontal gezogen wird.



tangente  $BT$  festgelegt. Man denke sich nunmehr die Ebene  $EO$  um die zur Bildebene in  $E$  senkrechte Gerade, wie um eine Axe im Sinne des Pfeiles herumgedreht, wobei die Begrenzung von  $B$  bis  $E$  aber ihre Lage beibehalten soll, so gelangt man offenbar zu dem vorstehend betrachteten Falle eines gebrochenen Profils. Nimmt man jetzt die oben angegebene Dreiecksverwandlung vor, so wird die Spitze  $B'$  des verwandelten Dreiecks, da  $AE$  parallel der Tangente  $BT$  ist, immer auf dieser Tangente  $BT$ , also außerhalb der Parabel verbleiben, wie weit man auch die Ebene  $EO$  um  $E$  gedreht hat. Die Böschung, welche für die Ebene  $BEO$  im

Fig. 27.



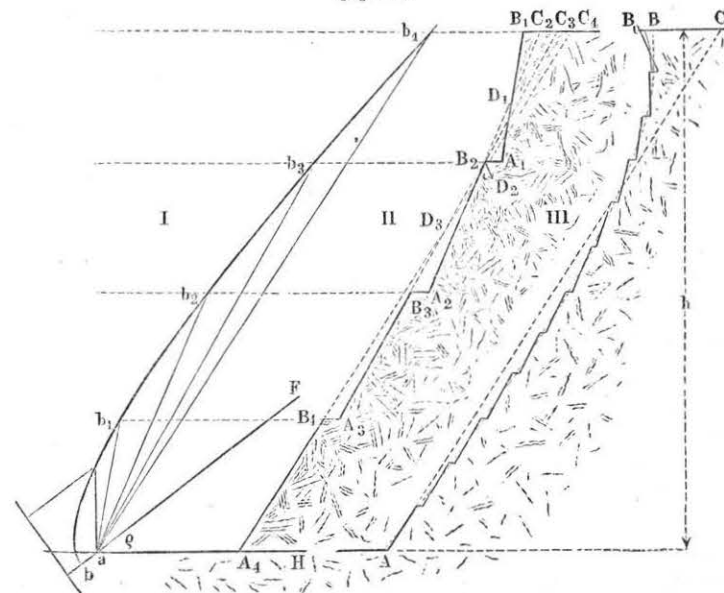
erlangen. Es leuchtet ohne Weiteres ein, daß eine Verminderung der Stabilität und zwar in noch höherem Maße eintreten muß, wenn man als Drehaxe für die obere Begrenzungsebene einen Punkt wie  $E_2$  wählt, welcher tiefer gelegen ist als  $E$ , da dann die Spitze  $B_2$  des Verwandlungsdreiecks auf einer Geraden  $BB_2$  liegt, welche mit  $AE_2$  parallel ist, also von der Parabel noch weiter nach außen sich entfernt, als die Tangente  $BT$ .

Denkt man andererseits den Drehpunkt für die Begrenzungsebene von  $E$  nach oben hin, etwa nach  $E_3$  versetzt, so erhält man als geometrischen Ort für die Spitze des Verwandlungsdreiecks die Gerade  $BB_3$  parallel mit  $AE_3$ , welche, da sie flacher ist als die Tangente in  $B$ , offenbar die Parabel außer in  $B$  noch in einem zweiten Punkte  $B_3$  schneidet. Denkt man sich die obere Begrenzungsebene aus der Lage  $E_3O$  bis in die Lage  $E_3O_3$  gedreht, welche durch den besagten Schnittpunkt  $B_3$  geht, so wandert dabei die Spitze des

Grenzzustandes des Gleichgewichtes sich befand, wird daher aufhören, stabil zu sein, sobald die Ebene  $EO$  sich um den geringsten Betrag dreht, oder mit anderen Worten, die Böschung stürzt beim ersten Spatenstiche, welcher bei  $E$  gemacht wird, zusammen. Wollte man z. B. für die Lage der oberen Begrenzung  $EO_1$  die Böschung stabil erhalten, so hätte man durch den Schnittpunkt  $B_1'$  mit der Parabel die zu  $AE$  parallele Gerade  $B_1'B_1$  zu ziehen, um in  $AB_1EO_1$  das erforderliche Profil zu

Verwandlungsdreiecks auf der Geraden  $BB_3$  von  $B$  bis  $B_3$ , verbleibt also fortwährend innerhalb der Parabel. Daher wird während der betrachteten Drehung der Ebene von  $E_3O$  nach  $E_3O_3$  die Stabilität der Böschung nicht gefährdet, und in der Lage  $E_3O_3$  tritt der oben erwähnte Fall ein, daß gleiche Gefahr vorhanden ist für ein Abgleiten des dreieckigen Prismas  $ABE$  auf der Gleitfläche  $AE$  parallel der Tangente  $BT$  in  $B$ , und des vierseitigen Prismas  $ABE_3E_1$  auf der Gleitfläche  $AE_1$  parallel der Tangente  $B_3T_3$  in  $B_3$ . Bei einer weiteren Drehung der Ebene  $E_3O$  über  $O_3$  hinaus tritt die Spitze des Verwandlungsdreiecks wieder aus der Parabel hinaus, so daß die Stabilität der Böschung dadurch ebenfalls gefährdet wird, und in der schon angegebenen Weise durch eine Verminderung der Höhe  $AB$  einem Einstürzen vorgebeugt werden muß.

Fig. 28.



Die mehrerwähnte Parabel kann auch dazu dienen, für gebrochene oder gekrümmte Böschungsprofile, wie man sie in Einschnitten häufig anwendet, die Verhältnisse zu ermitteln. Denkt man sich nämlich die Aufgabe gestellt, daß ein Einschnitt von der Höhe  $AB$ , Fig. 25, in einem Boden von bekannter Cohäsion  $c$  hergestellt werden soll, so kann man nach den oben angegebenen Gleichungen den dieser Höhe  $h$  zugehörigen Böschungswinkel  $\alpha$  ermitteln, und danach den geradlinig begrenzten Einschnitt feststellen. Gesezt dieser Winkel wäre zu  $HA_4C_4$  gefunden, Fig. 28, II, also die



Böschung durch  $A_4 C_4$  festgestellt. Man erkennt nun sogleich, daß, während in dem untersten Punkte  $A_4$  die Böschung der Stabilität halber nicht steiler sein darf, doch für jeden darüber liegenden Punkt, wie  $B_3$ ,  $B_2$  u. s. w., die gefundene Böschung  $A_4 C_4$  unnötigerweise flach ist, und daß die Begrenzung der Erdmasse an irgend welcher Stelle um so steiler gemacht werden darf, je höher diese Stelle gelegen, d. h. je geringer die darüber befindliche Erdmasse ist. Dächte man sich ein Profil von solcher Art, daß an jeder Stelle gerade derjenige Böschungswinkel vorhanden ist, welcher bei der betreffenden Höhenlage aus Stabilitätsrücksichten noch möglich ist, so würde offenbar in allen Theilen die Cohäsion der Erdmasse in gleichem Maße in Anspruch genommen, in ähnlicher Art etwa, wie es bei den Körpern gleichen Widerstandes auch der Fall ist. Um ein solches Profil wenigstens annähernd zu zeichnen, sei in Fig. 28, I zur Axe  $aF$ , welche mit dem Horizonte den Winkel  $\varphi$  bildet, in oben angegebener Art die Parabel  $bb_1b_2 \dots$  entworfen, deren Entfernung zwischen dem Brennpunkte  $a$  und dem Scheitel  $b$  zu  $\frac{2c}{\gamma} \cos \varphi$  anzunehmen ist. Theilt man nun die ganze Höhe  $h$  des Einschnittes in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (in der Figur vier), und legt durch die Theilpunkte die Horizontalen  $B_1b_1$ ,  $B_2b_2 \dots$ , so erhält man, wie leicht ersichtlich ist, in den von unten nach oben folgenden Brennstrahlen  $ab_1$ ,  $ab_2$ ,  $ab_3 \dots$  der Parabel die Neigungen für die Böschungen, welche den von oben nach unten folgenden Sectionen  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3 \dots$  zugehören. Zeichnet man daher zunächst  $B_1A_1$  parallel  $ab_1$ , so erhält man die Begrenzung des Profils für die oberste Section, bei welcher in dem tiefsten Punkte  $A_1$  noch Stabilität vorhanden ist. Die Begrenzung  $B_2A_2$  der zweiten Section ist ebenso parallel mit  $b_2a$  vorzunehmen, doch darf diese Begrenzung nicht an  $A_1$  angeschlossen, sondern sie muß so angeordnet werden, daß die Verlängerung von  $A_2B_2$  das Terrain in einem Punkte  $C_2$  trifft, derartig, daß die beiden Dreiecke  $B_1D_1C_2$  und  $B_2A_1D_1$  einander flächengleich sind. In diesem Falle wird nämlich die Böschung  $B_2A_2$  in Wirklichkeit durch die Erdmasse  $B_1A_1B_2A_2$  genau so stark belastet, als wenn die Masse durch die Ebene  $A_2C_2$  begrenzt wäre, d. h. also so, wie es die Neigung  $B_2A_2$  verträgt. Es ist aus der Figur ersichtlich, daß in dem Falle, wo die Begrenzung des Banketts  $A_1B_2$  parallel zu der Terrainsfläche  $BB_1$  genommen wird, die beiden gedachten Dreiecke  $B_1C_2D_1$  und  $A_1B_2D_1$  gleich groß werden, sobald der Durchschnittspunkt  $D_1$  in die Mitte von  $A_1B_1$  fällt. In ganz derselben Weise schließt man nun weiter, daß die Begrenzung  $B_3A_3$  der folgenden Section parallel dem folgenden Brennstrahle  $b_3a$  und so angenommen werden muß, daß die Dreiecke  $A_2B_3D_2$  und  $C_2C_3D_2$  gleich groß werden, und ebenso ist  $B_4A_4$  parallel mit  $b_4a$  zu ziehen, so daß das Dreieck  $A_3B_4D_3$  gleich demjenigen  $C_3C_4D_3$  wird.

Es ergibt sich ohne Weiteres, daß die Banketts hierbei um so geringere Breite erlangen, je niedriger man die Höhe der einzelnen Sectionen annimmt, und daß bei hinreichend großer Anzahl von Sectionen das gebrochene Profil sich dem curvenförmigen Profile gleichen Widerstandes nähert. In Fig. III ist dieselbe Construction für 12 Sectionen wiederholt und die Curve eines Profils von gleichem Widerstande punktirt eingezeichnet. Daß diese Curve oben bei  $B_0$  überhängt und sich der Theorie zufolge asymptotisch an die Horizontale anschließen müßte, hat kein praktisches Interesse, man wird vielmehr das Profil in dem oberen Theile bei  $B$  vertical begrenzen.

Es ist aus der Figur auch ersichtlich, in welchem Betrage man durch Anwendung eines derartigen gebrochenen oder gekrümmten Profils das Erforderniß des von dem Einschnitte beanspruchten Terrains ermäßigt, indem offenbar  $B_1C_4$  in II oder  $BC$  in III diejenige Terrainbreite darstellt, welche durch das gebrochene bzw. gekrümmte Profil im Vergleiche mit dem geradlinig begrenzten  $A_4C_4$  erspart wird. Daß die zur Herstellung des Einschnittes zu bewegenden Erdmassen dagegen in beiden Fällen gleich groß sind, geht aus dem Obigen hervor.

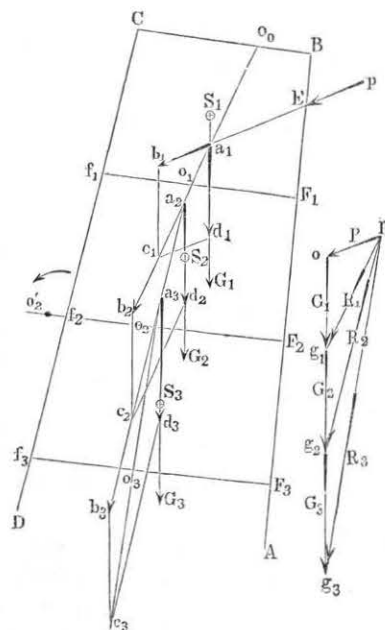
**Futtermauern.** Zur Stützung von Erdmassen, welche steilere Neigungen gegen den Horizont haben, als die natürliche Böschung ist, dienen die Futtermauern, welche bei Dammschüttungen, Einschnitten, Canalbauten u. s. w. vielfach zur Anwendung kommen. Der Erddruck gegen die Futtermauer ist bestrebt, dieselbe zur Seite zu drängen, sei es durch Verschiebung oder Drehung, und es muß daher die Futtermauer in beiden Hinsichten die genügende Widerstandsfähigkeit haben. Hierbei kann die Mauer lediglich vermöge ihres Eigengewichtes widerstehen, durch welches einerseits eine genügende Reibung der Mauer auf ihrem Untergrunde erzeugt wird, um eine Verschiebung zu hindern, und andererseits ein Kraftmoment rege gemacht wird, welches dem umstürzenden Momente des Erddruckes das Gleichgewicht zu halten vermag. Bestände die Futtermauer aus einem einzigen zusammenhängenden Stücke von hinreichender Festigkeit, so würde es genügen, die Bedingungen des Gleichgewichtes nur für die Grundfläche der Mauer zu erfüllen, in welcher sie den Boden berührt; wegen der Zusammensetzung der Mauer aus einzelnen Steinen, welche durch den Mörtel meist nur lose verbunden sind, wird man aber auch darauf zu rücksichtigen haben, daß möglicher Weise eine Trennung der Mauer in den einzelnen Fugen durch den Erddruck herbeigeführt werden kann. Denkt man sich durch irgend eine Lagerfuge die Mauer getrennt, und vereinigt alle äußeren Kräfte, welche auf den oberhalb dieser Fuge gelegenen Theil wirken, zu einer Resultirenden  $R$ , so ist zum Gleichgewichte erforderlich, daß diese Mittelkraft diesen Fugenschnitt selbst innerhalb der Mauer trifft, und daß sie mit der Normalen



der Schnittebene einen Winkel bildet, welcher kleiner ist als der Reibungswinkel für die Theile des Mauerwerkes auf einander. Wenn die Mittelkraft nämlich die Ebene der Lagerfuge außerhalb der Mauer treffen würde, so müßte ein Umkippen des betreffenden oberen Mauertheiles erfolgen, während eine Abweichung der Mittelkraft von der normalen Richtung um einen größeren als den Reibungswinkel ein Fortschieben des oberen Mauertheiles über den unteren zur Folge haben würde, vorausgesetzt, daß man von der Cohäsion des Mörtels absieht. Es wird zwar in den meisten Fällen der Anwendung der unterste Querschnitt, d. h. die Grundfläche der Mauer am meisten gefährdet sein, auch wird in der Regel das Umkippen früher eintreten, als das Fortschieben, doch können auch Ausnahmen hiervon stattfinden, so daß jedenfalls eine dementsprechende Prüfung nöthig ist.

Hierzu bietet die sogenannte Widerstandslinie oder Mittellinie des Druckes, auch Stützl原因 genannt, ein geeignetes Mittel. Man versteht hierunter diejenige Linie, welche man erhält, wenn man für sämtliche Fugen die Angriffspunkte der auf dieselben wirkenden Kräfte durch eine stetige Linie mit einander verbindet. Es sei etwa ein Mauerkörper  $ABCD$ , Fig. 29, welcher in  $E$  von einer Kraft  $P$  angegriffen wird, durch die Fugen-

Fig. 29.



schnitte  $F_1, F_2, F_3$  in einzelne Theile zerlegt, deren Gewichte  $G_1, G_2, G_3$  etc. in ihren Schwerpunkten  $S_1, S_2, S_3$  ... wirksam zu denken sind. Eine Vereinigung der Kraft  $P$  mit dem Gewichte  $G_1$  des obersten Steines durch das Parallelogramm der Kräfte  $a_1 b_1 c_1 d_1$  liefert in  $a_1 c_1$  die Mittelkraft  $R_1$ , welche die Fuge  $F_1$  in  $o_1$  trifft. Vereint man weiter die Mittelkraft  $R_1$  mit dem Gewichte  $G_2$  des zweiten Steines durch das an den Durchschnitte  $a_2$  beider angetragene Parallelogramm  $a_2 b_2 c_2 d_2$ , so erhält man in  $R_2 = a_2 c_2$  die Mittelkraft aller Kräfte, welche auf den oberhalb der Fuge

$F_2$  gelegenen Mauerkörper wirken, d. h. die Mittelkraft von  $P$  und  $G_1 + G_2$ , und in  $o_2$  den Angriffspunkt dieser Kraft in der Fuge  $F_2$ . Führt man diese Construction durch Zusammensetzung der Kraft  $R_2$  mit  $G_3$  fort, so erhält man in  $o_3$  den Angriffspunkt der Mittelkraft  $R_3$  von  $P, G_1, G_2$  und  $G_3$  in der Fuge  $F_3$  u. s. w. Eine Verbindung je zweier auf einander folgender Punkte durch gerade Linien liefert das Polygon  $o_0 o_1 o_2 o_3 \dots$ , welches in eine stetige Curve, nämlich die besagte Mittellinie des Druckes übergeht, sobald man die Fugen unendlich nahe an einander liegend voraussetzt. Es ist übrigens klar, daß man nicht nöthig hat, die einzelnen Parallelogramme wirklich zu construiren, denn wenn man aus den einzelnen Kräften  $P, G_1, G_2, G_3 \dots$  das Kräftepolygon  $p o g_1 g_2 g_3 \dots$  zeichnet, so erhält man in  $p g_1, p g_2, p g_3 \dots$  der Größe und Richtung nach die Mittelkräfte  $R_1, R_2, R_3 \dots$ , mit denen man bezw.  $a_1 c_1, a_2 c_2, a_3 c_3 \dots$  parallel zu ziehen hat.

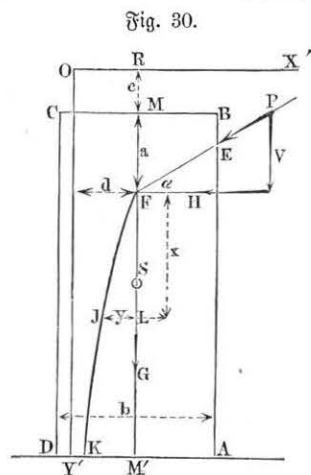
Damit also die Mauer in jedem Querschnitte hinreichende Sicherheit gegen Umkippen darbiete, muß diese Widerstandslinie in ihrem ganzen Verlaufe innerhalb des Mauerkörpers verbleiben, denn es ist leicht ersichtlich, daß ein Umstürzen des oberen Mauertheiles durch eine Linksdrehung um den Punkt  $f_2$  der Fuge  $F_2$  erfolgen würde, wenn die Stützl原因 diese Fuge in einem Punkte  $o_2'$  außerhalb der Mauer treffen sollte. Als äußerste mit dem Gleichgewichte noch verträgliche Grenzlage für den Punkt  $o_2$  hätte man daher die Kante  $f_2$  anzusehen, wenn die Mauer aus absolut festem Material bestände, welches einer Zerbröckelung durch den darauf wirkenden Druck nicht unterworfen wäre. Da aber das Baumaterial nur einen gewissen erfahrungsmäßig zu bestimmenden Druck gestattet, ohne zerstört zu werden, so wird die Mittelkraft in keiner Fuge durch die äußerste Kante gehen dürfen, sondern von dieser Kante so weit zurückstehen müssen, daß der Druck sich auf eine genügend große Fläche vertheilt, wie dies im Folgenden noch näher erläutert werden soll. Damit ferner ein Abgleiten in keiner Fuge stattfinde, ist es, wie schon erwähnt, nöthig, daß in irgend welchem Punkte der Mittellinie des Druckes die Richtung der Kraft von der Normalen zur Druckfläche um weniger als den Reibungswinkel abweicht.

Der für die Sicherheit gegen Verschieben gefundenen Bedingung wird bei der beträchtlichen Größe des Reibungswinkels zwischen Mauerwerk in der Regel leicht genügt werden können, auch hat man in einer entsprechenden Neigung der Lagerfugen gegen den Horizont ein Mittel, um den besagten Abweichungswinkel zwischen der Mittelkraft und der Normalen immer hinreichend klein zu halten.

Es muß hierbei bemerkt werden, daß die Richtung der Mittelkraft in irgend welchem Punkte der Stützl原因  $o_0 o_1 o_2 \dots$  keineswegs mit der Tangente der Stützl原因 daselbst zusammenfällt, da z. B. die Richtung der Kraft

in  $o_1$  nicht durch  $o_1 o_2$ , sondern durch  $a_1 c_1$  gegeben ist. Es hüllen vielmehr die Kraftrichtungen  $a_1 c_1, a_2 c_2, a_3 c_3 \dots$  eine gewisse andere Curve ein von der Beschaffenheit, daß die Tangente  $oa$  an diese Curve von einem beliebigen Punkte  $o$  der Stützlinie aus die Druckrichtung in diesem Punkte  $o$  der Stützlinie angiebt. Diese Linie  $a_1, a_2, a_3 \dots$ , welche etwa einem in den Eckpunkten  $a$  durch die Gewichte  $G$  belasteten Seilpolygone und bei unendlich kleinen Abständen einer Kettenlinie entspricht, wird gewöhnlich die Drucklinie, von Scheffler auch die Richtungslinie des Druckes genannt.

Die Form der Stütz- oder Widerstandslinie hängt, wie aus dem Vorhergehenden ohne Weiteres ersichtlich ist, wesentlich von der Art der Beanspruchung der Mauer durch äußere Kräfte, wie auch von der Vertheilung der Gewichte, d. h. von der Profilform der Mauer ab. Nimmt man etwa ein 1 m langes Stück einer verticalen parallelepipedischen Mauer  $ABCD$  von der Breite  $b$ , Fig. 30,



an, und setzt voraus, dasselbe werde in einem Punkte  $E$  durch eine unter dem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont wirkende Kraft  $P$  angegriffen, so sei die Mittellinie des Druckes durch die Curve  $FJK$  dargestellt. Für irgend eine horizontale Fuge  $LJ$  in der Tiefe  $x = FL$  unter dem Durchschnittpunkte  $F$  der Kraft  $P$  und des Mauer Gewichtes  $G$  sei der Abstand der Stützlinie von der Mittellinie  $MM'$  durch  $JL = y$  ausgedrückt. Es muß dann für den Punkt  $J$  als Momentenmittelpunkt die Gleichung bestehen

$$P \cos \alpha \cdot x = P \sin \alpha \cdot y + G \cdot y \quad (1)$$

wenn  $G$  das Gewicht des oberhalb  $JL$  gelegenen Mauertheiles  $ML$  bedeutet. Ist nun  $\gamma_1$  das spezifische Gewicht des Mauerwerkes, und wird die Höhe  $MF = a$  gesetzt, so hat man

$$G = \gamma_1 b (a + x),$$

mit welchem Werthe obige Gleichung übergeht in

$$P \cos \alpha \cdot x = P \sin \alpha \cdot y + \gamma_1 b (a + x) y \quad (2)$$

Denkt man noch die horizontale und verticale Componente von  $P$  durch Mauermaassen von der Breite  $b$  und den Höhen  $d$  und  $c$  ersetzt, indem man

$$P \cos \alpha = H = \gamma_1 b d \text{ und } P \sin \alpha = V = \gamma_1 b c$$

setzt, so erhält man auch

$$\gamma_1 b d \cdot x = \gamma_1 b c \cdot y + \gamma_1 b (a + x) y$$

oder

$$x d = (c + a + x) y \quad (3)$$

Diese Gleichung vereinfacht sich, wenn man den Coordinatenanfang für die Ordinaten  $x'$  und  $y'$  von  $F$  nach  $O$  verlegt, so daß

$$FR = a + c \text{ und } OR = d$$

gewählt wird, also

$$x' = c + a + x \text{ und } y' = d - y$$

zu setzen ist. Hiermit erhält man aus (3) die Gleichung

$$x' d - (c + a) d = x' (d - y')$$

oder

$$x' y' = d (c + a) \quad (4)$$

welche Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel entspricht, für welche  $OX'$  und  $OY'$  die Asymptoten sind. Man ersieht hieraus, daß der Abstand der Stützlinie von der Mitte der Mauer stets kleiner als  $d = \frac{P \cos \alpha}{b \gamma_1}$  bleibt, wie hoch auch die Mauer sein möge, indem erst für  $x' = \infty, y = d$  wird. Die Stützlinie wird daher für jede beliebige Höhe noch im Innern der Mauer verbleiben, sobald man die Breite der Mauer aus

$$\frac{b}{2} = d = \frac{P \cos \alpha}{b \gamma_1}$$

zu

$$b = \sqrt{\frac{2 P \cos \alpha}{\gamma_1}} \quad (5)$$

annimmt.

Wenn dagegen die Mauer nicht, wie ein Pfeiler, einer isolirten Kraft in einem Punkte, sondern dem über ihre ganze Fläche vertheilten Drucke einer Flüssigkeit oder einer Erdmasse ausgesetzt ist, so ermittelt sich die Stützlinie durch die folgende Betrachtung. Wählt man für die verticale parallelepipedische Mauer  $ABCD$ , Fig. 31 (a. f. S.), die Mittellinie  $OM$  als  $X$  Achse und  $O$  als Anfangspunkt rechtwinkliger Coordinaten, so wirkt auf das Mauerstück  $COL$  von der Höhe  $OL = x$  außer dem Eigengewichte  $G = \gamma_1 b x$ , der auf die Fläche  $BF$  vertheilte Druck der Flüssigkeit oder Erdmasse. Bei einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte  $\gamma_0$  ist die resultirende Druckkraft bekanntlich durch  $P = \gamma_0 \frac{x^2}{2}$  gegeben, welche Kraft in einem Abstände

$FE = \frac{x}{3}$  von der Fuge  $F$  wirkt. Bei einer Erdmasse ist dieser Druck

außer vom spezifischen Gewichte  $\gamma$  noch von der Neigung der Oberfläche und dem Böschungswinkel abhängig. Im Allgemeinen läßt sich nach §. 8 der Erddruck durch  $P = \frac{k\gamma x^2}{2}$  ausdrücken, wenn  $k$  eine nach Gleichung (9) in §. 8 sich ergebende Größe bedeutet, welche von den dort eingeführten Winkeln  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  und  $\varphi'$  abhängig, für einen bestimmten Fall aber für alle Punkte der Erdmasse constant ist. Der Angriffspunkt dieser Kraft liegt ebenfalls wie der Wasserdruck in der Höhe  $FE = \frac{x}{3}$  über der betrachteten Fuge. Sieht man von der schrägen Richtung des Erddruckes gegen die Mauerfläche ab, und setzt den normalen Erddruck  $P = \frac{k\gamma}{2} x^2$ , so geht für den Punkt  $J$  der Stützlinie die Gleichung

$$P \frac{x}{3} = Gy$$

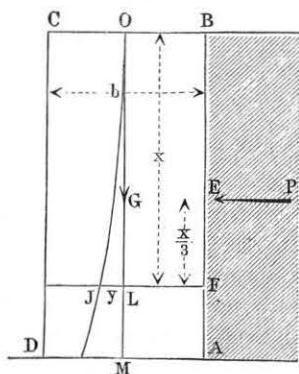
über in

$$\frac{k\gamma x^3}{2 \cdot 3} = \gamma_1 bxy$$

oder

$$x^2 = 6 \frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{b}{k} y \quad \dots \quad (6)$$

Fig. 31.



welche Gleichung einer Parabel angehört, für deren Scheitel  $O$  die Mittellinie  $OM$  die Tangente ist. Für Wasser würde  $k = 1$  und  $\gamma = 1000 \text{ kg}$  ausfallen, während man z. B. für Erde mit dem Reibungswinkel  $\varphi$  bei horizontaler Oberfläche ( $\omega = 0$ ) und unter Vernachlässigung der Reibung an der Wandfläche, also für  $\varphi_1 = 0$ , nach §. 8

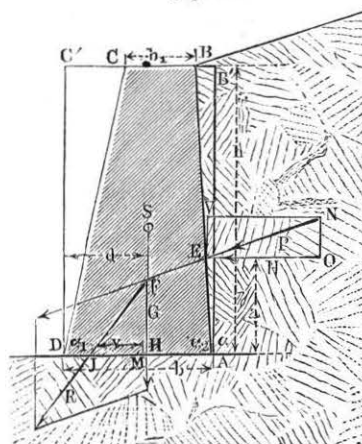
$$k = \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2}$$

zu setzen hätte u. f. w.

§. 12. **Kippen der Futtermauern.** Die Stabilität einer Futtermauer gegen Umsturz erfordert nach dem Vorstehenden, daß die Widerstandslinie innerhalb der Mauer und zwar der genügenden Sicherheit halber in gewisser Entfernung von der äußeren Mauerfläche verbleibe. Man pflegt der Construction daher meistens einen gewissen Sicherheits- oder Stabilitätscoefficienten  $\sigma$ , welcher meist zwischen 2 und 3 liegend angenommen

wird, zu Grunde zu legen, derart, daß das durch den Erddruck erzeugte Umsturzmoment den  $\sigma$ -fachen Betrag würde annehmen müssen, bevor die Stütz-

Fig. 32.



linie eine horizontale Lagerfuge  $AD$ , Fig. 32, in der äußeren Kante  $D$  treffen würde. Um dementsprechend die Dimensionen einer Futtermauer zu bestimmen, sei  $ABCD$  der verticale Durchschnitt einer Stützmauer von der lothrechten Höhe  $h$  und einer Länge gleich 1 m, deren untere Breite  $AD = b$  sei. Die vordere Fläche  $CD$  sei unter der Neigung

$$v_1 = \cotg \alpha_1$$

und die hintere Fläche  $AB$  unter derjenigen

$$v_2 = \cotg \alpha_2$$

gegen die Verticale gerichtet. Man hat dann die obere Breite  $BC$

$$b_1 = b - (v_1 + v_2) h,$$

und es ist, unter  $\gamma_1$  das spezifische Gewicht des Mauerwerkes verstanden, das Gewicht  $G$  des betrachteten Mauerkörpers durch

$$G = \gamma_1 \frac{b + b_1}{2} h = \gamma_1 \left( b - \frac{v_1 + v_2}{2} h \right) \quad \dots \quad (1)$$

gegeben. Dieses im Schwerpunkte  $S$  des Querschnittes angreifende Gewicht geht nur bei einem symmetrischen Profile, d. h. für  $v_1 = v_2$ , durch die Mitte  $M$  der Basis, während im Allgemeinen der Schwerpunkt  $S$  seitwärts der Mittellinie gelegen ist. Man erhält das Moment  $M = Gd$  des Gewichtes in Bezug auf die äußere Kante  $D$ , wenn man die Momente der beiden Dreiecke  $DCC'$  und  $ABB'$  von demjenigen des Rechteckes  $AB'C'D$  abzieht, durch

$$M = Gd = \gamma_1 b h \frac{b}{2} - \gamma_1 \frac{v_1 h^2}{2} \frac{v_1 h}{3} - \gamma_1 \frac{v_2 h^2}{2} \left( b - \frac{v_2 h}{3} \right)$$

§<sup>11</sup>

$$M = \gamma_1 b h \frac{b - v_2 h}{2} - \gamma_1 h^3 \frac{v_1^2 - v_2^2}{6} \quad \dots \quad (2)$$

Es möge nun  $P$  der nach dem Vorstehenden zu bestimmende, unter dem Winkel  $\delta$  gegen den Horizont auf die Mauerfläche  $AB$  wirkende Erddruck sein, dessen Angriffspunkt  $E$  in verticaler Richtung um die Höhe  $a$  über

dem Fußpunkte  $A$  gelegen ist, so zerlegt man diesen Erddruck in seine horizontale und verticale Componente

$$H = P \cos \delta \text{ und } V = P \sin \delta.$$

Unter der Voraussetzung eines Sicherheitscoefficienten gleich  $\sigma$  muß nun das Moment der Kraft  $\sigma P$ , welche in  $E$  wirkend gedacht wird, in Bezug auf den Punkt  $D$  ein Moment gleich demjenigen  $M$  des Mauergewichtes haben. Man hat also für diese Voraussetzung

$$M = \sigma H a - \sigma V (b - v_2 a). \quad (3)$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich dem in (2) gefundenen, so erhält man für  $\sigma$  den Ausdruck

$$\sigma = \gamma_1 h \frac{b \frac{b - v_2 h}{2} - h^2 \frac{v_1^2 - v_2^2}{6}}{H a - V (b - v_2 a)} \quad (4)$$

mittels welcher Gleichung man für eine gegebene Futtermauer den zugehörigen Stabilitätscoefficienten  $\sigma$  bestimmen kann.

Wenn es sich umgekehrt darum handelt, für einen bestimmten Stabilitätscoefficienten und bestimmte Neigungsverhältnisse  $v_1$  und  $v_2$  die erforderliche untere Breite  $b$  zu finden, so schreibe man die Gleichung (4)

$$\frac{\sigma}{\gamma_1 h} H a - \frac{\sigma}{\gamma_1 h} V (b - v_2 a) = \frac{b^2}{2} - \frac{b}{2} v_2 h - h^2 \frac{v_1^2 - v_2^2}{6},$$

also

$$b^2 + b \left( \frac{2 \sigma V}{\gamma_1 h} - v_2 h \right) = \frac{2 \sigma}{\gamma_1 h} (H a + V v_2 a) + h^2 \frac{v_1^2 - v_2^2}{3}.$$

Schreibt man diese Gleichung der Kürze wegen  $b^2 + b \cdot 2m = n$ , so erhält man

$$b = -m + \sqrt{n + m^2} \quad (5)$$

worin

$$m = \frac{\sigma}{\gamma_1 h} V - \frac{v_2 h}{2} \quad (6)$$

und

$$n = \frac{2 \sigma}{\gamma_1 h} (H + V v_2) a + h^2 \frac{v_1^2 - v_2^2}{3} \quad (7)$$

zu setzen ist.

In diesen Formeln hat man für eine vertical stehende Futtermauer von überall gleicher Stärke, Fig. 33,  $v_1 = v_2 = 0$  und  $G = \gamma_1 b h$ , sowie  $d = \frac{b}{2}$  zu setzen, und erhält damit

$$\sigma = \frac{\gamma_1 h}{2} \frac{b^2}{H a - V b} \quad (4^a)$$

und

$$b = -\frac{\sigma}{\gamma_1 h} V + \sqrt{\frac{2 \sigma}{\gamma_1 h} H a + \left( \frac{\sigma V}{\gamma_1 h} \right)^2} \quad (5^a)$$

Häufig führt man die Futtermauern nach der Seite der Erdmasse hin überhängend aus, Fig. 34, wobei sie dem Erddrucke besser widerstehen; in diesem Falle hat man, wenn die Mauer überall von gleicher Stärke, also

Fig. 33.

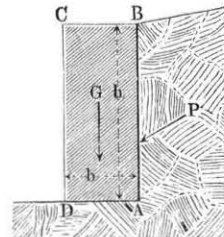
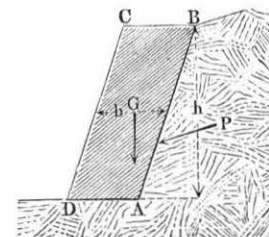


Fig. 34.



mit parallelen Wandflächen von der Neigung  $\cotg \alpha_1 = v$  ausgeführt ist, in vorstehenden Formeln  $v_1 = v$  und  $v_2 = -v$  zu setzen und erhält damit

$$\sigma = \frac{\gamma_1 h b}{2} \frac{b + v h}{H a - V (b + v a)} \quad (4^b)$$

und

$$b = -\frac{\sigma V}{\gamma_1 h} - \frac{v h}{2} + \sqrt{\frac{2 \sigma}{\gamma_1 h} (H a - V v a) + \left( \frac{\sigma V}{\gamma_1 h} + \frac{v h}{2} \right)^2} \quad (5^b)$$

Den Erddruck  $P$  hat man nach den in §. 8 angegebenen Regeln zu bestimmen, indem man allgemein

$$P = k \gamma \frac{h^2}{2} =$$

$$\frac{\sin(\alpha + \varphi_1)}{\sin^2 \alpha} \frac{\sin^2(\alpha - \omega)}{\sin^2(\alpha - \omega + \varphi + \varphi_1)} \left( 1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi - \omega) \sin(\varphi + \varphi_1)}{\sin(\alpha + \varphi_1) (\sin \alpha - \omega)}} \right)^2 \frac{\gamma h^2}{2} \quad (6)$$

setzt, unter  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  und  $\varphi_1$  die in §. 8, und Fig. 19 angegebenen Winkel verstanden. Da ferner der Neigungswinkel  $\delta$  des Erddruckes gegen den Horizont durch  $\alpha + \varphi_1 = 90^\circ$  gegeben ist, so hat man

$$H = P \cos \delta = P \sin(\alpha + \varphi_1)$$

und

$$V = P \sin \delta = P \cos(\alpha + \varphi_1).$$

Auch die Höhe  $a$  des Angriffspunktes  $E$  des Erddruckes über dem Fuß-



punkte  $A$  der Mauer ist nach dem Vorstehenden zu bestimmen; diese Höhe ist bei nicht belasteter Erdmasse gleich  $\frac{h}{3}$  zu setzen.

Was das specifische Gewicht  $\gamma_1$  des Mauerwerkes anbelangt, so kann man dasselbe etwa zu

$$\gamma_1 = 2,2 \text{ für Bruchsteinmauerwerk}$$

und

$$\gamma_1 = 1,8 \text{ für Ziegelmauerwerk}$$

annehmen, so daß man das Verhältniß der specifischen Gewichte des Mauerwerkes und der Erde je nach dem Feuchtigkeitsgehalte der letzteren zwischen  $\frac{3}{2}$  und  $\frac{5}{4}$  wird annehmen können.

Macht man die einfachste Voraussetzung einer verticalen Wandfläche  $AB$  und einer horizontalen Oberfläche des Terrains, setzt also  $\alpha = 90^\circ$  und  $\omega = 0$ , so erhält man aus (6) den Erddruck zu

$$P = \gamma \frac{h^2}{2} \frac{\cos \varrho_1}{\cos^2 (\varrho + \varrho_1)} \left( 1 - \sqrt{\frac{\sin \varrho \sin (\varrho + \varrho_1)}{\cos \varrho_1}} \right)^2$$

$$= \gamma \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\sqrt{\cos \varrho_1} - \sqrt{\sin \varrho \sin (\varrho + \varrho_1)}}{\cos (\varrho + \varrho_1)} \right]^2,$$

oder, wenn man auch die Reibung der Erde an der Wandfläche vernachlässigen will, ( $\varrho_1 = 0$ ):

$$P = \gamma \frac{h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - \varrho}{2},$$

wie auch schon in §. 8 gezeigt wurde. Setzt man etwa für mittlere Erdart  $\tan \varrho = 0,8$  entsprechend einem natürlichen Böschungswinkel  $\varrho = 38^\circ 40'$ , und nimmt der Sicherheit wegen  $\tan \varrho_1$  geringer, etwa gleich 0,5, d. h.  $\varrho_1 = 26^\circ 34'$  an, so erhält man

$$P = \gamma \frac{h^2}{2} \left( \frac{\sqrt{\cos 26^\circ 34'} - \sqrt{\sin 38^\circ 40' \sin 65^\circ 14'}}{\cos 65^\circ 14'} \right)^2$$

$$= 0,210 \gamma \frac{h^2}{2},$$

womit

$$H = P \cos 26^\circ 34' = 0,188 \gamma \frac{h^2}{2}$$

und

$$V = P \sin 26^\circ 34' = 0,094 \gamma \frac{h^2}{2}$$

folgt. Dagegen erhält man bei Vernachlässigung der Reibung an der Wandfläche, d. h. unter Annahme eines zu dieser Fläche senkrechten Erddruckes

$$P = \gamma \frac{h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - 38^\circ 40'}{2} = 0,231 \gamma \frac{h^2}{2}.$$

Es ist hieraus ersichtlich, daß die älteren Theorien, welche von der Reibung der Erde an der Wand absehen, größere Druckkräfte der Rechnung zu Grunde legen und folglich unter gleichen sonstigen Verhältnissen zu größeren Mauerstärken führen, als man unter Berücksichtigung der Wandreibung erhält. Da ferner unter der Annahme  $\varrho_1 = 0$  bei verticaler Mauerfläche auch  $V = 0$  ausfällt, so vereinfachen sich die vorstehend gefundenen Formeln für diesen Fall, und insbesondere erhält man aus (5), wenn man darin noch  $a = \frac{h}{3}$  und  $H = P = k \gamma \frac{h^2}{2}$  einführt,

$$b = \sqrt{\frac{2\sigma}{\gamma_1 h} H a} = \sqrt{\frac{2\sigma}{3\gamma_1} P} = \sqrt{\frac{2\sigma}{3\gamma_1} k \gamma \frac{h^2}{2}} = \psi h,$$

wenn man den außer von dem Verhältnisse  $\frac{\gamma}{\gamma_1}$  noch von dem Sicherheits-

coefficienten  $\sigma$  abhängigen Werth  $\sqrt{\frac{\sigma}{3} \frac{\gamma}{\gamma_1} k}$  mit  $\psi$  bezeichnet. Dieser Coefficient  $\psi$  bestimmt sich z. B. in dem vorliegenden Falle, in welchem  $k = 0,231$  gefunden wurde, für ein Verhältniß  $\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{2}{3}$  und für einen Stabilitätscoefficienten  $\sigma = \frac{9}{4}$ , wie er der von Bauban angegebenen Regel entspricht, zu

$$\psi = \sqrt{\frac{9}{4 \cdot 3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,231} = 0,34,$$

und man hätte demnach den verticalen parallelepipedischen Futtermauern eine Stärke  $b = 0,34 h$  zu geben. In dieser Art hat man sich die Entstehung der in der Praxis vielfach gebräuchlichen Regeln zu denken, nach denen man die Stärke der Futtermauern gleich einem bestimmten Bruchtheile der Höhe  $h$  machen soll, welcher den meisten dieser Regeln zufolge nicht wesentlich von 0,3  $h$  abweicht.

Die Ermittlung der Mauerstärken nach den vorstehenden Formeln bleibt dieselbe, auch wenn die Erde überhöht oder künstlich belastet ist, indem in solchen Fällen hierauf nur bei der Ermittlung des Erddruckes Rücksicht genommen werden muß. Wenn dabei die Mauer eine unter einem gewissen Winkel ansteigende Erdmasse zu stützen hat, welche die Mauerkrone  $BC$ , Fig. 35 (a. f. S.), ganz oder zum Theil bedeckt, so hat man sich die Mauerfläche  $AB$  nach oben fortgesetzt zu denken und das Gewicht des keilförmigen Erdprismas  $FBB'$  dem Gewichte der Mauer hinzuzufügen.





ergeben die passenden Stärken für parallelepipedische Mauern; wenn den Mauern jedoch eine äußere Böschung von  $\frac{1}{5}$  der Höhe gegeben wird, so gilt die aus der Tabelle entnommene Breite nicht für die Sohle, sondern für den Querschnitt bei  $\frac{1}{9}$  der Mauerhöhe über der Sohle, auch soll man bei trocken ausgeführten Mauern die Dicke um  $\frac{1}{4}$  des Werthes der Tabelle vergrößern. Es ist selbstverständlich, daß man für Größen von  $\frac{h_1}{h}$ ,  $\varphi$  und  $\frac{\gamma_1}{\gamma}$  zwischen den der Tabelle zu Grunde gelegten die bezüglichen Werthe durch entsprechende Interpolation finden wird.

Beispiele. 1. Wenn die 5 m hohe Futtermauer, für welche in §. 8 der Erddruck zu 6260 kg bestimmt wurde, entsprechend einem Stabilitätscoefficienten  $\sigma = 3$  ausgeführt werden soll, so hat man die untere Mauerstärke  $b$  mit Rücksicht darauf zu bestimmen, daß der äußere Anlauf der Mauer  $\nu_1 = 0,1$  angenommen wird, während der Anlauf auf der der Erdmasse zugekehrten Seite zu  $\nu_2 = 0,05$  vorausgesetzt war?

Man findet zunächst aus dem Erddrucke  $P = 6260$  kg, welcher unter  $28^\circ$  gegen den Horizont geneigt ist, die Componenten

$H = 6260 \cos 28^\circ = 5527$  kg, wofür rund  $H = 5600$  angenommen werden soll, und

$$V = 6260 \cdot \sin 28^\circ = 2939, \text{ oder rund } 2900 \text{ kg.}$$

Hiermit ergibt sich nach (6) und (7), wenn man das Gewicht eines Cubikmeters Mauerwerk zu  $\gamma_1 = 2000$  kg annimmt:

$$m = \frac{3}{2000 \cdot 5} 2900 - \frac{0,05 \cdot 5}{2} = 0,870 - 0,125 = 0,745$$

und

$$n = \frac{2 \cdot 3}{2000 \cdot 5} (5600 + 0,05 \cdot 2900) \frac{5}{3} + 25 \frac{0,01 - 0,0025}{3} \\ = 5,745 + 0,0625 = 5,808,$$

und damit nach (5) die untere Breite

$$b = -0,745 + \sqrt{5,808 + 0,745^2} = 1,77 \text{ m, wofür rund } b = 1,75 \text{ m}$$

gesetzt werden kann. Die obere Breite bestimmt sich dann zu

$$b_1 = 1,75 - 5 (0,1 + 0,05) = 1 \text{ m}$$

und die mittlere Stärke zu

$$\frac{1,75 + 1}{2} = 1,375 \text{ m oder } 0,275 h.$$

Wegen der Abrundung der berechneten Breite  $b = 1,77$  in  $1,75$  m ergibt sich der wirkliche Stabilitätscoefficient etwas geringer als 3, nämlich nach (4) zu

$$\sigma = 2000 \cdot 5 \frac{1,75 \frac{1,75 - 0,25}{2} - 25 \frac{0,01 - 0,0025}{6}}{5600 \frac{5}{3} - 2900 (1,75 - 0,05 \frac{5}{3})} = 2,86.$$

2. Es soll für eine 7,2 m hohe Erdmasse, deren Reibungswinkel  $45^\circ$  beträgt, die Stärke einer 5 m hohen Stützmauer gefunden werden, deren Dichtigkeit 1,5 mal so groß als die der Erdmasse ist, wenn die Mauerkrone ganz von der Erde bedeckt ist?

Hier ist  $\frac{h_1}{h} = \frac{2,2}{5} = 0,44$ , daher findet man in der sechsten Spalte der Tabelle, entsprechend  $\varphi = 1$ ,  $\frac{\gamma_1}{\gamma} = 1,5$  und einer Breite der Verme  $= 0$ , für  $\frac{b}{h}$  den Werth

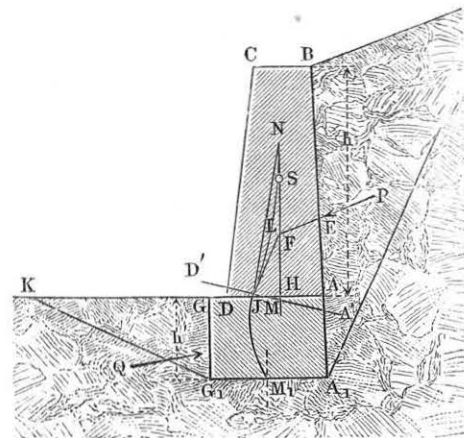
$$\frac{b}{h} = 0,399 + \frac{4}{10} (0,436 - 0,399) = 0,414,$$

und somit die untere Stärke der parallelepipedischen Mauer zu:

$$b = 5 \cdot 0,414 = 2,07 \text{ m.}$$

**Gleiten der Futtermauern.** Eine Futtermauer kann durch den §. 13. Erddruck bei nicht genügender Stärke auch seitwärts verschoben werden, und man hat derselben daher mit Rücksicht hierauf eine genügende Dicke, d. h. ein entsprechendes Gewicht zu geben, um durch die Reibung der Mauer auf dem Grunde einer Ver-

Fig. 36.



mit einem in den Boden eintretenden Fundamente versehen ist, der passive Erddruck  $Q$  gegen die Fläche  $G G_1$ , Fig. 36, des Fundamentes einer Verschiebung. Für die Stabilität der Mauern in Bezug auf Gleiten kann man, wie bereits oben bemerkt, die allgemein gültige Regel aufstellen, daß die auf irgend eine Lagerfuge wirkende resultierende Kraft von der Normalen zu dieser Fuge um weniger als den Reibungswinkel geneigt sein muß. Wenn daher für eine beliebige Fuge das oberhalb derselben befindliche

Mauerstück das Gewicht  $G$  hat, und einem Erddrucke  $P$  mit der horizontalen Componente  $H$  und der verticalen Componente  $V$  ausgesetzt ist, so geben alle diese Kräfte eine Mittelkraft, welche gegen die Verticale unter einem Winkel  $\beta$  geneigt ist, für welchen man hat

$$\tan \beta = \frac{H}{G + V}.$$

Um nun eine bestimmte Sicherheit gegen Gleiten zu erlangen, pflegt man auch hier einen gewissen Stabilitätscoefficienten  $\sigma'$ , etwa von der Größe 2, einzuführen, so daß anstatt der einfachen Kraft  $P$  diejenige  $\sigma'P$  mit der horizontalen und verticalen Componente  $\sigma'H$  und  $\sigma'V$  wirkend zu denken ist, ehe die Gefahr des Gleitens eintritt. Dieses letztere wird, horizontale Lagerfugen vorausgesetzt, demgemäß der Fall sein, wenn

$$\tan \beta = \frac{\sigma' H}{G + \sigma' V} = \varphi' = \tan \varphi'$$

ist, wenn wieder  $\varphi'$  den Reibungswinkel für die Lagerfuge bedeutet. Denkt man sich dagegen einer Lagerfuge, z. B. der durch  $M$  gehenden, anstatt der horizontalen Lage  $AD$ , eine Neigung um den Winkel  $D'MD = \lambda$  gegen den Horizont gegeben, so ist aus dem Dreiecke  $JNH$ , in welchem  $JN$  senkrecht zur Lagerfuge  $D'M$  gemacht ist, ersichtlich, daß nun das Gleichgewicht an die Bedingung geknüpft ist:

$$FJN \leq \varphi',$$

d. h.

$$\tan \beta = \frac{\sigma' H}{G + \sigma' V} = \tan (\lambda + \varphi').$$

Man erkennt hieraus, wie man durch entsprechende Neigung der Fugen die Stabilität des Mauerwerkes gegen Gleiten wesentlich erhöhen kann, ein Mittel, welches bei den Ausführungen häufig angewendet wird, wenn starke Horizontalkräfte es bedingen. In den meisten Fällen wird zwar eine Futtermauer mit Rücksicht auf ihre Stabilität gegen Umkippen (vergl. §. 12) eine größere Stärke erfordern, als in Hinsicht auf Gleiten, doch kann unter Umständen auch das Gegentheil stattfinden, so daß man der Sicherheit wegen die Ermittlung der Mauerstärke nach beiden Hinsichten zu ermitteln und von den beiden erhaltenen Werthen  $b$  und  $b'$  den größeren für die Mauerstärke zu wählen hat.

Bezeichnet wieder  $G$  das Gewicht des Mauerwerkes  $ABCD$  über dem Fundamente  $AG_1$  der Mauer, welches nach dem vorigen Paragraphen zu

$$G = \gamma_1 \left( b' - \frac{v_1 + v_2}{2} h \right) h$$

anzunehmen ist, so hat man für die Fuge  $AD$  die Bedingung:

$$\tan (\lambda + \varphi') = \frac{\sigma' H}{\gamma_1 h \left( b' - \frac{v_1 + v_2}{2} h \right) + \sigma' V}$$

woraus allgemein folgt:

$$\begin{aligned} \sigma' &= G \frac{\tan (\lambda + \varphi')}{H - V \tan (\lambda + \varphi')} \\ &= \gamma_1 h \left( b' - \frac{v_1 + v_2}{2} h \right) \frac{\tan (\lambda + \varphi')}{H - V \tan (\lambda + \varphi')} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

und

$$b' - \frac{v_1 + v_2}{2} h = \frac{\sigma'}{\gamma_1 h} \left( \frac{H}{\tan (\lambda + \varphi')} - V \right) \quad \dots (2)$$

Hierin hat man wieder die Componenten  $H$  und  $V$  des Erddrucks  $P$  nach §. 8 zu ermitteln, und erhält z. B. für eine verticale Mauerfläche und horizontale Begrenzung der Erde, wenn man von deren Reibung an der Futtermauer absieht,

$$V = 0 \text{ und } H = \gamma \frac{h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2}.$$

Setzt man noch für eine parallelepipedische lothrechte Futtermauer  $v_1 = v_2 = 0$ , so wird, wenn man einen horizontalen Fugenschnitt ( $\lambda = 0$ ) voraussetzt:

$$\sigma' = 2 \frac{\gamma_1 b'}{\gamma h} \frac{\tan \varphi'}{\tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2}} \quad \dots (1^a)$$

und

$$b' = \frac{\sigma' \gamma}{2 \gamma_1} h \frac{\tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2}}{\tan \varphi'} \quad \dots (2^a)$$

Da nach dem vorhergehenden Paragraphen unter denselben Bedingungen aus (5<sup>a</sup>) die Breite  $b$  zu

$$b = h \tan \frac{90^\circ - \varphi}{2} \sqrt{\frac{\sigma \gamma}{3 \gamma_1}} \quad \dots (2^b)$$

sich ergibt, so wird man die Mauerstärke mit Rücksicht auf Gleiten nach (2<sup>a</sup>) oder mit Rücksicht auf Rippen nach (2<sup>b</sup>) zu bestimmen haben, je nachdem

$$\frac{\sigma' \gamma}{2 \gamma_1} \frac{\tan \frac{90^\circ - \varphi}{2}}{\tan \varphi'} \geq \sqrt{\frac{\sigma \gamma}{3 \gamma_1}}$$

ist u. f. w.



Um den Widerstand gegen das Fortschieben der Mauer auf dem Boden zu vergrößern, welches sich besonders nöthig macht, wenn dieser Boden leetig oder mit Wasser durchdrungen ist, wobei der Reibungscoefficient zwischen der Mauer und dem Grunde auf 0,3 herabgehen kann, giebt man der Mauer, wie schon erwähnt, ein Fundament von gewisser Tiefe  $GG_1 = h'$ . Es widersteht dann dem activen Erddrucke gegen die Fläche  $A_1B$  nicht allein die Reibung auf der Grundfläche  $A_1G_1$ , sondern auch noch der passive Druck der Erdmasse vor der Mauerfläche  $G G_1$ .

Setzt man, wie dies meistens zutreffen wird, eine verticale Fläche  $G G_1$  des Fundamentsockels voraus, und bezeichnet wieder  $\varphi_1$  den Reibungswinkel der Erde an dieser Fläche, so ist der passive Erddruck  $Q$  unter diesem Winkel  $\varphi_1$  gegen den Horizont nach oben geneigt anzunehmen, da bei einem Ausweichen der Mauer das Erdprisma  $G G_1 K$  nach oben verschoben werden müßte. Dieser passive Erddruck  $Q$  hat daher die horizontale Componente  $H' = Q \cos \varphi_1$  und die verticale dem Gewichte der Mauer entgegenwirkende Componente  $V' = Q \sin \varphi_1$ . Bezeichnet nun  $G$  das Gewicht der ganzen Mauer  $B G_1$  einschließlich des Fundamentsockels, und werden jetzt unter  $H$  und  $V$  die Componenten des activen Erddruckes auf die ganze Hinterfläche  $B A_1$  verstanden, so hat man für das Gleichgewicht, unter der Annahme eines Stabilitätscoefficienten  $\sigma'$  die Bedingung:

$$\varphi (G + \sigma' V - V') = \sigma' H - H'. \dots \dots (3)$$

Diese Gleichung kann dazu dienen, die Tiefe  $h' = G G_1$  des Fundamentes zu ermitteln, wenn man darin den Erddruck  $P$  und  $Q$  sowie das Gewicht  $G$  durch die Höhen  $h$  und  $h'$  ausdrückt, und für  $b$  den aus dem Vorstehenden gefundenen Werth für  $AD$  einführt. Wollte man auch hier von der Reibung der Erde an der Mauerfläche absehen, und also  $V = V' = 0$  voraussetzen, so erhielte man für eine parallelepipedische Mauer, deren Fundament ein Bankett von der Breite  $DG = e$  hat, die Gleichung

$$\varphi \gamma_1 [bh + (b + e) h'] = \sigma' \gamma \frac{(h + h')^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} - \gamma \frac{h'^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ + \varphi}{2} \dots \dots \dots (3^a)$$

aus welcher quadratischen Gleichung sich  $h'$  berechnen läßt.

Man kann bemerken, daß die Anlage eines Fundamentes von gewisser Tiefe bei Mauern noch einen anderen Grund hat, welcher sich aus Folgendem erkennen läßt. Denkt man sich nach dem in §. 11 darüber Gesagten für eine Mauer die Stützlinie gezeichnet, so stellt der Durchschnittspunkt der letzteren mit irgend einer Lagerfuge den Angriffspunkt dar für die Mittelkraft aller von dieser Fuge aufgenommenen Druckkräfte bezw. ausgeübten

Reactionen. Wenn dieser Angriffspunkt in die Mitte der betreffenden Lagerfuge trifft, wie es im Allgemeinen bei solchen Mauern der Fall sein wird, welche nur verticalen Belastungen wie ihrem Eigengewichte, nicht aber seitlichen Kräften ausgesetzt sind, so darf man eine nahezu gleichmäßige Vertheilung des Druckes auf die Fuge voraussetzen. Bei Futtermauern dagegen wird die Stützlinie durch den seitlichen Erddruck um so weiter aus der Schwerlinie der Mauer nach außen gedrängt, je mehr der Erddruck gegen das Eigengewicht vorherrscht, d. h. je tiefer die betrachtete Fuge unter der Erdoberfläche gelegen ist. Wenn z. B. in der Fig. 36 die parabelähnliche Curve  $L$  (s. §. 11) die Stützlinie vorstellt, so wird der gesammte Druck auf die Fuge  $AD$  in dem Durchschnittspunkte  $J$  sich concentriren, und daher werden die der Außenkante  $D$  näher liegenden Elemente stärker gepreßt werden, als die der Innenkante  $A$  nahe gelegenen. In wie weit eine solche ungleiche Druckvertheilung mit dem Materiale der Mauer verträglich ist, soll im folgenden Paragraphen näher untersucht werden. Dächte man sich nun die Mauer mit der Fläche  $AD$  direct auf den Boden gestellt, so würde derselbe vermöge seiner natürlichen Nachgiebigkeit in Folge dieser ungleichen Druckvertheilung einem ungleichen Ausweichen und Segen unterworfen sein, in Folge wovon der sichere Stand der Mauer bedenklich gefährdet würde. Dies zu vermeiden, benutzt man den passiven Druck oder Schub der Erdmasse  $GK$  gegen das Fundament, denn es ist ohne Weiteres klar, wie durch diesen Schub die Stützlinie unterhalb  $AG$  von  $J$  aus mehr nach dem Innern der Mauer zurückgebogen wird. Man kann, da der passive Erddruck bei gleicher Tiefe viel größer ist als der active, hierdurch erreichen, daß die Stützlinie die Grundfläche  $A_1 G_1$  in ihrer Mitte  $M_1$  schneidet, in welchem Falle die Mauer gleichmäßig auf die Bodenfläche drückt. Es ist auch klar, daß bei einer solchen Tiefe des Fundamentes  $G G_1$ , bei welcher die horizontale Componente  $H'$  des passiven Erddruckes genau gleich der horizontalen Componente  $H$  des activen Druckes auf  $B A_1$  ist, die Bodenfläche von der Stützlinie in demselben Punkte getroffen werden muß, durch welchen auch die verticale Schwerlinie der Mauer nebst ihren verticalen Belastungen  $V$  und  $V'$  hindurchgeht, indem die horizontalen Erddruckcomponenten  $H$  und  $H'$  sich gegenseitig aufheben. Letzteres gilt dann auch von den verticalen Componenten  $V$  und  $V'$ , wenn die beiden gedrückten Mauerflächen parallel sind. Eine hierauf beruhende graphische Bestimmung der Fundamenttiefe soll in einem folgenden Paragraphen angeführt werden.

Beispiel. Wenn man bei der im Beispiele 1 des vorigen Paragraphen berechneten Futtermauer den Reibungswinkel für die Fugen ebenfalls zu  $\varphi_1 = 35^\circ$  annimmt, so ermittelt sich der Stabilitätscoefficient dieser Mauer gegen Gleiten auf der horizontalen Fuge in 5 m Tiefe unter der Mauerkrone nach (1) zu



$$\sigma' = G \frac{\tan \varphi'}{H - V \tan \varphi'} = 13750 \frac{0,700}{5600 - 2900 \cdot 0,700} = 2,70,$$

so daß ein Grund nicht vorhanden ist, in diesem Falle die Lagerfugen gegen den Horizont geneigt auszuführen.

§. 14. **Druckvertheilung.** Nachdem in den vorhergehenden Paragraphen die Stabilitätsverhältnisse der Futtermauern untersucht worden sind, handelt es sich noch um die Prüfung der Inanspruchnahme, welcher das Material der Mauern unterworfen ist. Dies ist insbesondere deshalb von Wichtigkeit, weil der zur Verwendung kommende Mörtel nur mäßige Druckkräfte auszuhalten, und der Luftmörtel Zugkräften meist gar nicht zu widerstehen vermag. Nur bei der Verwendung eines vorzüglichen hydraulischen oder Cementmörtels kann man, um unverhältnißmäßig große Mauerstärken zu vermeiden, eine geringe Widerstandsfähigkeit gegen Zugspannungen voraussetzen, welche nach Inge\*) etwa bis zu 1 kg pro Quadratcentimeter betragen darf. Nach den Versuchen von Bauschinger\*\*) wurde Ziegelmauerwerk in Cementmörtel bei 117 bis 180 kg Druck pro Quadratcentimeter zerdrückt, während solches in Luftmörtel ausgeführt, zwischen 70 und 111 kg Widerstandsfähigkeit zeigte. Nimmt man hiervon  $\frac{1}{10}$  als zulässige Belastung, so wäre dieselbe durchschnittlich

15 kg für Cementmauerwerk

9 kg für Mauerwerk in Luftmörtel.

Dort giebt für

Mauerwerk aus Kalk- und Sandsteinen 10 kg und für

Mauerwerk aus Ziegeln 5 kg

als zulässige Belastung an. Die von Rondelet für verschiedene kühne Bauten berechneten Belastungen variiren zwischen 44 kg bei der Allerheiligenkirche zu Angers und 16 kg bei der Peterskirche in Rom.

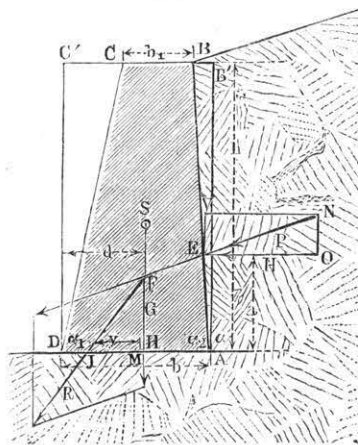
Mit Rücksicht auf eine für eine bestimmte Ausführung anzunehmende größte Beanspruchung des Materials wird sich, wie die folgende Betrachtung zeigen wird, auch der Stabilitätscoefficient  $\sigma$  der Mauer gegen Umfalten ergeben, von welchem im §. 12 nur angegeben wurde, daß er gemeiniglich zwischen 2 und 3 liegend angenommen werde. Ist  $ABCD$ , Fig. 37, ein Stück einer Futtermauer, und setzt man den in  $E$  wirkenden Erddruck  $P$  mit dem im Schwerpunkte  $S$  wirkenden Gewichte  $G$  nach dem Parallelogramm der Kräfte zu einer Mittelkraft  $R$  zusammen, so erhält man in dem Durchschnittspunkte  $J$  der Mittelkraft mit  $AD$  denjenigen Punkt, in welchem die Lagerfuge  $AD$  gegen das Mauerstück mit einer Kraft  $-R$  reagirend

\*) Siehe D. Inge, Quaimauern, Stützmauern, Thalisperrn. Deutsche Bauzeitung 1875.

\*\*) Siehe Holzhey, Vorträge über Baumechanik.

gedacht werden muß. Diese Reaction besteht aus einer horizontalen Kraft  $-H$ , welche nach dem vorhergehenden Paragraphen durch die Reibung der

Fig. 37.



Fuge aufgenommen werden muß und einer vertical aufwärts gerichteten Componente von der Größe  $G + V$ . Ist nun  $M$  im Abstände  $MJ = y$  von  $J$  die Fugenmitte, und denkt man sich die verticale Componente  $G + V$  der Reaction nach  $M$  unter Hinzufügung des betreffenden Kräftepaars verlegt, so ist ersichtlich, daß die Fuge unter Einfluß der verticalen Kraft  $G + V$  in  $M$  einer rückwirkenden Spannung

$$s_d = \frac{G + V}{b} \quad \dots (1)$$

ausgesetzt ist, während durch das Kräftepaar vom Moment  $(V + G)y$  gewisse Biegungsspannungen in dem Querschnitte  $AD$  des Mauerkörpers hervorgerufen werden. Die größten Biegungsspannungen  $s_b$  finden in den Ranten bei  $A$  und  $D$  statt, und zwar in  $A$  eine Zugspannung und in  $D$  eine Druckspannung, von welchen nach den Gesetzen der relativen Festigkeit jede durch

$$\frac{1}{6} b^2 s_b = (G + V) y$$

zu

$$s_b = 6 \frac{G + V}{b^2} y = \frac{6y}{b} s_d \quad \dots (2)$$

sich ergibt. In Folge dieser beiden Wirkungen sind daher die resultirenden Spannungen  $s_1$  in  $D$  und  $s_2$  in  $A$  durch

$$s_1 = s_d + s_b = \frac{G + V}{b} \left( 1 + 6 \frac{y}{b} \right) \quad \dots (3)$$

und

$$s_2 = s_d - s_b = \frac{G + V}{b} \left( 1 - 6 \frac{y}{b} \right) \quad \dots (4)$$

gegeben. Der stets positive Werth von  $s_1$  stellt eine Druckspannung in  $D$  vor, während in  $A$  eine Druck- oder Zugspannung sich einstellt, je nachdem  $6y$  kleiner oder größer ist als  $b$ . Für den Grenzfall  $y = \frac{1}{6} b$  wird  $s_2 = 0$ , das Material also in  $A$  gar nicht beansprucht.

Ein Diagramm veranschaulicht diese Verhältnisse am besten. Denkt man in Fig. 38 I (a. f. S.), auf einer Axc  $ad = b$  in allen Punkten Ordinaten

$$dc = ab = sa = \frac{G + V}{b}$$

aufgetragen, so stellt das Rechteck  $abcd$  die gleichmäßige Vertheilung der rückwirkenden Spannungen in Folge des Verticaldruckes  $G + V$  vor. Ebenso giebt die durch die Mitte  $m$  von  $ab$  in II gezogene Gerade  $cb$ , für welche

$$dc = ab = s_b = 6 \frac{G + V}{b^2} y$$

gemacht ist, ein Bild von der Vertheilung der Biegungsspannungen, so zwar, daß die Ordinaten unterhalb der Axe  $am$  Zugspannungen, diejenigen oberhalb  $dm$  Druckspannungen bedeuten. Die Vereinigung der beiden

Fig. 38.

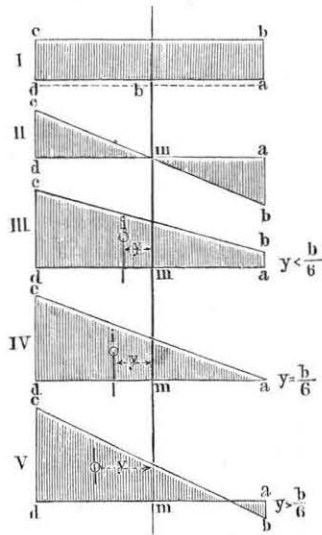


Diagramme I und II durch Summirung der Ordinaten führt sodann ohne Weiteres zu den Figuren III, IV und V, je nachdem

$$y \leq \frac{1}{6} b$$

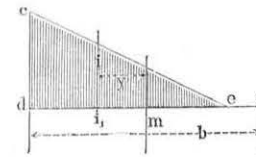
ist. Es ist auch leicht zu ersehen, daß in diesen drei Diagrammen der Schwerpunkt  $i$  der schraffirten Flächen von der Mitte  $m$  den Abstand  $y$  hat, wobei vorausgesetzt werden muß, daß man die in V auf entgegengesetzten Seiten der Axe  $ad$  liegenden Flächentheile als in entgegengesetzten Richtungen wirkend ansieht. Aus III und IV ist zu erkennen, daß die Elemente der Fuge durch Zugkräfte nicht in Anspruch genommen

werden, so lange der Abstand  $y$  der Stützlinie von der Mitte des Querschnittes den Betrag  $\frac{1}{6} b$  nicht überschreitet, also die Stützlinie wenigstens um  $\frac{1}{3} b$  von der äußeren Kante  $d$  zurückbleibt. Hieraus ergibt sich die für gewöhnliches Mauerwerk, dessen Mörtel Zugkräften nicht unterworfen sein soll, meistens angegebene Regel, wonach die Stützlinie nirgends aus dem mittleren Drittel der Mauer heraustreten soll. Wenn man dagegen in gewissen Fällen bei Anwendung von Cementmörtel Zugspannungen bis zu gewissem Betrage zulassen will, so kann die Mauerstärke entsprechend geringer gehalten werden, so daß (V)  $y$  größer als  $\frac{1}{6} b$  wird,

und man hat zur Bestimmung von  $b$  die Anordnung so zu treffen, daß die Ordinate  $ab$  in V nach dem für die Kräfte gewählten Maßstabe dem Werthe der höchstens zulässigen Zugspannung entspricht.

Der letztere Fall, in welchem  $y > \frac{1}{6} b$  ist, bedarf noch dann einer besonderen Betrachtung, wenn die Fuge Zugspannungen nicht zu äußern vermag. Alsdann wird nämlich die betreffende Fuge von der inneren Kante  $a$  aus bis auf eine bestimmte Erstreckung  $ae$ , Fig. 39, sich öffnen, so daß dieser Theil gar nicht zur Herstellung des Gleichgewichtes beiträgt, dasselbe vielmehr nur durch den

Fig. 39.



Einfluß der Druckspannungen in dem übrigen Theile  $ed$  des Querschnittes erhalten werden kann. Diese Druckspannungen nehmen von Null in  $e$  allmähig nach  $d$  hin an Größe zu, und man findet für diesen Fall die größte rückwirkende Spannung  $s_1 = dc$  in der Kante  $d$ , wenn

man die durch das Dreieck  $edc$  dargestellte gesammte Reaction der Fuge gleich dem Verticaldrucke  $G + V$  setzt. Für dieses Dreieck hat man, da der Schwerpunkt  $i$  einen Abstand  $di_1 = \frac{b}{2} - y$  von der äußeren Kante hat, die Länge der Grundlinie  $de = 3 \left( \frac{b}{2} - y \right)$ , und sonach erhält man für diesen Fall aus

$$G + V = \frac{1}{2} de \cdot dc = \frac{3}{2} \left( \frac{b}{2} - y \right) s_1,$$

die größte Druckspannung in  $d$  zu

$$s_1 = \frac{4}{3} \frac{G + V}{b - 2y} \dots \dots \dots (3^a)$$

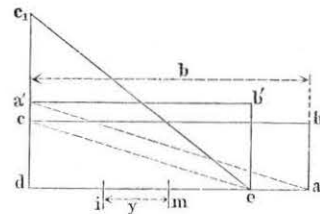
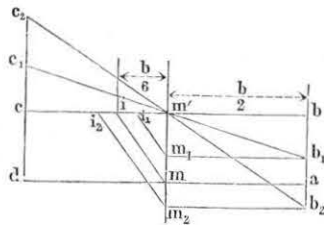
welche Gleichung, wie bemerkt, nur für Werthe von  $y$ , die größer als  $\frac{1}{6} b$  sind, und unter der Voraussetzung gänzlicher Widerstandslosigkeit des Mörtels gegen Zugkräfte gilt. Diesen Zustand einer sich unter dem Einflusse des Druckes öffnenden Fuge wird man insbesondere bei Mauern zu vermeiden haben, welche dem Wasserdrucke zu widerstehen haben, wie dies beispielsweise bei den Staudämmen von Hochreservoirs (Thalsperren) der Fall ist, weil sonst durch in die geöffneten Fugen eintretendes Wasser leicht eine Zerstörung des Bauwerkes herbeigeführt werden kann.

Wenn man für einen beliebigen Querschnitt der Mauer die Entfernung  $y$  der Stützlinie von der Mitte des Querschnittes kennt, so ist es leicht, die größte Spannung an der äußeren Mauerseite graphisch zu ermitteln. Wird z. B. eine Mauerfuge von der Breite  $bc = b$ , Fig. 40 (a. f. S.), in  $i_1$

oder  $i_2$  von der Stützlinie getroffen, so hat man nur nöthig, das Rechteck  $abcd$  mit der Höhe  $ab = s_a = \frac{G + V}{b}$  darüber zu zeichnen, den um  $\frac{1}{6} b$  von der Mitte  $m'$  entfernten Punkt  $i$  mit  $m$  zu verbinden, und

Fig. 40.

Fig. 41.



durch  $i_1$  bzw.  $i_2$  eine Parallele mit  $im$  zu ziehen, um in  $m'm_1$  oder  $m'm_2$  die maximale Biegungsspannung  $s_b$  zu erhalten. Zieht man daher noch  $m_1b_1$  bzw.  $m_2b_2$  parallel mit  $ad$ , so erhält man in der Geraden durch  $b_1$  oder  $b_2$  und  $m'$  die Begrenzung des Druckdiagramms, und in  $dc_1$  resp.  $dc_2$  die größte Druckspannung  $s_1$  an der äußeren Kante. Diese Construction, deren Wichtigkeit aus (1) und (2) ohne Weiteres folgt, gilt für den Fall, daß der Mörtel der Zugspannung  $ab_2 = s_2$  widerstehen kann. Ist dies nicht der Fall, so hat man, Fig. 41, entsprechend der Gleichung (3<sup>a</sup>) die Länge

$$de = 3 di = 3 \left( \frac{b}{2} - y \right)$$

anzutragen, das Rechteck  $abcd$  in das flächengleiche Rechteck  $eb'a'd$  zu verwandeln und  $dc_1 = 2da'$  zu machen, um in  $dc_1$  die Spannung  $s_1$  und in  $edc_1$  das Druckdiagramm zu erhalten, da dieses Dreieck gleich

$$eb'a'd = abcd = Q + G$$

ist. Zur Umwandlung des Rechtecks  $abcd$  zieht man am einfachsten  $ce$  und damit durch  $a$  die Parallele  $aa'$ , so erhält man

$$de : da = dc : da',$$

folglich in  $da'$  die gesuchte Höhe.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich auch der Zusammenhang, welcher zwischen dem Abstände  $y$  der Stützlinie von der Mitte  $M$  des Querschnittes, Fig. 37, und dem Stabilitätscoefficienten  $\sigma$  für Umfanten besteht. Nach §. 12 hat man nämlich

$$\frac{DH}{FH} = \frac{\sigma H}{G + \sigma V}$$

oder, wenn der Abstand  $HM$  der Schwerlinie von der Mitte  $M$  mit  $e$  bezeichnet wird

$$\frac{\frac{1}{2}b + e}{FH} = \frac{\sigma H}{G + \sigma V}.$$

Nach dem Vorstehenden ist aber auch:

$$\frac{JH}{FH} = \frac{y + e}{FH} = \frac{H}{G + V},$$

und man erhält daher durch Division beider Gleichungen:

$$\frac{2(y + e)}{b + 2e} = \frac{G + \sigma V}{\sigma(G + V)} \quad \dots \dots \dots (5)$$

womit  $\sigma$  aus  $y$  oder umgekehrt zu bestimmen ist. Beispielsweise wird für eine verticale parallelepipedische Futtermauer  $e = 0$ , und man erhält mit  $V = 0$ :

$$\sigma = \frac{b}{2y},$$

d. h. es würde z. B. der Grenzfall, Fig. 38 IV, für welchen  $y = \frac{1}{6}b$  und  $s_2 = 0$  ist, einem Stabilitätscoefficienten  $\sigma = 3$  entsprechen. Den Werth von  $y$  findet man aus der Momentengleichung in Bezug auf  $J$ , nämlich:

$$Ha = G(e + y) + V\left(\frac{b}{2} + y - v_2a\right)$$

zu

$$y = \frac{Ha - V\left(\frac{b}{2} - v_2a\right) - Ge}{G + V} \quad \dots \dots \dots (6)$$

Beispiel. Um bei der in §. 8 und §. 12 berechneten Futtermauer die Druckkräfte in der unteren Fuge zu ermitteln, findet man zunächst das Gewicht bei der mittleren Breite 1,375 m zu

$$G = 2000 \cdot 5 \cdot 1,375 = 13750 \text{ kg.}$$

Ferner hat man das Moment dieses Gewichtes in Bezug auf die äußere Mauerante nach (2) in §. 12:

$$Gd = 2000 \cdot 1,75 \cdot 5 \cdot \frac{1,75 - 0,25}{2} - 2000 \cdot 125 \cdot \frac{0,01 - 0,0025}{6} \\ = 13125 - 312,5 = 12812,5 \text{ mkg,}$$

daher den Abstand der Schwerlinie von der äußeren Mauerante

$$d = \frac{12812,5}{13750} = 0,932 \text{ m,}$$

d. h. die Schwerlinie der Mauer trifft die Basis derselben in einer Entfernung von deren Mitte

$$e = d - \frac{b}{2} = 0,932 - 0,875 = 0,057 \text{ m.}$$

Es ergibt sich nun weiter aus (6) der Werth von  $y$  zu:

$$y = \frac{5600 \cdot \frac{5}{3} - 2900 \left(0,875 - 0,05 \frac{5}{3}\right) - 13750 \cdot 0,057}{13750 + 2900} = \frac{6253}{16650} = 0,374 \text{ m.}$$

Dieselbe Größe von  $y$  würde man auch aus (5) erhalten, wenn man darin für  $\sigma$  den in §. 12 berechneten Werth von 2,86 einführt.

Da  $y > \frac{1,750}{6}$  ist, so wird an der inneren Mauerante eine Zugspannung eintreten, und man findet die Spannungen  $s_1$  und  $s_2$  an der äußeren und inneren Mauerante nach (3) und (4) zu:

$$s_1 = \frac{13750 + 2900}{1,750} \left(1 + 6 \frac{0,374}{1,750}\right) = 9514 (1 + 1,282) = 21710 \text{ kg Druck}$$

und

$$s_2 = \frac{13750 + 2900}{1,750} \left(1 - 6 \frac{0,374}{1,750}\right) = 9514 (1 - 1,282) = 2682 \text{ kg Zugspannung}$$

für 1 qm Querschnittsfläche. Wenn dagegen der Mörtel Zugspannungen gar nicht widerstehen kann, so bestimmt sich die größte Druckspannung an der äußeren Kante nach (3a) zu:

$$s_1 = \frac{4}{3} \frac{13750 + 2900}{1,750 - 2 \cdot 0,374} = 22150 \text{ kg.}$$

Die vorstehend berechnete Stärke der Futtermauern, für welche

$$y = 0,374 \text{ m} = 0,427 \frac{b}{2}$$

ist, genügt der Baubau'schen Vorschrift, welcher zufolge  $y$  nicht größer als höchstens

$$\frac{4}{9} \frac{b}{2} = 0,444 \frac{b}{2}$$

sein soll.

§. 15. **Graphisches Verfahren.** Zum Schlusse möge noch das graphische Verfahren angeführt werden, mittelst dessen die Prüfung bzw. Ermittlung der Stärke von Futtermauern vorgenommen werden kann. Zu dem Ende sei etwa die Aufgabe gestellt, für eine Futtermauer von gegebener Höhe und bei bestimmter Begrenzung der zu stützenden Erde die untere Breite einem vorgeschriebenen Stabilitätscoefficienten  $\sigma$  gemäß zu bestimmen. Es sei eine Futtermauer von 5 m verticaler Höhe vorausgesetzt und angenommen, daß die dem Erddrucke ausgesetzte Wandfläche  $AB$ , Fig. 42, unter einer Neigung  $\frac{1}{8}$  gegen die Verticale nach hinten begrenzt sein, dagegen auf der Vorderfläche  $CD$  eine Böschung von  $\frac{1}{5}$  erhalten solle. Das Terrain möge in  $EE_1$  unter irgend einem Winkel gegen den Horizont geneigt und vorausgesetzt sein, daß ein Theil der Mauerkrone etwa in einer Breite  $FB$

von 1 m durch die Erde bedeckt sei, welche daselbst in  $FE_1$  unter einem Winkel von  $30^\circ$  gegen den Horizont ansteige. Der Reibungscoefficient für die Erde an der Wandfläche sei zu

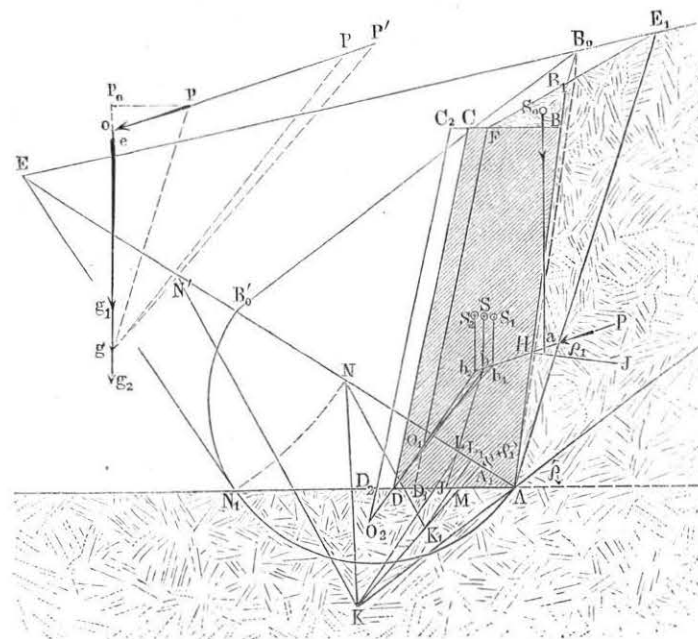
$$\tan \varphi_1 = 0,5, \text{ also } \varphi_1 = 26^\circ 34'$$

vorausgesetzt, während der natürliche Böschungswinkel  $\varphi$  entsprechend einer mittleren Beschaffenheit der Erde zu

$$38^\circ 40', \text{ also } \tan \varphi = 0,8$$

angenommen werden möge. Denkt man nun die hintere Wandfläche  $AB$  nach oben erweitert, so kann man das dreiseitige Erdprisma  $FBB_1$  als

Fig. 42.



directe Belastung der Mauer ansehen, und hat den Erddruck gegen die Fläche  $AB_1$  zu ermitteln. Hierzu verwandelt man zuerst das Dreieck  $AB_1E_1$  in das flächengleiche  $AB_0E_1$ , dessen Seite  $B_0E_1$  mit der Oberfläche des Terrains zusammenfällt. Die Verwandlung geschieht einfach dadurch, daß man durch  $B_1$  eine Parallele zu  $AE_1$  zieht, wodurch der Punkt  $B_0$  direct erhalten wird. Um nun den Druck der Erdmasse gegen die Wandfläche  $AB_1$  zu erhalten, zieht man nach §. 7 durch  $A$  die Gerade  $AE$  unter dem



Winkel  $BAE = \varphi + \varphi_1 = 65^\circ 14'$  gegen die Wandfläche, während man durch  $B_0$  die Gerade  $B_0 B_0'$  unter dem natürlichen Böschungswinkel  $\varphi = 38^\circ 40'$  gegen den Horizont zieht. Dann erhält man durch die Tangente  $EN_1$  an den über  $AB_0'$  beschriebenen Halbkreis den Abstand des Punktes  $N$  von  $E$ , welcher die Größe des Erddruckes durch die Beziehung  $P = \frac{1}{2} \overline{AN}^2 \sin B_0 B_0' A$  ergibt. Zieht man daher  $AK$  parallel mit  $B_0 B_0'$ , also unter dem natürlichen Böschungswinkel, und macht  $AK = AN$ , so erhält man in dem Inhalte des Dreiecks  $ANK$  die Größe des Erddruckes nach demselben Maßstabe ausgedrückt, nach welchem das Gewicht eines beliebigen Erdprismas, wie z. B. des auf der Mauer lastenden, durch das Profil  $FBB_1$  desselben dargestellt ist. Betrachtet man auch hier wieder ein Mauerstück von 1 m Länge, so ist also der Erddruck  $P = F\gamma$  gegeben, wenn  $F$  den Inhalt des genannten Dreiecks  $ANK$  und  $\gamma$  das Gewicht eines Cubikmeters Erde bedeutet. In gleicher Art ist das Gewicht  $E$  des auf der Mauer lastenden Erdprismas vom Querschnitte  $FBB_1 = f$  durch  $f\gamma$ , dagegen das Gewicht der Mauer durch  $G = F_m \gamma_1$  gegeben, wenn  $F_m$  das Profil und  $\gamma_1$  das spezifische Gewicht der Mauer bedeutet. Um nun diese verschiedenen Kräfte zu vereinigen, hat man sie durch gerade Linien oder Strecken zu ersetzen, was immer leicht durch Einführung einer gewissen Einheit für den Kräftemaßstab möglich ist. Denkt man sich nämlich alle vorkommenden Kräfte als die Gewichte von gewissen prismatischen Mauerwerkskörpern, welche sämtlich eine Länge (in der Richtung senkrecht zur Bildebene) gleich der des betrachteten Mauerstückes, also 1 m, und eine horizontale Breite  $b$  haben, so ist es deutlich, daß diese Kräfte sich wie die Höhen  $h$  dieser Prismen verhalten, und man kann diese Höhen anstatt der Kräfte selbst einführen und mit diesen Strecken alle Operationen der graphischen Statik vollführen. Was die Wahl der für alle Prismen gleichen Breite  $b$  anbetrifft, so ist dieselbe an sich zwar gleichgültig, doch hat man zu beobachten, daß nach getroffener Wahl von  $b$  das Gewicht  $\gamma_1 b$  von  $b$  Cubikmetern Mauerwerk als Einheit für den Kräftemaßstab betrachtet werden muß, d. h. jeder Meter der erwähnten Höhen  $h$  entspricht einer Kraft gleich  $\gamma_1 b$  Kilogrammen. Würde man z. B. als Einheit der Kräfte 1 Tonne = 1000 kg wählen, so hätte man bei einem spezifischen Gewichte des Mauerwerkes von 2000 kg als Breite  $b$  oder Basis die Länge 0,5 m, dagegen bei einer Kräfteeinheit gleich 10 Tonnen = 10 000 kg eine Basis  $b = 5$  m zu wählen. Man wird bei allen graphischen Ermittlungen die Basis  $b$  so annehmen, daß die sich daraus ergebenden Höhen  $h$  oder Strecken, welche die Kräfte darstellen, innerhalb des Umfanges der Zeichnung bequem sind. Dementsprechend ist in Fig. 42 als Kräfteeinheit das Gewicht von 5 Tonnen gewählt, so daß, ein spezifisches Gewicht des Mauerwerkes  $\gamma_1 = 2000$  kg zu Grunde gelegt, die Basis

$$b = \frac{5000}{2000} = 2,5 \text{ m}$$

angenommen worden ist. In Folge dessen bedeutet für die ermittelten Höhen oder Strecken und die daraus gebildeten Kräftepolygone zc. jede Länge, welche nach dem der Zeichnung zu Grunde liegenden Maßstabe der Längen 1 m vorstellt, eine Kraft von 5 Tonnen. Demgemäß ist es leicht erklärlich, was man darunter zu verstehen hat, wenn angegeben wird, bei einer graphischen Ermittlung sei ein Kräftemaßstab gewählt, nach welchem 1 cm eine bestimmte Anzahl von Kilogrammen bedeutet. In dem vorliegenden Falle z. B., in welchem die Zeichnung in  $\frac{1}{100}$  der natürlichen Größe ausgeführt ist, entspricht jedem Centimeter der Zeichnung, da derselbe eine wirkliche Länge von 1 m repräsentirt, in dem Kräftepolygone eine Kraft von 5000 kg.

Nach diesen Bemerkungen ergibt sich nun leicht die Art, wie die Kräfte durch Strecken, d. h. die Höhen der gedachten Mauerwerkprismen darzustellen sind. Handelt es sich dabei um wirkliche Mauerkörper, so hat man nur deren verticale Profile in Rechtecke von der Breite  $b$  zu verwandeln, um in den gefundenen Höhen die betreffenden Strecken zu erhalten. Ist dagegen die Kraft durch das Gewicht eines Erdkörpers von dem spezifischen Gewichte  $\gamma$  gegeben, so muß man natürlich entweder das Profil oder die erlangte Höhe in dem Verhältnisse  $\frac{\gamma}{\gamma_1}$  reduciren. Die Art der Verwandlung der Querschnitte in Rechtecke nach den bekannten Regeln der Geometrie bedarf keiner näheren Erläuterung, im Uebrigen kann dieserhalb, sowie hinsichtlich der Operationen mit den Strecken auf das in Thl. I. Anhang, Gesagte verwiesen werden.

Um nun die den Erddruck  $P$  darstellende Strecke zu bestimmen hat man das Dreieck  $ANK$  zunächst in dem Verhältnisse  $\frac{\gamma}{\gamma_1}$  zu reduciren. Nimmt

man für mittlere Erde  $\gamma = 1600$  kg also  $\frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{4}{5}$ , so erhält man in dem

Dreiecke  $NA_1 K$ , in welchem  $NA_1 = \frac{4}{5} NA$  gemacht worden ist, den Querschnitt eines den Erddruck darstellenden Mauerprismas. Um diesen Querschnitt in ein Rechteck von der Basis  $b = 2,5$  m zu verwandeln, hat man nur nöthig, die doppelte Basis  $2b = 5$  m gleich  $A_1 N'$  anzutragen und durch  $N$  die mit  $N'K$  parallele Gerade  $NK_1$  zu ziehen. Man erhält dann offenbar in der Höhe  $K_1 L_1 = p$  des Dreiecks  $NK_1 A_1$  die gesuchte Strecke für den Erddruck, denn es ist:

$$A_1 N : A_1 N' = K_1 L_1 : KL$$

oder

folglich

$$A_1 N \cdot KL = A_1 N' \cdot K_1 L_1 = 2bp,$$

$$bp = \frac{1}{2} A_1 N \cdot KL = \triangle A_1 NK.$$

Diese Kraft greift die Mauer in einem Punkte  $H$  an, so daß  $AH = \frac{1}{3} AB_1$  ist, und bildet mit der Normalen  $HJ$  zur Wandfläche in  $H$  den Winkel

$$PHJ = \varphi_1 = 26^\circ 34'.$$

Man zeichnet nunmehr das Kräftepolygon, indem man an einen beliebigen Punkt  $o$  den Erddruck  $P$  der Richtung und Größe nach gleich  $po$  anträgt. Ferner trägt man von  $o$  aus vertical die Strecke  $oe$  ab, welche dem Gewichte des Erdprismas  $FBB_1$  entspricht, und welche Strecke man in ganz ähnlicher Art gefunden hat, wie vorstehend für  $p$  angegeben worden.

Um nun das Gewicht der Mauer festzustellen, kommt man am einfachsten zum Ziele durch vorläufige Annahme einer ganz beliebigen Mauerstärke. Es sei zunächst die obere Mauerdicke gleich der mit Erde bedeckten Breite  $BF$ , und durch  $F$  unter der vorgeschriebenen Steigung ( $\frac{1}{3}$ ) das Profil  $FD_1$  eingetragen, und dieses Profil in ein Rechteck zur Basis  $b$  verwandelt. Die sich ergebende Höhe  $g_1$ , welche das Gewicht der Mauer  $ABFD_1$  darstellt, trage man dann im Kräftepolygon gleich  $eg_1$  an; gleichzeitig hat man den Schwerpunkt  $S_0$  des Erdprismas  $FBB_1$  und denjenigen  $S_1$  der Mauer  $ABFD_1$  zu bestimmen. Letzteres geschieht (§. Thl. I. Abschn. III, Cap. 2) am einfachsten, wenn man jede der parallelen Seiten des Trapezes um die andere nach entgegengesetzten Seiten verlängert, und den Durchschnitt der Verbindungsgeraden mit der Mittellinie sucht, welche die parallelen Seiten halbirt.

Wenn nun die Bedingung gestellt ist, die Mauer solle einem Stabilitätscoefficienten  $\sigma$  entsprechend construirt werden, so macht man  $oP = \sigma p$ , im vorliegenden Falle, in welchem  $\sigma = 3$  vorausgesetzt wurde, ist  $oP = 3p = 3 K_1 L_1$  gemacht worden. Zeichnet man nun in bekannter Weise das Seilpolygon, indem man durch den Durchschnittspunkt  $a$ , in welchem der Erddruck  $P$  das Gewicht  $E$  des kleinen Erdprismas  $FBB_1$  trifft, eine mit  $Pe$  Parallele bis zum Durchschnitte  $b_1$  mit dem Gewichte  $G_1$  der Mauer zieht und dann ferner durch  $b_1$  eine Parallele  $b_1 O_1$  zu  $Pg_1$  im Kräftepolygon legt. Diese Gerade  $b_1 O_1$ , welche die Richtung der Resultirenden aus  $\sigma P, E$  und  $G_1$  darstellt, trifft die Mauerkante in  $O_1$  und die unterste Fuge außerhalb der Mauer, woraus ohne weiteres folgt, daß die gewählte Dicke der Mauer nicht genügt. Nimmt man daher, ebenfalls beliebig, eine größere Mauerstärke an, begrenzt etwa die Mauer nach dem

Profil  $C_2 D_2$ , und wiederholt dieselbe Construction, indem man nunmehr das Gewicht  $G_2$  des Mauerkörpers  $ABC_2 D_2$  durch die Strecke  $eg_2$  im Kräftepolygon darstellt, so erhält man das Seilpolygon  $ab_2 O_2$ . Da hier die in der Richtung  $b_2 O_2$  wirkende Resultirende die Grundfläche  $AD_2$  innerhalb der Mauer schneidet, so folgt, daß die gewählte Mauerdicke unnötig stark ist, denn der gestellten Bedingung zufolge soll für den  $\sigma$ fachen Erddruck gerade die Stabilitätsgrenze erreicht werden, d. h. die Stützlinie gerade durch die Außenkante der Grundfläche gehen.

Die der Aufgabe entsprechende äußere Mauerbegrenzung  $CD$  wird daher zwischen  $C_1 D_1$  und  $C_2 D_2$  gelegen sein. Um diese Begrenzung jetzt schnell festzustellen, kann man nach Culmann\*) sich der sogenannten Fehlercurve bedienen, von welcher im vorliegenden Falle  $O_1$  und  $O_2$  zwei Punkte sind. Denkt man sich nämlich für alle möglichen zwischen  $C_1 D_1$  und  $C_2 D_2$  angenommenen, mit diesen parallelen Begrenzungen die Stützlinien construirt und deren Durchschnittspunkte  $O$  mit den zugehörigen vorderen Mauerflächen aufgesucht, so legen alle diese Durchschnitte zwischen  $O_1$  und  $O_2$  eine gewisse Curve fest, und derjenige Punkt, in welchem diese Curve die Grundfläche  $AD_2$  schneidet, entspricht offenbar der vorliegenden Aufgabe. Man erhält nun hier das Resultat genau genug, wenn man diese sogenannte Fehlercurve zwischen der kleinen Strecke  $O_1 O_2$  als Gerade ansieht, d. h. man erhält im Durchschnittspunkte  $D$  der Geraden  $O_1 O_2$  mit der Grundfläche den Punkt, durch welchen die Begrenzung der vorderen Mauerfläche  $DC$  unter der vorgeschriebenen Neigung zu legen ist. Legt man diese untere Breite  $AD = 1,73$  m zu Grunde, und bestimmt hierfür das Gewicht der Mauer  $G = eg$  und den Schwerpunkt derselben in  $S$ , so erhält man mit Hülfe des Kräftepolygons  $Poeg$  ein Seilpolygon  $abD$ , welches allerdings durch die äußere Mauerkante  $D$  geht, als Beweis, daß die ermittelte Mauerstärke der gestellten Bedingung eines Stabilitätscoefficienten gegen Umfallen gleich  $\sigma$  entspricht.

Will man auch den Stabilitätscoefficienten  $\sigma'$  für das Gleiten der Mauer auf der horizontal angenommenen Lagerfuge  $AD$  ermitteln, so hat man unter Annahme des einfachen Erddruckes gleich  $op$  das Kräftepolygon  $poeg$  zu Grunde zu legen und hiernach das Seilpolygon  $abJ$  zu verzeichnen. Die Lagerfuge wird demnach in  $J$  von der resultirenden Kraft  $R$  unter einem Winkel gegen die Normale getroffen, welcher Winkel durch  $ogp$  gegeben ist. Trägt man an  $og$  in  $g$  die Gerade  $gP'$  unter dem Reibungswinkel für die Steine in  $AD$  auf einander an, so erhält man in  $oP'$  diejenige Größe, welche der Erddruck annehmen müßte, bevor die Grenze der Stabilität in Hinsicht des Gleitens erreicht ist, und man findet den betreffenden Stabilitäts-

\*) S. Culmann, Graphische Statik.

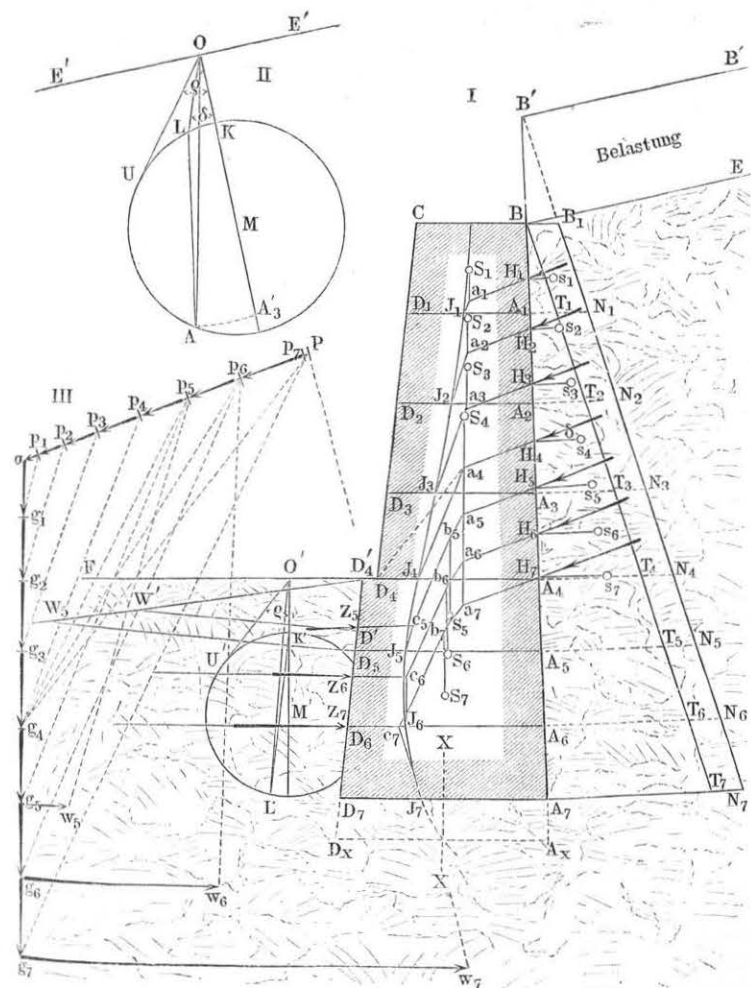
coefficienten für Gleiten durch das Verhältniß  $\frac{OP}{OP'} = \sigma'$ . Aus der Figur, in welcher für die Fuge  $AD$  gleichfalls ein Reibungswinkel  $\varphi = 38^\circ 40'$  angenommen und von der Cohäsion des Mörtels abgesehen ist, ergibt sich  $\sigma' = 3,14$ , also eine noch größere Stabilität gegen Gleiten, als gegen Umlaufen, so daß man keine Veranlassung haben wird, durch geneigte Lagerfugen die Stabilität gegen Gleiten zu vergrößern.

Der Abstand  $JM = y$ , in welchem die Stütze die Lagerfuge  $AD$  von deren Mitte  $M$  trifft, ergibt sich aus der Figur zu  $0,05 AD$ , folglich wird, da dieser Werth kleiner als  $\frac{1}{6} b$  ist, die Fuge nur durch Druckkräfte beansprucht, deren Größe nach dem im vorhergehenden Paragraphen Angeführten (s. Fig. 40), leicht bestimmt werden kann, wenn man berücksichtigt, daß der auf die Lagerfuge  $AD$  kommende Verticaldruck durch die senkrechte Höhe  $gp_0$  des Punktes  $p$  über demjenigen  $g$  dargestellt wird. Es kann bemerkt werden, daß die geringe Größe von  $y$  im vorliegenden Falle hauptsächlich der nach rückwärts übergeneigten Stellung der Futtermauer zuzuschreiben ist, in Folge deren die Schwerlinie durch den Schwerpunkt  $S$  der Mauer zwischen  $M$  und  $A$  fällt, und es kann in Folge einer solchen Neigung der Futtermauer der Schnittpunkt  $J$  unter gewissen Verhältnissen selbst nach  $M$  oder sogar zwischen  $M$  und  $A$  fallen.

In derselben Art, wie hier für die Grundfläche der Mauer gesehen, kann man auch für jede beliebige Lagerfuge den Durchschnittpunkt der Mitteldruckkraft aller der Kräfte bestimmen, welche auf das oberhalb dieser Fuge gelegene Mauerstück wirken. Denkt man sich diese Schnittpunkte sämmtlich durch einen fortlaufenden Curvenzug verbunden, so erhält man die Stütze, welche in ihrem Verlaufe die Stabilitätsverhältnisse und die Druckvertheilung für jedes Stück der Mauer in der angegebenen Weise zur Anschauung bringt. Dehnt man diese Construction auch auf das ganz im Erdinnern gelegene Fundament der Mauer aus, für welches man außer dem Erddrucke auf die hintere Seite auch den Erdschub auf die entgegengesetzte Seite zu berücksichtigen hat, so läßt sich auch leicht die Frage beantworten, wie tief man das Fundament in einem gegebenen Falle zu führen hat, um für die Standfläche desselben auf dem natürlichen Boden gewissen Bedingungen hinsichtlich der Druckvertheilung zu genügen. Hierfür mag in Fig. 43 noch ein Beispiel angeführt werden.

Es sei  $A_4 B C D_4$  das Profil einer Futtermauer, welche auf dem Fundamente  $A_4 D_4 D_7 A_7$  steht, und gegen welche sich rückwärts die durch die Ebene  $BE$  begrenzte Erdmasse lehnt, während die Oberfläche  $D_4 F$  der Erde vor der Mauer horizontal begrenzt sein soll. Die Erdoberfläche  $BE$  soll ferner noch durch Pflaster, Gebäulichkeiten oder daseibst abgelagerte Waaren einer zusätzlichen Belastung ausgesetzt sein, welche als eine gleichmäßig vertheilte Erdmasse von der oberen Begrenzung  $B' B'$  parallel zu

$BE$  gedacht werden kann. Es möge nun die Futtermauer durch eine beliebige Anzahl horizontaler Schnitte  $A_1 D_1, A_2 D_2 \dots A_7 D_7$  in ebensoviele Theile zerlegt werden, wie in Fig. 43.



viele einzelne Stücke zerlegt und es sollen die Gewichte der einzelnen Theile wie im vorigen Beispiele bestimmt werden. Demgemäß mögen die Abschnitte



$og_1, og_2 \dots og_7$  auf der Verticallinie im Kräftepolygon die Strecken sein, welche unter Annahme einer gewissen Basis  $b$  die Gewichte der einzelnen Mauerkörper darstellen, die oberhalb der gleichbezeichneten Fugen bis zur horizontalen Mauerkrone  $BC$  gelegen sind. Für die Mauer oberhalb des Fundaments seien ferner  $S_1 S_2 S_3$  und  $S_4$  die Schwerpunkte dieser Stücke, also z. B.  $S_3$  derjenige des Mauerkörpers  $A_3 B C D_3$ , wogegen  $S_5, S_6$  und  $S_7$  die Schwerpunkte der Fundamentkörper zwischen  $A_4 D_4$  und der betreffenden Lagerfuge sein mögen, derart, daß z. B.  $S_6$  den Schwerpunkt von  $A_4 D_4 D_6 A_6$  bedeutet.

Für die Bestimmung des Erddruckes  $P$  auf  $BA_7$  und des Erdschubes  $Q$  auf  $D_4 D_7$  soll hier die Mohr'sche Theorie des Erddruckes (s. §. 4) angewendet werden, nach welcher diese Kräfte wie folgt zu bestimmen sind.

Man ziehe in  $II$  die Gerade  $E'E'$  parallel der Terrainoberfläche  $BE$  und in  $O$  eine dazu Senkrechte  $OA'_3$  und eine Verticale  $OA$  und mache  $OA = OA'_3$  gleich dem normalen Abstände des Punktes  $A_3$  unter der Erdoberfläche  $BE$  in  $I$ . Legt man nun an die zur Oberfläche Normale  $OA'_3$  unter dem Winkel  $A'_3 O U = \varrho$  eine Gerade  $OU$ , so erhält man in dem diese Gerade  $OU$  berührenden Kreise, welcher durch  $A$  geht, und dessen Mittelpunkt  $M$  auf  $OA'_3$  liegt, nach §. 4 den Kreis für den unteren Grenzzustand des Gleichgewichts der Erdmasse. Zieht man daher durch  $A$  die mit der hinteren Wandfläche Parallele  $AL$ , so giebt  $OL$  den spezifischen Erddruck für den Punkt  $A_3$  in  $I$  und der Winkel  $LOA'_3$  den Winkel  $\delta$ , um welchen dieser Druck von der Normalen zur Wandfläche abweicht. Zieht man ferner durch  $A_1 A_2 \dots A_7$  Senkrechte zu  $BA_7$  und macht  $A_3 T_3 = OL$ , so erhält man, wenn man noch die Gerade  $BT_3$  zieht in den einzelnen Dreiecken  $BA_1 T_1, BA_2 T_2 \dots$  die Größe des Erddruckes auf die betreffenden Wandtheile für den Fall, daß die Erdoberfläche einer Belastung nicht ausgesetzt ist. Um daher mit Rücksicht auf die vorhandene Belastung  $BB'$  den Druck zu bestimmen, hat man nur durch den Durchschnittpunkt  $B'$  der Wandfläche mit der Belastungslinie eine Parallele  $B'N_7$  mit  $BT_7$  zu ziehen. Die hierdurch erhaltenen Trapeze  $BB_1 N_1 A_1, BB_1 N_2 A_2 \dots BB_1 N_7 A_7$  geben dann die Grundflächen von Erdprismen an, deren Gewichte bei der Länge von 1 m den Erddruck auf die betrachtete Wandfläche von 1 m Breite darstellen. Wenn man daher in der angegebenen Weise diese Erdprismen in Mauerprismen von gleicher Länge 1 m, und der Breite gleich der Basis  $b$  verwandelt, so erhält man in den gefundenen Höhen derselben die Erddrucke auf die entsprechenden Wandflächen von der Krone  $B$  bis zu dem gleichbezeichneten Horizontalschnitte  $A$ . Die so ermittelten Strecken sind im Kräftepolygon  $III$  als  $op_1, op_2, \dots op_7$  an die Verticale unter einem Winkel  $KOL = \delta$  gegen die Normale zur Wandfläche  $A_7 B$  angetragen. Auch ist es klar, daß man die Angriffspunkte

$H_1 H_2, \dots H_7$  dieser Erddrucke erhält, wenn man die Schwerpunkte  $s_1 s_2 \dots s_7$  der besagten Trapeze normal auf die Wandfläche nach  $H_1 H_2 \dots H_7$  projectirt. In diesen Punkten wirkt der Erddruck, wie schon erwähnt, unter dem Winkel  $\delta$  gegen die Normale zur Wandfläche. Ebenso hat man den Erdschub gegen die Vorderfläche des Banketts  $D'_4 D_7$  zu bestimmen, indem man durch irgend einen Punkt  $O'$  der horizontalen Erdoberfläche die Verticallinie  $OK'$  legt und gleich einer beliebigen Länge  $z$  macht, worauf man durch  $K'$  den Kreis zum Mittelpunkte  $M'$  legt, welcher die Gerade  $OU'$  berührt, die mit der Verticalen den Böschungswinkel  $M'O'U' = \varrho$  bildet. Von den beiden möglichen Kreisen gilt hier der größere, da es sich um den Erdschub handelt. Zieht man nun durch  $K'$  eine Parallele mit der Vorderfläche  $D'_4 D_7$  des Banketts, welche den Kreis  $M'$  in  $L'$  schneidet, so erhält man in der Strecke  $O'L'$  die Größe des spezifischen Erddruckes in einer verticalen Tiefe  $O'K' = z$  unter der Oberfläche, während der Winkel  $M'O'L' = \delta'$  die Abweichung angiebt, um welche der Erdschub gegen die Normale zu  $D'_4 D_7$ , und zwar nach oben gerichtet, geneigt ist. Zieht man daher in dem Punkte  $D'$ , welcher um  $z$  unter der Erdoberfläche liegt, eine Normale  $D'W'$  zu  $D'_4 D_7$  und macht  $D'W' = O'L'$ , und zieht man die Gerade  $D'_4 W'$ , so begrenzt die letztere zusammen mit der Wandfläche  $D'_4 D_7$  und den in  $D_5, D_6, D_7$  auf der Wandfläche Normalen diejenigen Dreiecke, welche dem Erdschube auf die Flächen  $D'_4 D_5, D'_4 D_6, D'_4 D_7$  entsprechen. In der Figur ist des beschränkten Raumes wegen nur das Dreieck  $D'_4 D_5 W_5$  vollständig gezeichnet, welches den Schub der Erde gegen die Fläche  $D'_4 D_5$  darstellt. Die Verwandlung dieser Dreiecke liefert dann wieder die Strecken, welche im Kräftepolygon als  $g_5 w_5, g_6 w_6, g_7 w_7$  in den betreffenden zugehörigen Punkten und der durch  $\delta'$  festgesetzten Richtung angetragen sind.

Die Angriffspunkte  $Z_5 Z_6 Z_7$  für den Erdschub liegen unter der Erdoberfläche  $F$  um  $\frac{2}{3}z$ , wenn  $z$  die Tiefe der zugehörigen Schnittfläche  $DA$  ist. Nimmehr läßt sich die Stützlinie leicht finden, wenn man für die einzelnen, je zwischen der Krone und den verschiedenen Lagerfugen enthaltenen Mauerstücke die Seilpolygone in der vorbeschriebenen Weise zeichnet. Diese Seilpolygone sind in der Figur mit  $HabcJ$  bezeichnet, und es genügt, die Construction an einem einzigen, etwa  $H_5 J_5$ , zu erläutern. Man verlängert dabei die Kraft des Erddruckes in  $H_5$  bis zum Durchschnitte  $a_5$  mit dem durch  $S_4$  gehenden Gewichte  $g_4$  des Mauertheils  $BA_4$ , zieht durch  $a_5$  eine Parallele mit  $p_5 g_4$  im Kräftepolygon bis zum Schnittpunkte  $b_5$  mit der in  $S_5$  anzunehmenden Schwerkraft  $g_5$  des Fundamentstückes  $A_4 A_5$ . Von dem so erhaltenen zweiten Knoten  $b_5$  des Seilpolygons zieht man nimmehr das nächste Seil parallel zu  $p_5 g_5$  bis zum Durchschnitte  $c_5$  mit dem Erdschube in  $Z_5$ , und endlich durch  $c_5$  eine Parallele zu  $p_5 w_5$ , wodurch man in  $J_5$  den Punkt erhält, in welchem die Querschnittsfläche  $A_5 D_5$  von der



resultirenden Kraft getroffen wird. Die Verbindung aller so erhaltenen Schnittpunkte  $J_1 J_2 \dots J_7$  führt zu der gesuchten Stützlinie.

Man erkennt aus der Figur, daß, während die Stützlinie in der oberen Mauer  $BA_4$  aus der ursprünglich verticalen Richtung bei  $S_1$ , nach unten hin in Folge des zunehmenden Erddruckes  $P$  mehr und mehr der äußeren Mauerfläche  $CD_4$  sich nähert, dieselbe im Fundamente durch den sehr schnell wachsenden Erdschub  $W$  wieder nach der Mitte hin gedrängt wird. Wollte man etwa die Bedingung stellen, daß die natürliche Bodenfläche, auf welcher die Mauer ruht, in allen Punkten gleichmäßig belastet werden soll, so hätte man offenbar das Fundament bis zu demjenigen Querschnitte  $A_4 D_4$  zu führen, in welchem die Stützlinie  $J$  mit der Mittellinie  $XX$  des Fundaments sich schneidet.

Um hier den Stabilitätscoefficienten für die Mauer  $BA_4$  zu bestimmen, hat man nur  $D_4$  mit  $a_4$  durch eine Gerade zu verbinden und im Kräftepolygon durch den Punkt  $g_4$  eine Parallele zu  $D_4 a_4$  zu ziehen, welche die Richtung des Erddruckes in  $P$  schneidet. Man schließt daraus, daß der Erddruck gegen die Mauerfläche  $BA_4$  die Größe  $oP$  annehmen muß, bevor die Grenze der Stabilität für die Fuge  $A_4 D_4$  erreicht wird, so daß man

den zugehörigen Stabilitätscoefficienten zu  $\sigma = \frac{oP}{oP_4}$  findet, welches Verhältniß aus der Figur sich im vorliegenden Falle zu 2,41 ergibt. Dieser Werth ist ebenso wie die in Bezug der Fig. 42 vorstehend angegebenen, einer im größeren Maßstabe gezeichneten Figur entnommen. Selbstredend wird ein graphisches Verfahren um so genauere Resultate ergeben, je größer der Maßstab ist, in welchem die Zeichnung ausgeführt ist. Bei der Prüfung der Verhältnisse von Futtermauern wird es in der Regel genügen, den Maßstab für die Zeichnung etwa zwischen  $\frac{1}{20}$  und  $\frac{1}{10}$  der natürlichen Größe anzunehmen, da diese Größe bei einigermaßen sorgfältiger Ausführung der Zeichnung eine Genauigkeit erzielen läßt, welche diejenige weit übertreffen dürfte, die bei der Ausführung von Mauerwerkskörpern erreichbar ist.

Anmerk. Der erste gründliche Schriftsteller über den Erddruck ist Coulomb, i. Théorie des machines simples par Coulomb. Weiter verfolgte diesen Gegenstand Prony in seinen Leçons sur la poussée des terres (1802); nächst dem findet man den Gegenstand gut und gedrängt bearbeitet in Navier's Leçons sur l'application de la mécanique etc., T. I, sowie in Persy's Cours de Stabilité des constructions. Ein besonderes Werk, in welchem auch die Beobachtungen und Theorien über den Erddruck aller seiner Vorgänger abgehandelt werden, lieferte Mayniel (1808) unter dem Titel: Traité expérimental etc. de la poussée des terres. Neue und in ziemlich großem Maßstabe ausgeführte Versuche sind von G. Martony de Kőszegh angestellt und in folgendem Werke veröffentlicht worden: Versuche über den Seitendruck der Erde, ausgeführt auf höchsten Befehl u. s. w. und verbunden mit den theoretischen Abhandlungen von

Coulomb und Français, Wien 1828. Das vollständigste Werk über den Erddruck u. s. w. hat Poncelet geliefert. Dasselbe ist aus dem Mémorial de l'officier du génie (1838) von Lahmeyer übersezt und unter dem Titel herausgegeben: Ueber die Stabilität der Erdbefestigungen und deren Fundamente, Braunschweig 1844. Gut und zum Theil eigenthümlich behandelt den Erddruck Mosely in seinen Mechanical principles of Engineering and Architecture, wovon Schöffler eine Uebersetzung geliefert hat. Auch in des letzteren Werke: Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken, 1857, findet sich der Gegenstand eingehend behandelt, ebenso wie in Hagen's Handbuche der Wasserbaukunst Thl. II. Ferner ist hier anzuführen: Nouvelles Expériences sur la poussée des terres, par Audé Paris 1849. Von neueren Schriften sind bereits im Vorstehenden die Arbeiten von Mohr und Winkler angeführt, welcher letztere seinem Werke eine kritische Zusammenstellung der verschiedenen Theorien beigefügt hat. Außerdem sind hier die Arbeiten von Guilhelm in den Annales des ponts et chaussées, 1858, Levy, Comptes rendus LXX, 1870, Considère, Ann. des ponts et chaussées, 1870, Rankine, Manual of civil engineering 1865, J. Weyrauch, Theorie des Erddrucks, Wien 1881, und anderen, sowie das ausführliche Werk Rebhanns, Theorie des Erddruckes und der Futtermauern 1871, zu erwähnen. Die graphischen Methoden finden sich in Culmann's bekannter graphischer Statik. Von allgemeinen Lehrbüchern sind zu nennen Ott', Baumechanik 1870, und Holzhey, Baumechanik, 1879.

## Die Theorie der Gewölbe.

§. 16. Gewölbe. Zur Ueberdeckung von Oeffnungen zwischen zwei festen Widerlagern oder Pfeilern dienen im Bauwesen die Gewölbe. Unter einem Gewölbe versteht man eine Vereinigung einer Anzahl von Steinen, welche vermöge ihrer Form mit ihren Seitenflächen sich gegen einander und gegen die festen Widerlager derartig stützen, daß sie unter dem Einflusse ihres Eigengewichtes sowie der auf ihnen ruhenden Belastung mit Hülfe der von den Widerlagern ausgeübten Reactionen im Zustande des Gleichgewichtes sind. Die gedachten Seitenflächen, in welchen je zwei benachbarte Steine sich gegen einander stützen, heißen Fugenflächen oder schlechtweg Fugen und zwar Lagerfugen, zum Unterschiede von den sogenannten Stoßfugen, d. h. den hierzu in der Regel senkrechten Flächen, in denen die einzelnen gewölbten Bogen mit ihren Stirnen zusammenstoßen. Unter den Wölbungen oder Leibungen werden diejenigen meist cylindrisch gekrümmten Flächen verstanden, welche durch die Koppfen der Steine gebildet sind, und zwar versteht man unter der inneren Leibung die der Oeffnung zugekehrte untere Wölbfläche, während die obere, die Belastung aufnehmende Wölbfläche, die äußere Leibung heißt. Die Wölbflächen haben in den meisten Fällen die Form von Cylinderflächen mit horizontaler Ase und mehr oder minder großem Halbmesser, welcher bei den sogenannten Scheitrechten Gewölben mit ebenen Wölbflächen als unendlich groß zu denken ist. Nur in einzelnen Fällen kommen abweichend gestaltete Gewölbe vor, unter welchen die sogenannten Kuppelgewölbe besonders hervorzuheben sind. Ebenso gehören conische Gewölbe, sowie cylindrische Gewölbe mit gegen den Horizont geneigten Axen, wie z. B. die sogenannten Kellerhals gewölbe zu den selteneren Vorkommnissen; wie auch die Ueberwöl-

bungen ringförmiger Räume nur ausnahmsweise, z. B. bei gewissen Ziegelöfen vorkommen. Je nachdem die beiden End- oder Stirnflächen eines Gewölbes senkrecht oder schief gegen die Ase gestellt sind, unterscheidet man die geraden von den schiefen Gewölben, von denen die letzteren eine besondere Wichtigkeit für den Brückenbau haben, da man durch örtliche Verhältnisse sehr häufig veranlaßt ist, die Ueberführung von Straßen und Eisenbahnen über Flüsse oder andere Straßen schräg gegen die letzteren anzuordnen. Je nachdem endlich die Widerlager hinsichtlich ihrer Anordnung symmetrisch zur Gewölbaze sind oder nicht, je nachdem namentlich die Höhe der beiden Widerlagsfugen oder Kämpfer gleich oder verschieden ist, kann man die Gewölbe in symmetrische und unsymmetrische unterscheiden.

Der verticale Querschnitt der cylindrischen oder Tonnengewölbe kann sehr verschieden gewählt werden. Derselbe kann ebensowohl die Kreisform, und zwar die Gestalt eines Halbkreises oder eines flachen Segmentes, wie auch diejenige einer Ellipse, Kettenlinie und, wie schon bemerkt, auch einer geraden Linie haben, wonach man Kreisgewölbe, elliptische, Ketten- und Scheitrechte Gewölbe unterscheidet. Anstatt der elliptischen Begrenzung wählt man der leichteren Darstellung wegen sehr häufig eine aus mehreren ohne Knick in einander übergehenden Kreisbögen zusammengesetzte sogenannte Korblinie, und spricht dann von Korbgewölben oder Korbbögen. Elliptische oder Korbbögen, bei denen die verticale Höhe in der Mitte, Pfeilhöhe, kleiner ist, als die horizontale Weite, Spannweite, heißen gedrückte Bögen, während man im entgegengesetzten Falle die Bögen wohl überhöhte nennt. Letztere kommen namentlich bei Tunnelgewölben vor, während für Brücken über Flüsse mit weiten Oeffnungen die flachen segmentförmigen, elliptischen oder Korbbögen angezeigt sind, welche dem Wasser genügenden Durchflußquerschnitt gewähren, ohne die unbequeme Höhe der Construction zu bedingen, wie sie Halbkreisbögen erfordern. Diese letzteren dagegen werden, wegen des geringen Seitenschubes gerade bei hohen Wegeüberführungen oder Viaducten meist angewendet. Eine besondere Form zeigt der bekannte, bei gothischen Bauten so viel angewendete Spitzbogen, dessen Querschnitt aus zwei, im höchsten Punkte oder Scheitel unter einem gewissen Winkel zusammenstoßenden Kreisbögen besteht, und welcher, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird, insbesondere für eine starke Belastung des Scheitels sehr geeignet ist, wie sie bei Thurm- und Kirchenbauten vorkommt.

Auch die Belastung der Gewölbe ist sehr verschieden. Während die gewölbten Decken großer Räume, z. B. in Museen und Kirchen, nur ihr eigenes Gewicht zu tragen haben, sind die Brückengewölbe durch die darüber fahrenden Wagen belastet, und dazu kommt bei Durchlässen unter hohen Eisenbahndämmen sowie bei Tunneln der Druck der über den Gewölben

befindlichen Erdmasse. Bei Gebäuden haben die gewölbten Zwischendecken die Belastung der Fußböden und die Fensterbögen das Gewicht der über ihnen befindlichen Mauermaassen zu tragen. Bei der Berechnung der Gewölbe hinsichtlich ihrer Stabilität ist es gebräuchlich, die Belastung durch das Gewicht von Mauerwerk auszudrücken, welches mit dem Gewölbmaterial gleiches spezifisches Gewicht hat, und es kommt daher, wie in dem Folgenden mehrfach gezeigt werden wird, in jedem einzelnen Falle darauf an, die für jeden Punkt des Gewölbes der daselbst stattfindenden Belastung entsprechende Höhe des Belastungskörpers zu ermitteln.

Als Material für die Gewölbe dienen bei den größten Spannweiten und Belastungen der Brücken meistens natürliche Bausteine, insbesondere Sand- und Kalksteine, während man in Backsteingebäuden die Gewölbe in der Regel ebenfalls aus Ziegelmauerwerk darstellt. Hierbei pflegt man bei der Verwendung von Haussteinmaterial die einzelnen Wölbsteine von solcher Länge anzuwenden, daß sie durch die ganze Gewölbstärke von der inneren bis zur äußeren Leibung hindurchreichen. Stärkere Gewölbe aus Ziegelmauerwerk dagegen führt man in einzelnen, der geringen Ziegellänge entsprechend dicken Gewölbschichten aus, welche entweder unter einander in regelrechtem Verlande, oder in isolirten Schichten dargestellt werden.

Wenn man bei der Ausführung auch, besonders bei Ziegelgewölben, in der Regel einen ausgezeichneten Cementmörtel verwendet, so pflegt man doch bei der Berechnung auf die Bindekraft des Mörtels nicht zu rücksichtigen, sondern anzunehmen, daß die Steine mit den Fugenflächen einfach auf einander gelegt sind, und daher zwischen den Fugen nur die betreffende Reibung auftritt. Diese Annahme muß gemacht werden, weil jedes Gewölbe, auch bei der sorgfältigsten Ausführung, durch Erschütterungen oder in Folge ungleichen Setzens der Widerlager Risse in den Fugen erhalten kann, wodurch also der Zusammenhang der Mörtelmasse verloren geht. Man hat die Wirkung des Mörtels hauptsächlich in einer Ausgleichung der Unebenheiten zu suchen, mit denen die Flächen der Steine immer mehr oder minder behaftet sind. Es ist klar, daß dieser Annahme zufolge in den Fugen eines Gewölbes nur rückwirkende Pressungen, aber keine Zugspannungen auftreten können.

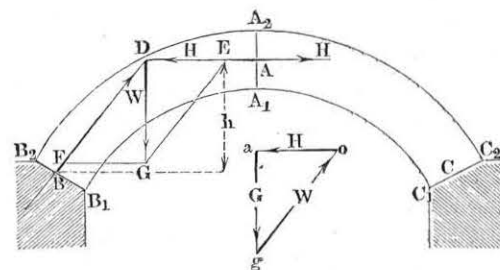
Was die Größe, d. h. die Spannweite der Gewölbe anbetrifft, so ist man hierin durch die entsprechende Widerstandsfähigkeit des Wölbsteinmaterials innerhalb gewisser Grenzen beschränkt. Die größten Spannweiten, welche man durch Gewölbe aus natürlichen Bausteinen hat überbrücken können, dürften wohl kaum mehr als etwa 60 m betragen\*), während

\*) Die Großenorbrücke über den Dee in England hat eine Spannweite von  $195' = 61$  m.

Spannweiten von 40 bis 50 m bei Brückenbögen häufig vorkommen. Die Höhe der Gewölbe steigt bei Brücken und Wegeüberführungen zuweilen bis 80 m\*) und darüber. Was die Länge der Gewölbe in der Längsrichtung anbetrifft, so ist dieselbe, den jeweiligen Umständen entsprechend, sehr verschieden. Während die Bögen über Fenster- und Thüröffnungen in Gebäuden nur eine Breite gleich der Dicke der zu tragenden Mauern haben, erstrecken sich die Gewölbe der Tunnel natürlich auf deren ganze oft viele Kilometer große Länge, wogegen die Breite der Brücken etwa zwischen 5 m und 20 m schwankt. Auf die Berechnung der Gewölbe ist, eine der ganzen Länge nach überall gleichmäßige Belastung vorausgesetzt, die Längenerstreckung ohne Einfluß, und es soll in den folgenden Untersuchungen immer ein Gewölbe vorausgesetzt werden, dessen Länge nach der Richtung der Axe 1 m beträgt. Ferner sollen zunächst die symmetrisch geformten und symmetrisch belasteten Tonnengewölbe besprochen und daran die Betrachtungen über die Verhältnisse abweichender Gewölbe angeschlossen werden.

**Die Stützlinie.** Es sei  $ABC$ , Fig. 44, der Durchschnitt durch ein §. 17. horizontales symmetrisches Tonnengewölbe von der axialen Länge gleich 1 m, welches zunächst nur sein Eigengewicht  $2G$  zu tragen haben soll, und man denke sich dieses Gewölbe durch die Scheitelfuge  $A_1A_2$  in zwei gleiche Theile  $AB$  und  $AC$  zerlegt, welche sich gegen die festen Widerlagsflächen  $B_1B_2$

Fig. 44.



und  $C_1C_2$  stützen, im Uebrigen aber zunächst als starre Balken angesehen werden sollen. Setzt man die Widerlager als unverrückbar fest voraus, so können die beiden Gewölbhälften ihrem Bestreben, zu fallen, nicht folgen. Es müssen daher, um das Gleichgewicht herzustellen, in den Stützflächen  $B_1B_2$

\*) Die Gölzthalbrücke der bayerischen Eisenbahn hat in vier übereinander stehenden Bogenreihen eine Höhe von  $250' = 73$  m, und der römische Aquädukt zu Nismes in Frankreich hat bei drei übereinander stehenden Bogenreihen  $150' = 49$  m Höhe.



und  $C_1 C_2$  gewisse Reactionen  $W$  der Widerlager auftreten, und ebenso müssen die beiden Gewölbhälften im Scheitel zwei gleiche und entgegengesetzte Reactionen  $H$  auf einander ausüben, welche sich gegenseitig aufheben. Aus der Symmetrie der ganzen Anordnung und Gewichtsvertheilung ergibt sich, daß die letztgedachten Scheitelreactionen  $H$  nur horizontal gerichtet sein können, im Uebrigen kennt man weder die Angriffspunkte noch die Größe der Kräfte  $H$  und  $W$ , und von letzteren auch nicht die Richtung; höchstens läßt sich aus der symmetrischen Anordnung die Uebereinstimmung der Widerstände  $W$  zu beiden Seiten  $B$  und  $C$  schließen. Die Aufgabe, die Reactionen  $W$  und  $H$  zu bestimmen, ist sonach von vornherein gänzlich unbestimmt, da den Gleichgewichtsbedingungen in unendlich verschiedener Weise durch Kräfte  $H$  und  $W$  genügt werden kann. Macht man jedoch gewisse einschränkende Annahmen, sei es über die Größe und Richtung von  $W$  oder über die Größe von  $H$ , so wird die Aufgabe bestimmt, sobald man von diesen gedachten drei Elementen zwei festsetzt. Sei z. B. die Lage des Angriffspunktes in der Scheitelfuge in  $A$  und in der Kämpferfuge in  $B$  resp.  $C$  angenommen, so ergibt sich aus dem bekannten Gewichte  $G$  der Gewölbhälfte, welches durch  $DG$  dargestellt sein mag, durch das Parallelogramm der Kräfte die Größe von  $H = ED$  und in  $DF$  der Größe und Richtung nach der Druck gegen das Widerlager  $B$ . Um das Parallelogramm zu zeichnen, hat man nur den Schnittpunkt  $D$  zu suchen, in welchem die in  $A$  horizontale Scheitelreaction  $H$  die Schwerlinie  $DG$  der Gewölbhälfte schneidet, dann findet man in der Verbindungslinie dieses Punktes  $D$  mit dem Angriffspunkte  $B$  die Richtungslinie für die Reaction des Auflagers. Hierbei ist nur die eine Hälfte  $AB$  des Gewölbes in Betracht gezogen, indem die andere Hälfte  $AC$  beseitigt, und durch die von ihr ausgeübte Reaction  $H$  ersetzt gedacht worden ist. Für diese rechte Hälfte gelten natürlich die gleichen Betrachtungen wie für die linke.

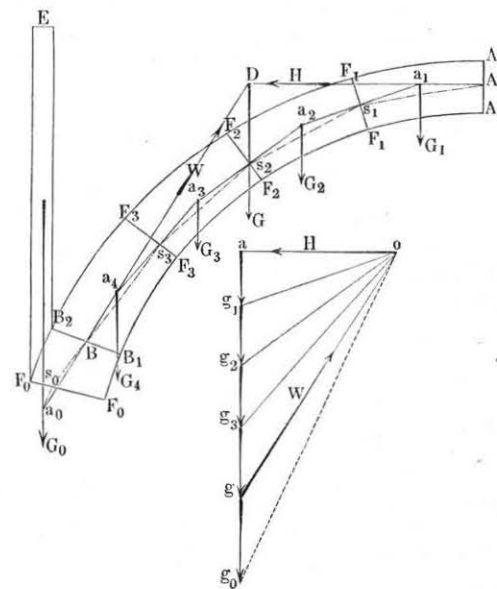
Man hat übrigens nicht nöthig, das Parallelogramm der Kräfte selbst zu zeichnen, sondern kann sich mit Vortheil des Kräftepolygons (s. Thl. I Anhang II) bedienen, indem man auf einer beliebigen Verticallinie die Strecke  $ag$  anträgt, welche nach einem passenden Kräftemaßstabe das Gewicht  $G$  der Gewölbhälfte darstellt. Zieht man durch  $a$  dann eine Horizontale und durch  $g$  eine Parallele mit der Reactionsrichtung  $BD$ , so erhält man in den Strecken  $oa$  und  $go$  die Größen von  $H$  und  $W$  nach dem zu Grunde gelegten Kräftemaßstabe.

In dieser Weise soll auch im Folgenden das Kräftepolygon den Betrachtungen zu Grunde gelegt werden. Aus der Figur erkennt man den Einfluß, welchen die Lage der Angriffspunkte auf die Größe der Reactionskräfte  $H$  und  $W$  ausübt. Es ist deutlich, daß die Horizontalkraft  $oa = H$  um so kleiner ausfällt, je steiler die Linie  $go$  oder  $BD$  ist, d. h. je höher

man den Angriffspunkt  $A$ , und je tiefer man denjenigen  $B$  wählt, oder je größer der verticale Abstand  $h$  der beiden Angriffspunkte  $A$  und  $B$  ist und umgekehrt. Die kleinste Horizontalkraft  $H_{min}$  würde man daher in dem vorliegenden Falle vermöge der Annahme von  $B_1$  und  $A_2$  als Angriffspunkte erhalten, während den Punkten  $B_2$  und  $A_1$  die größte Horizontalkraft  $H_{max}$  entspricht.

Die hier für die Kämpferfuge angestellte Betrachtung gilt in vollständiger Allgemeinheit für jede beliebige Fuge, überhaupt für jeden beliebigen Querschnitt des Gewölbes, wie aus Fig. 45 leicht ersichtlich ist. Wenn hier durch  $AB$  wieder die Hälfte eines symmetrischen Tonnengewölbes mit dem

Fig. 45.



Gewichte  $G$  und den Angriffspunkten der Reactionen in  $A$  und  $B$  dargestellt ist, so findet man, unter  $ag$  das Gewicht  $G$  verstanden, durch das Kräftepolygon  $oag$  in der beschriebenen Weise den Horizontaldruck  $H$  in  $oa$  und die Widerlagsreaction  $W = go$ . Wenn nun  $F_1$  eine beliebige Fuge vorstellt und  $G_1$  das Gewicht des Gewölbstückes  $F_1 A$  bedeutet, so kann man für dieses Stück die Fuge  $F_1$  nunmehr als Widerlagsfuge betrachten, und es muß das Stück  $F_1 A$  unter Einfluß der Horizontalkraft  $H$ , des Gewichtes  $G_1$  und der von der Fuge  $F_1$  ausgeübten Reaction  $W_1$  im Gleichgewichte sein. Ueber den

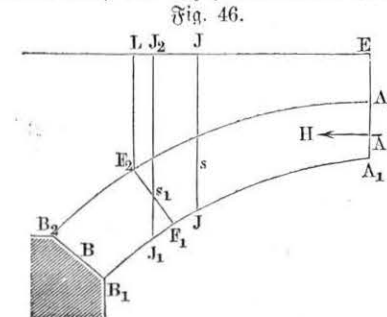


Angriffspunkt  $s_1$  dieser letzteren Reaction ist jetzt kein Zweifel mehr, da die Kraft  $H$  auch ihrer Größe nach bestimmt ist. Man fände diesen Punkt  $s_1$ , wenn man an den Durchschnittspunkt  $a_1$  zwischen  $H$  und  $G_1$  das Kräfteparallelogramm zeichnete, dessen Seiten die bekannten Kräfte  $G_1$  und  $H$  sind; die Diagonale gäbe dann die Druckkraft  $W_1$  und in ihrem Durchschnitte  $s_1$  mit der Fuge  $F_1$  den gesuchten Angriffspunkt. Einfacher findet man  $s_1$  durch Eintragen der Strecke  $ag_1 = G_1$  in den Kräfteplan und die von  $a_1$  mit  $og_1$  parallele Gerade  $a_1s_1$ . Es ist klar, daß man diese Construction für beliebig viele Fugenschnitte  $F_2, F_3 \dots$  wiederholen kann, wenn man nur in dem Kräftepolygon die Strecken  $g_1g_2, g_2g_3, g_3g_4$  gleich den Gewichten der einzelnen Gewöltheile  $F_1F_2, F_2F_3$  und  $F_3B$  macht und von den Durchschnitten  $a_2, a_3, a_4$  Parallelen zu den bezw. Strahlen  $og_2, og_3, og_4$  zieht. Auf diese Weise erhält man in den einzelnen Fugen die Angriffspunkte  $s_2, s_3 \dots$ , deren letzter natürlich mit dem im Kämpfer angenommenen Angriffspunkte  $B$  zusammenfallen muß. Wenn man alle diese aufeinander folgenden Punkte  $A, s_1, s_2, s_3, B$  mit einander durch gerade Linien verbindet, so erhält man ein Polygon, welches bei Annahme von unendlich vielen, unendlich nahe neben einander liegenden Querschnitten in eine stetige Curve übergeht. Diese Curve ist, wie aus ihrer Herleitung ohne Weiteres hervorgeht, in allen Punkten übereinstimmend mit der im §. 11 schon angeführten Mittellinie des Druckes, und führt auch bei den Gewölben diesen Namen, oder den Namen Stützklinie, welcher im Folgenden gebraucht werden soll.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen muß hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß diese Stützklinie oder der geometrische Ort für die Angriffspunkte  $s_1, s_2 \dots$  der Reactionen im Allgemeinen keineswegs identisch ist mit derjenigen Curve, in welche bei unendlicher Annäherung der Fugenquerschnitte das Seilpolygon  $a_1a_2a_3a_4$  übergeht. Dieser letztere Linienzug ist ein Seilpolygon mit allen Eigenschaften eines solchen, und geht wie dieses bei unendlich kleiner Fugenentfernung in eine Kettenlinie über, während dem Polygon  $As_1s_2s_3B$  die Eigenschaften eines Seilpolygons nicht zukommen. Nur in demjenigen Falle, wo die Gewichte  $G_1G_2 \dots$  der einzelnen Gewöltheile stets zwischen den Angriffspunkten  $A$  und  $s_1$ ;  $s_1$  und  $s_2$ ;  $s_2$  und  $s_3$  der zugehörigen Fugen hindurchgehen, fällt bei unendlicher Annäherung die aus  $As_1s_2s_3B$  hervorgehende Stützklinie mit der aus dem Seilpolygone  $a_1a_2a_3a_4$  sich ergebenden Kettenlinie zusammen, und nur in diesem Falle giebt die Stützklinie in ihrer Tangente an irgend welchen ihrer Punkte auch die Richtung des daselbst ausgeübten Druckes an. Daß die beiden Linien  $a$  und  $s$  in dem bemerkten Falle in eine einzige übergehen, zeigt auch die Figur, indem man daraus ersieht, wie z. B. die Höhe des Punktes  $a_2$  über  $s_1s_2$  um so geringer wird, je näher die beiden Fugen  $F_1$  und  $F_2$  zusammenrücken, und bei unendlich kleiner Entfernung derselben ebenfalls unendlich klein wird. Daß dieses Verhalten aber nur unter der gemachten Voraussetzung stattfindet, derzufolge das Gewicht  $G_2$  unter allen Umständen, auch bei der kleinsten Entfernung der Fugen  $F_1$  und  $F_2$ , zwischen deren Angriffspunkten

punkte  $s_1$  und  $s_2$  fällt, erkennt man ebenfalls aus der Figur. Denkt man sich nämlich in dem verlängert vorausgesetzten Bogen ein Element, durch die Fugen  $B_1B_2$  und  $F_1F_2$  begrenzt, welches, wie dies bei Gewölben immer der Fall ist, auf seiner Rückfläche  $F_1B_2$  durch ein Erd- oder Mauerprisma  $B_2F_2E$  belastet ist, so geht die Schwerlinie  $G_2$  dieses Elementes seitlich an  $B$  vorüber, und man erhält den zugehörigen Schnittpunkt mit der vorhergehenden Seilpolygonseite  $a_4B$  in  $a_2$ . Macht man nun im Kräfteplan die Strecke  $gg_2$  gleich dem Gewichte  $G_2$  des betrachteten Elementes  $B_2F_2E$ , und zieht durch den erhaltenen Schnittpunkt  $a_2$  eine Parallele mit  $og_2$ , so erhält man den Punkt der Stützklinie in der Fuge  $F_2$  rückwärts in  $s_2$ , und zwar bleibt die Entfernung  $a_2s_2$  immer eine meßbare Größe, auch wenn  $F_1F_2$  unendlich nahe an  $B_1B_2$  heranrückt. Man erkennt hieraus, daß die beiden gedachten Curven, die Stützklinie  $s$  und die Kettenlinie  $a$ , nicht zusammenfallen können, und aus der durch Figur  $B_1F_1EB_2$  dargestellten eigenthümlichen Belastungsart aller Gewölbe ergibt sich leicht, daß die für das Zusammenfallen oben gestellte Bedingung streng genommen nur bei Gewölben erfüllt sein würde, deren Dicke unendlich klein wäre.

Diese Kettenlinie, in welche das Seilpolygon  $a_1a_2a_3a_4$  übergeht, hat, wie aus dem Vorstehenden folgt, die Eigenschaft, daß die von irgend einem Punkte der Stützklinie wie  $s_3$  an sie gezogene Tangente die Richtung des in diesem Punkte  $s_3$  wirkenden Druckes angiebt. Mit Rücksicht hierauf wird sie wohl zuweilen als Drucklinie oder von Scheffler bezeichnender als Richtungslinie des Druckes benannt. Dieser Unterschied zwischen der Mittellinie des Druckes, welche hier Stützklinie genannt wird und der Richtungslinie des Druckes, welche eine Kettenlinie ist, wurde zuerst von Mosely \*) hervorgehoben, während von verschiedenen Autoren ein solcher Unterschied nicht gemacht wird, vielmehr zuweilen die aus dem Seilpolygon  $a_1a_2a_3$  sich ergebende Kettenlinie als Stützklinie bezeichnet wird. Hierzu mag die für die gewöhnlichen Verhältnisse der Gewölbe nur geringe Abweichung zwischen den beiden Curven und die Möglichkeit einer analytischen Behandlung der Kettenlinie die Veranlassung gewesen sein. Bei diesen analytischen Behandlungen denkt man in der Regel das Gewölbe nicht durch Fugenschnitte, sondern durch eine Anzahl verticaler Ebenen  $JJ$ , Fig. 46, in Lamellen zer-



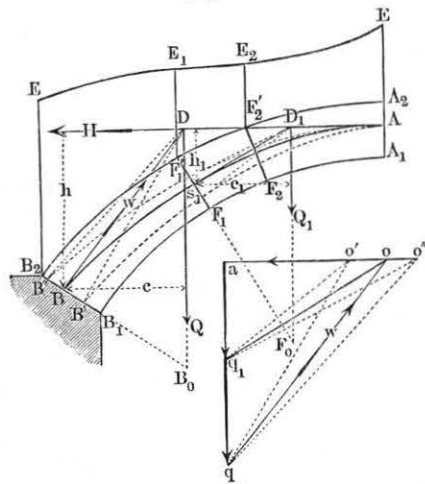
legt und die Curve bestimmt, welche die Durchschnittspunkte  $s$  der Mittelkräfte mit diesen Verticalen  $J$  enthält. Diese Curve ist allerdings eine Kettenlinie, da für sie die oben gestellte Bedingung erfüllt ist, derzufolge das Gewicht  $G_1$  jedes Elementes zwischen den beiden, diesem Elemente zugehörigen Punkten  $s$  und  $s_1$  hindurchgeht. Diese Linie ist aber, streng genommen, nicht die dem Fugenschnitte zukommende Mittellinie des Druckes, denn wenn man beispielsweise durch einen dieser Punkte wie  $s_1$  die Fuge  $F_1F_2$  hindurchlegt, so würde man den dieser

\*) Mosely, The mechanical Principles of Engineering and Architecture, übersetzt von Q. Scheffler.

Fuge zukommenden Punkt der Stützlinie durch Vereinigung der im Scheitel  $A$  wirkenden Horizontalkraft  $H$  mit dem Gewichte des Gewölbtheils  $A_1 F_1 F_2 L E$  erhalten, während  $s_1$  durch Zusammensetzung von  $H$  mit dem Gewichte des Stückes  $A_1 J_1 J_2 E$  gefunden ist. In welcher Weise die analytische Behandlung des Gewölbes mit Hülfe einer solchen Zerlegung durch Verticalebenen geschehen kann, wird weiter unten gezeigt werden.

§ 18. **Eigenschaften der Stützlinie.** Da die Stützlinie für die Beurtheilung der Stabilität der Gewölbe von großer Bedeutung ist, so mögen zunächst die wichtigsten hier in Frage kommenden Eigenschaften derselben näher ins Auge gefaßt werden. Aus dem vorhergehenden Paragraphen ist es deutlich, wie man für irgend ein symmetrisches Gewölbe, dessen Belastungsverhältnisse gegeben sind, die Stützlinie jederzeit construiren kann, sobald die Horizontalkraft  $H$  Fig. 47 und deren Angriffspunkt  $A$  im Scheitel bekannt

Fig. 47.



Querschnitte eine gewisse gerade oder krumme Linie  $EE$  als obere Profilinie der auf dem Gewölbe ruhenden Belastungsmasse, welche Linie schlechtweg Belastungslinie genannt wird. Indem man beliebig viele Fugen wie  $F_1 F_1'$  und durch  $F_1'$  die Verticale  $F_1' E_1$  zeichnet, kann man durch Rechnung oder Construction die Gewichte und Schwerpunkte der einzelnen Gewölbesteine einschließlich der auf sie entfallenden Belastungen bestimmen. So z. B. würde für den durch die Fugen  $F_1$  und  $F_2$  begrenzten Wölbsstein das Gewicht eines Mauerprismas von 1 m Länge und der durch  $F_1 F_1' E_1 E_2 F_2' F_2$  dargestellten Grundfläche als Belastung gefunden werden.

Hat man in solcher Weise das Gewölbe in beliebig viele Theile zerlegt, und deren Gewichte sowie ihre Schwerlinien bestimmt, so findet man für eine bestimmte Horizontalkraft  $H$ , welche in dem Punkte  $A$  der Scheitelfuge angreifen soll, die Stützlinie leicht mit Hülfe des Kräftepolygons, in welchem  $oa = H$  gemacht und  $aq$  vertical und gleich dem Gesamtgewichte  $Q$  der Gewölbhälfte angetragen ist. Zieht man nämlich durch  $A$  horizontal bis zum Durchschnitte  $D$  mit der Belastung  $Q$ , so liefert die durch  $D$  parallel mit  $oa$  gezogene Gerade  $DB$  in  $B$  den Angriffspunkt  $B$  in der Kämpferfuge. In gleicher Weise erhält man den Angriffspunkt  $s_1$  der Fuge  $F_1$ , wenn man im Kräftepolygon  $aq_1$  gleich dem Gewichte  $Q_1$  des Gewölbtheiles zwischen  $F_1$  und dem Scheitel  $A$  macht und eine zu  $oa_1$  parallele Gerade  $D_1 s_1$  durch den Punkt  $D_1$  zieht, in welchem das besagte Gewicht  $Q_1$  von der Horizontalkraft  $H$  getroffen wird. Wenn nicht  $H$ , sondern dafür außer dem Scheitelangriffspunkte  $A$  noch ein zweiter Punkt, z. B.  $s_1$  gegeben ist, so ergibt sich die Construction ohne Weiteres, wenn man diesen zweiten Punkt  $s_1$  mit dem Durchschnitte  $D_1$  verbindet und mit dieser Verbindungslinie eine Parallele durch  $q_1$  im Kräftepolygon zieht, welche auf der Horizontalen die Schubkraft  $H = oa$  abschneidet.

Es geht aus Obigem hervor, daß für irgend welche Fuge die horizontale Componente der auf sie wirkenden Druckkraft  $W$  eine und dieselbe Größe mit der Kraft  $H$  hat, welche im Scheitel wirkt, und man spricht daher bei einem Gewölbe schlechtweg von der Horizontalkraft oder der Schubkraft desselben, welche nach dem Vorstehenden für alle Punkte eine constante Größe  $H$  hat.

Gesetzt, die Curve  $As_1 B$  wäre die mit  $H = oa$  gezeichnete Stützlinie, so erkennt man sogleich, das bei Festhaltung desselben Angriffspunktes  $A$ , aber bei Aenderung der Größe des Schubes  $H$ , die sich ergebende Stützlinie eine andere wird, und zwar wird bei einem kleineren Werthe von  $H$  etwa gleich  $o'a$  die neue Stützlinie  $AB'$  von  $A$  aus ganz unterhalb der vorherigen  $AB$  verbleiben, da alle im Kräfteplane von  $o'$  gezogenen Strahlen wie  $o'q_1, o'q_2 \dots$  größere Neigungen gegen den Horizont haben, als die entsprechenden von  $o$  aus gezogenen Geraden  $oq_1, oq_2 \dots$ . Ebenso wird ein größerer Schub  $H$ , etwa gleich  $o''a$ , eine flachere Stützlinie  $AB''$  liefern, welche von  $A$  aus ganz oberhalb der zuerst gezeichneten  $AB$  verbleibt. Würde man  $H$  bis ins Unendliche wachsen lassen, so würde man als Stützlinie die Horizontale  $AH$  bekommen, da gegen ein unendlich großes  $H$  die endlichen Werthe von  $Q$  verschwinden. Dagegen erhält man bei einer Abnahme der Schubkraft  $H$  bis zu Null eine Stützlinie, welche die Durchschnitte  $B_0, F_0 \dots$  der Gewichte  $Q$  mit den zugehörigen Fugenverlängerungen in sich aufnimmt.

Hieraus geht hervor, daß es für irgend einen Punkt  $A$  der Scheitelfuge

als Angriffspunkt des Horizontalschubes eine unendlich große Anzahl von Stützklinien giebt, welche sich von einander durch die Größe der Schubkraft  $H$  unterscheiden, und von denen je zwei außer dem gemeinschaftlichen Angriffspunkte  $A$  keinen zweiten Punkt mit einander gemein haben können.

Die letztere Behauptung erhellt ohne Weiteres aus der Bemerkung, daß für jeden Punkt einer Stützklinie die Momentensumme aller derjenigen Kräfte gleich Null sein muß, die auf ein beliebiges Gewölbstück wirken, welches von der Fuge durch diesen Punkt seinen Ausgang nimmt. So hat man z. B. für den Punkt  $B$  die Momentengleichung  $Qc = Hh$  oder  $H = Q \frac{c}{h}$ , wenn  $h$  die verticale Höhe von  $H$  über  $B$  und  $c$  den horizontalen Abstand des Gewichtes  $Q$  von  $B$  bedeutet. In derselben Weise gilt für den Punkt  $s_1$  der Fuge  $F_1$ , wenn dessen Abstand von  $H$  durch  $h_1$  und von  $Q_1$  durch  $c_1$  bezeichnet wird, auch

$$Q_1 c_1 = H h_1 \text{ oder } H = Q_1 \frac{c_1}{h_1}.$$

Sollten daher irgend zwei der oben erwähnten durch  $A$  gehenden Stützklinien mit den verschiedenen Schubkräften  $H_1$  und  $H_2$  sich noch in einem Punkte schneiden, dessen Tiefe unter  $A$  etwa  $h_0$  sein möge, und für welchen das Moment des zwischen diesem Punkte und dem Scheitel  $A$  gelegenen Gewölbtheiles durch  $Q_0 c_0$  gegeben sein mag, so hätte man

$$Q_0 c_0 = H_1 h_0 = H_2 h_0, \text{ d. h. also } H_1 = H_2,$$

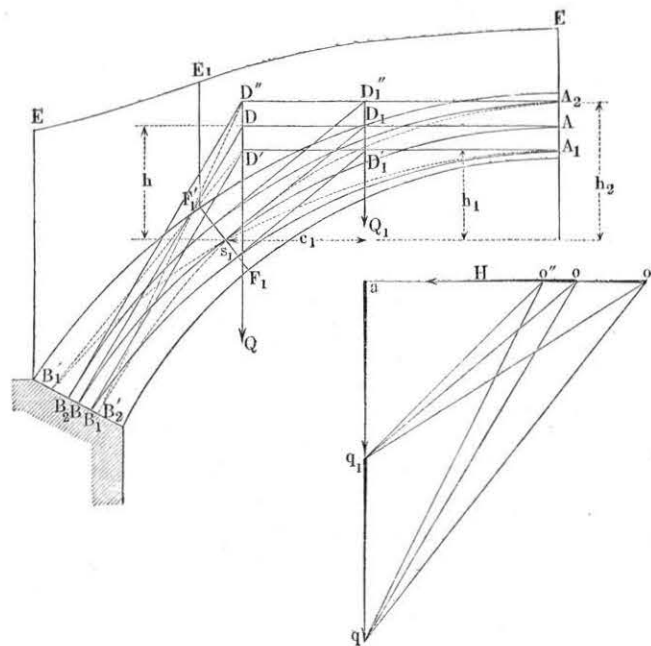
oder die beiden Stützklinien, welche außer dem Scheitelangriffspunkte  $A$  noch einen Punkt gemein haben, fallen in eine einzige zusammen.

Aus dem Vorstehenden folgt auch, daß von irgend zwei durch denselben Punkt  $A$  gehenden Stützklinien, wie  $AB$  und  $AB'$ , diejenige dem größeren Horizontalschube entspricht, welche der durch diesen Punkt  $A$  geführten Horizontalen am nächsten liegt, d. h. welche zwischen dieser Horizontalen und der anderen Stützklinie liegt. Es wird sich aus dem Nachfolgenden ergeben, daß dieses Verhalten allgemein gilt, auch wenn der Durchschnittspunkt nicht gerade im Scheitel liegt.

Es sei wieder  $As_1B$ , Fig. 48, eine für den Horizontalschub  $H = oa$  construirte Stützklinie der Gewölbbälfte  $ABE$ , und man denke sich nunmehr unter Beibehaltung der Größe des Horizontalschubes  $H$ , dessen Angriffspunkt in der Scheitelfuge von  $A$  etwa nach  $A_1$  verlegt, so wird dadurch an dem Kräftepolygon  $oag$  nichts geändert, und die von  $o$  ausgezogenen Strahlen wie  $oq, oq_1$  etc behalten sämmtlich ihre Richtung bei. Zeichnet man daher jetzt für denselben Horizontalschub  $H = oa$  die durch  $A_1$  gehende Stützklinie  $A_1B_1$ , so ist es klar, daß dieselbe in ihrem ganzen Verlaufe unter-

halb der erstgezeichneten  $AB$  verbleiben muß, wenn  $A_1$  tiefer als  $A$  angenommen wurde, während sie dagegen, wie  $A_2B_2$  in allen Punkten oberhalb

Fig. 48.



$AB$  gelegen ist, sobald der Scheitelangriff  $A_2$  höher als  $A$  gelegt wird. Daß zwei mit gleicher Horizontalkraft  $H$  construirte von verschieden hoch gelegenen Punkten der Scheitelfuge ausgehende Stützklinien nirgend einen Punkt mit einander gemein haben können, folgt wie vorstehend schon daraus, daß für diesen Punkt die Momentengleichung bestehen muß

$$Qc = Hh_1 = Hh_2,$$

wenn  $h_1$  und  $h_2$  seine verticalen Abstände von den beiden Angriffspunkten im Scheitel bedeuten, und  $Qc$  das Moment des zwischen diesem Punkte und dem Scheitel gelegenen Gewölbtheils ist. Obige Gleichung kann nur durch die Bedingung  $h_1 = h_2$  erfüllt werden, woraus sich wieder ergibt, daß zwei Stützklinien von gleichem Horizontalschube  $H$  in eine einzige zusammenfallen, sobald sie einen Punkt mit einander gemein haben.



Denkt man sich nun für die durch  $A_1$  gehende Stütze  $A_1 B_1$  den Schub  $H$  vergrößert, so wird dieselbe dadurch nach dem Vorstehenden eine flachere Lage annehmen, und man erhält bei einer gewissen Vergrößerung von  $H$  auf  $H_1$  eine neue Stütze  $A_1 B'_1$ , welche die zuerst gezeichnete  $AB$  in einem Punkte  $s_1$  durchschneidet. In gleicher Weise erkennt man, wie die in  $A_2$  beginnende Stütze  $A_2 B_2$  durch eine Verringerung der Schubkraft  $H$  sich von  $A_2$  aus auf ihrem ganzen Verlaufe senkt, und somit ebenfalls zum Durchschnitt mit  $AB$  in irgend einem Punkte wie z. B.  $s_1$  gebracht werden kann. Für einen solchen Durchschnittspunkt zweier Stütze, wie  $s_1$  ergibt sich nun leicht eine bemerkenswerthe Eigenschaft. Bezeichnet man nämlich mit  $h, h_1$  und  $h_2$  die verticale Tiefe des Schnittpunktes  $s_1$  unter den Angriffspunkten  $A$  und bezw.  $A_1$  und  $A_2$ , und ist  $c_1$  der horizontale Abstand des Schnittpunktes  $s_1$  von der Schwerlinie des Gewölbsstückes  $A_1 F_1 F'_1 E_1 E$  zwischen dem Scheitel und der durch  $s_1$  gelegten Fuge, so hat man, unter  $Q_1$  dieses Gewicht verstanden, dem allgemeinen Character der Stütze zufolge für  $s_1$  die Momentengleichung:

$$Q_1 c_1 = Hh = H_1 h_1 = H_2 h_2.$$

Wenn man daher von den unendlich vielen Stütze, welche durch einen beliebigen Punkt wie  $s_1$  hindurchgehen irgend zwei, z. B.  $As_1$  und  $A_1 s_1$  herausgreift, so haben deren im Scheitel angreifende Schubkräfte  $H$  und  $H_1$  für den gemeinschaftlichen Punkt  $s_1$  ein gleiches Moment. Denkt man sich die eine Schubkraft, etwa  $H_1$  in  $A_1$  in zwei horizontale Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine ihrer Größe und Lage nach mit  $H$  übereinstimmt, so muß also nach den bekannten Regeln für die Zusammensetzung paralleler Kräfte die zweite Componente welche durch  $H_1 - H$  ausgedrückt ist, durch den gemeinsamen Punkt  $s_1$  gehen. Die erforderliche Größe von  $H_1$  findet man leicht, wenn man  $s_1$  mit dem Durchschnitte  $D'_1$  verbindet und durch  $q_1$  im Kräfteplane eine Parallele  $q_1 o'$  mit  $s_1 D'_1$  zieht, wodurch man

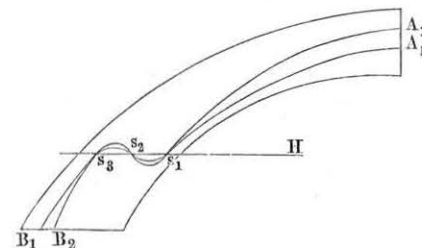
$$H_1 = o'a \text{ und } H_1 - H = o'o$$

erhält. Da dieselbe Betrachtung für irgend zwei durch  $s_1$  gehende Stütze, also z. B. auch für  $As_1$  und  $A_2 s_1$  gilt, so muß auch die Schubkraft  $H_2$  in  $A_2$  sich zusammensetzen aus der Schubkraft  $H$  in  $A$  und einer durch  $s_1$  gehenden Componente, welche in diesem Falle nach der entgegengesetzten Richtung von  $H$  wirkt, so daß  $H_2$ , wie schon bekannt, kleiner ausfällt als  $H$ . Zieht man mit  $s_1 D''$  eine Parallele  $q_1 o''$  durch  $q_1$ , so erhält man in  $o''a$  die Schubkraft  $H_2$  und in  $o'o$  die entgegengesetzte Componente, welche mit  $H$  zusammen die Horizontalkraft  $H_2$  ergibt.

Aus dem Vorstehenden folgt ferner ohne Weiteres, daß, wenn zwei Stütze sich in mehr als einem Punkte durchschneiden sollten, dies nur in der Weise geschehen kann, daß sämtliche Schnittpunkte auf einer

und derselben Horizontallinie liegen müssen, denn für jeden einzelnen Schnittpunkt gilt die oben gefundene Beziehung, wonach durch denselben jene durch die Differenz der beiden Schubkräfte dargestellte Componente hindurchgehen muß. Zwei Stütze von der Form  $AB$  und  $A_1 B_1$  Fig. 49, wie sie unter dem Einflusse isolirter Belastungen (s. weiter unten), wohl möglich sind, können sich daher nur in Punkten  $s_1, s_2, s_3$  schneiden, welche sämmtlich auf einer und derselben Horizontallinie  $HS_3$  liegen.

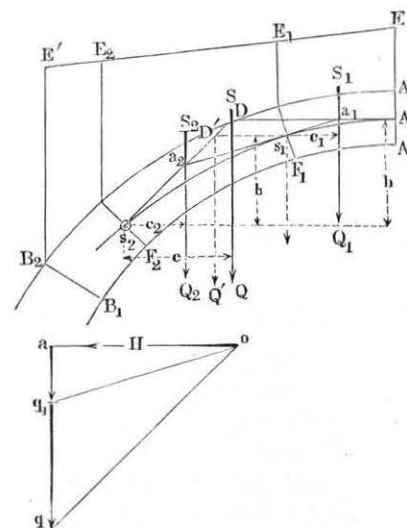
Fig. 49.



Zwei Punkte  $s_1$  und  $s_2$  dagegen, Fig. 50, welche nicht in gleicher Höhe liegen, können nicht zwei verschiedenen Stütze angehören, oder mit anderen

Worten, durch zwei beliebige Punkte  $s_1$  und  $s_2$  ist die Stütze eines symmetrischen Gewölbes unzweideutig bestimmt, vorausgesetzt natürlich, daß die Art der Belastung d. h. die Belastungslinie  $E$  gegeben ist. Will

Fig. 50.





man in diesem Falle zur Ermittlung der Stützlinie die noch unbekannte Schubkraft  $H$ , sowie deren ebenfalls noch nicht bekannten Angriffspunkt  $A$  in der Scheitelfuge durch Rechnung bestimmen, so sei unter  $Q_1$  das Gewicht des Gewölbstückes  $F_1 E$  und unter  $e_1$  dessen horizontaler Abstand von  $s_1$ , ebenso unter  $Q$  das Gewicht von  $F_2 E$  und unter  $e$  dessen Abstand von  $s_2$  verstanden. Ferner sei  $b$  der verticale Höhenunterschied der gegebenen Punkte  $s_1$  und  $s_2$  und  $h$  die noch unbekannte Höhe des Scheitelangriffes  $A$  über  $s_2$ . Dann hat man für diese Punkte die Momentengleichungen:

$$H(h - b) = Q_1 e_1$$

und

$$Hh = Qc,$$

woraus

$$H = \frac{Qc - Q_1 e_1}{b} \dots \dots \dots (1)$$

und

$$h = \frac{Qbc}{Qc - Q_1 e_1} \dots \dots \dots (2)$$

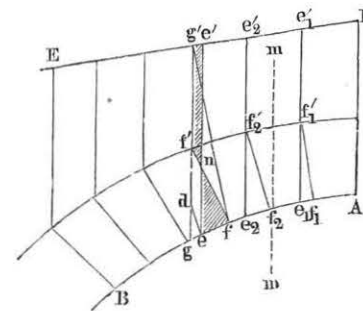
folgt. Diese Formeln können dazu dienen, die Elemente  $H$  und  $h$  für die Bestimmung der Stützlinie durch Rechnung zu bestimmen. Es läßt sich aber auch durch Construction die Aufgabe leicht lösen: durch zwei gegebene Punkte eines symmetrischen Gewölbes die Stützlinie zu zeichnen. Da diese Aufgabe bei der Prüfung der Gewölbe öfter vorkommt, so mag ihre Lösung hier noch angeführt werden.

Die in dem einen der gegebenen Punkte  $s_1$  wirkende Mittelkraft  $W_1$  setzt sich zusammen aus dem noch unbekannten Horizontalschube  $H$  und dem bekannten Gewichte  $Q_1$  des zwischen  $s_1$  und dem Scheitel gelegenen Gewölbstheiles  $F_1 E$ . Denkt man daher diese in  $s_1$  wirkende Mittelkraft  $W_1$  in diese beiden Componenten zerlegt, so steht der zwischen  $s_1$  und  $s_2$  enthaltene Gewölbstheil  $F_2 s_2 E_2 E_1 s_1 F_1$  im Gleichgewichte unter dem Einflusse seines Eigengewichtes  $Q_2$  im Schwerpunkte  $S_2$ , der Kräfte  $H$  und  $Q_1$  in  $s_1$  und des unbekannten Stützwiderstandes  $W_2$  in  $s_2$ . Bestimmt man daher in  $Q'$  die verticale Mittelkraft der beiden in  $S_2$  und  $s_1$  wirkenden Belastungen  $Q_2$  und  $Q_1$ , so hat man nur durch  $s_1$  eine Horizontale zu legen, deren Durchschnitt  $D'$  mit  $Q'$  die Richtung  $s_2 D'$  für den Stützwiderstand in  $s_2$  angiebt. Zieht man daher im Kräftepolygon, in welchem  $a q_1 = Q_1$  und  $q_1 q = Q_2$  also  $a q = Q$  ist, durch  $q$  eine Parallele  $q o$  mit  $s_2 D'$ , so erhält man in  $o a$  die Horizontalkraft  $H$ , deren Angriffspunkt  $A$  in der Scheitelfuge sich ergibt, wenn man das Seil  $s_2 D'$  bis zum Durchschnitte  $D$  mit dem im Schwerpunkte  $S$  des ganzen Gewölbes  $F_2 E_2 E$  wirkenden Gewichte  $Q$  verlängert, und durch  $D$  eine Horizontale  $DA$  zieht. Der Durchschnitt  $a_1$  dieser letztgedachten Horizontalen mit dem Gewichte  $Q_1$  muß übrigens bei

genauer Construction, wie leicht zu erkennen ist, mit dem Stützpunkte  $s_1$  und dem Durchschnittspunkte  $a_2$  zwischen dem Gewichte  $Q_2$  und dem Seile  $s_2 D$  auf einer und derselben Geraden liegen, welche mit  $o q_1$  im Kräfteplane parallel ist. Zur Bestimmung der Schwerlinie  $SQ$ , sowie der Mittelkraft  $Q'$  kann man sich am Besten des Kräfteplans bedienen, indem man unter Annahme einer ganz beliebigen Horizontalkraft ein Seilpolygon construirt, dessen Endseile in bekannter Weise in ihrem Durchschnitte einen Punkt ergeben, durch welchen die gesuchte Resultirende der betreffenden Schwerkräfte hindurchgeht.

Um die Gewichte und Schwerpunkte der durch die Fugenschnitte  $f_1 f_2 \dots$ , Fig. 51, gebildeten Theile des Gewölbes und ihrer Belastung wie  $f_2 f_2' e_2' e_1' f_1' f_1$

Fig. 51.



zu ermitteln, kann man zwar nach den bekannten Regeln die Verwandlung dieser Querschnitte in Rechtecke von einer gemeinschaftlichen Basis  $b$ , (s. §. 15) vornehmen, doch wird man schneller und in den meisten Fällen mit hinreichender Genauigkeit zum Ziele kommen, wenn man durch die äußeren Fugenkanten  $f_1' f_2' \dots$  verticale Ebenen  $e_1, e_2 \dots$  gelegt denkt und für die gedachte Querschnittsfigur

$f_2 f_2' e_2' e_1' f_1' f_1$  den als Trapez anzusehenden Querschnitt  $e_1 e_1' e_2' e_2$  einführt, dessen Schwerlinie in seiner Mittellinie  $m m$  vorausgesetzt werden kann. Bei flachen Gewölben und hohen Belastungen wird der hierdurch begangene Fehler nur klein sein und insbesondere für die nahe dem Scheitel gelegenen Fugen gering ausfallen. Will man jedoch für stärker geneigte Fugen, wie z. B.  $f f'$  eine größere Genauigkeit erzielen, so kann man durch eine Correctur, (Fugencorrectur), anstatt der durch  $f'$  geführten Verticalebene  $f' g'$  eine andere verticale Theilungsebene  $ee'$  von solcher Lage einführen, daß die beiden schraffirten Figuren  $enf$  und  $nf' g' e'$  gleichen Flächeninhalt haben. Um  $ee'$  zu ermitteln, kann man noch durch die Mitte  $d$  von  $f' g$  eine Parallele  $de$  zu  $g' f$  legen, um in  $e$  den Punkt zu erhalten, durch welchen die corrigirte Theilebene  $ee'$  geführt werden muß. Die Richtigkeit dieser Construction ergibt sich leicht mit Rücksicht darauf, daß wegen der gezogenen Parallelen

$$g' g : g f = d g : g e = d g \sin \gamma : g e \sin \gamma$$

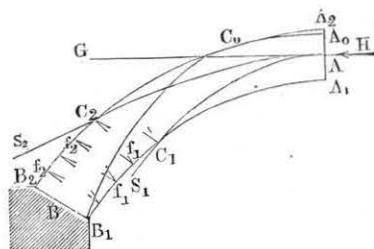
ist, wenn  $\gamma$  den Winkel bei  $g$  bedeutet; also ist auch

$$g'g \cdot ge \sin \gamma = gf \sin \gamma \frac{1}{2} f'g,$$

d. h. das Dreieck  $f'gf$  ist annähernd gleich dem Trapez  $g'gee'$ , folglich sind auch nach Abzug von  $gf'ne$  die schraffirten Flächenstücke annähernd gleich groß.

§. 19. **Mögliche Stützlinien.** Von den unendlich vielen Stützlinien, welche sich nach dem Vorhergehenden für ein Gewölbe zeichnen lassen, indem man der Schubkraft  $H$  alle möglichen Größen von 0 bis  $\infty$  ertheilt denkt und ihren Angriff  $A$  im Scheitel beliebig annimmt, werden nur gewisse Stützlinien mit der Stabilität und Widerstandsfähigkeit des Gewölbes verträglich sein. Zunächst ist es klar, daß eine Stützlinie, welche einem Gleichgewichtszustande des Gewölbes entsprechen soll, in ihrem ganzen Verlaufe zwischen dem Scheitel und den Kämpferfugen gänzlich im Innern der Gewölbedecke verbleiben muß, denn sobald die Stützlinie irgendwo die innere oder äußere Leibung durchschneidet, würde dadurch bedingt sein, daß eine Bewegung einzelner Gewöltheile um die betreffende Schnittlinie stattfinden müßte. Würde z. B. für ein Gewölbe  $AB$ , Fig. 52, eine in  $A$

Fig. 52.



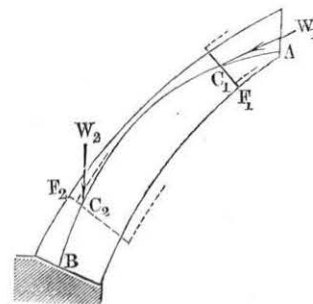
beginnende Stützlinie  $AS_1$  die innere Leibung bei  $C_1$  schneiden, so müßte das zwischen  $C_1$  und  $A$  befindliche Gewölbstück nicht nur um die Kante  $C_1$  eine Rechtsdrehung annehmen und herabfallen, sondern es würden auch alle zwischen  $C_1$  und dem Widerlager  $B$  befindlichen Gewöltheile herabstürzen, indem die

inneren Kanten  $f_1$  der Fugen als Drehkanten anzusehen wären, diese Fugen sich daher außen öffneten. Wollte man, um dieses Herabstürzen zu verhindern, der Horizontalkraft  $H$  einen größeren Werth geben, so würde nach dem Vorhergehenden dadurch die Stützlinie der Horizontalinie genähert, also gehoben und sie würde, wenn sie etwa nach  $AB$  fiel, einem möglichen Gleichgewichtszustande des Gewölbes entsprechen können. Daß die gedachte Vergrößerung von  $H$  und die damit verbundene Erhebung der Stützlinie gewisse Grenzen nicht überschreiten darf, lehrt gleichfalls die Zeichnung, denn wenn die Stützlinie in Folge vergrößerter Horizontalkraft  $H$  etwa wie  $AS_2$  in  $C_2$  die äußere Leibung schneidet, so würde die Hori-

zontalkraft  $H$  nicht nur das Gewölbstück  $C_2A$  um die Kante  $C_2$  links herum drehen, sondern auch sämtliche Wölfbsteine zwischen  $C_2$  und  $B$  um ihre äußeren Fugenkanten  $f_2$  überkanten, die Fugen würden sich in diesem Falle nach innen öffnen. In beiden Fällen würde also das Gewölbe zusammenstürzen, und mit Rücksicht auf die Stabilität des Gewölbes in Bezug auf Rippen oder Kanten gilt daher für die Stützlinie die Bedingung, daß dieselbe in ihrem ganzen Verlaufe innerhalb des Gewölbequerschnittes verbleiben muß. Höchstens darf daher mit Rücksicht auf diese Bedingung die Stützlinie durch einen der Punkte  $A_1$  und  $A_2$  der Scheitelfuge sowie  $B_1$  und  $B_2$  der Widerlagsfuge gehen, und wenn sie sonst wie z. B.  $A_0C_0B_0$  einen Punkt mit der äußeren oder inneren Wölfbfläche gemein haben sollte, so darf die letztere daselbst von der Stützlinie nur berührt, nicht geschnitten werden.

Da nun aber die Standfähigkeit eines Gewölbes, ähnlich wie die einer Futtermauer ebensowohl durch Gleiten wie durch Rippen gefährdet werden kann, so tritt zu der vorerwähnten ersten Bedingung noch eine zweite, wonach die Druckrichtung in keinem Punkte der Stützlinie von der Normallinie zur Fugenfläche dieses Punktes um einen größeren Winkel abweichen darf, als der Reibungswinkel des Gewölbmateriale angiebt. Würde z. B. in dem Punkte  $C_1$  oder  $C_2$  einer Stützlinie  $AB$ , Fig. 53, die Richtung der Stützkraft  $W_1$

Fig. 53.



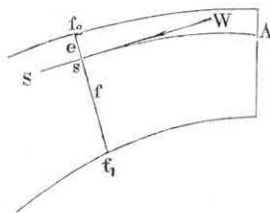
oder  $W_2$  mit den Fugenflächen  $F_1$  und  $F_2$  Winkel bilden, welche kleiner als  $90^\circ - \rho$  wären, unter  $\rho$  den gedachten Reibungswinkel verstanden, so würde das Gewölbstück  $C_1A$  auf der Fugenfläche  $F_1$  nach außen und der Gewölbstheil  $C_2A$  auf der Fuge  $F_2$  nach innen gleiten, wie in der Figur durch Punktirung angedeutet ist. Das Gewölbe müßte daher in diesem Falle durch Gleiten einstürzen, welchem sich dann auch ein Drehen beigesellen würde. Die Richtungen der Stützkraften  $W_1$  und  $W_2$

fallen nach dem im Vorhergehenden Gesagten nicht genau mit der Tangente an die Stützlinie zusammen, sondern werden durch die von  $C_1$  bzw.  $C_2$  aus an die Drucklinie gezogenen Tangenten angegeben. Bei der geringen Abweichung, welche indessen bei den gewöhnlichen Gewölben zwischen der Stützlinie und Drucklinie besteht, wird man in den meisten Fällen die Stützkraft annähernd in der Richtung der Stützlinie wirkend annehmen

dürfen. Bei dem meist bedeutenden Reibungscoefficienten, welcher für die Gewölbfsteine gilt, und wegen der mehr oder minder großen Adhärenz des Mörtels, welcher die einzelnen Steine verbindet, wird ein Gewölbebruch durch Gleiten in der Regel nicht zu beforgen sein. Auch kann man einem Gleiten, sollte dasselbe dennoch befürchtet werden, durch einen geeigneten Fugenschnitt wirksam begegnen, wie bereits gelegentlich des Gleitens der Futtermauern in §. 13 angeführt worden ist.

Wenn nun in einem Gewölbe sich eine Stützlinie angeben läßt, welche den vorgedachten beiden Bedingungen entspricht, so würde zwar für das Gewölbe den Erfordernissen der Stabilität Genüge gethan sein, aber offenbar nur dann, wenn die Widerstandsfähigkeit des Gewölbfsteinmaterials eine unbeschränkte wäre. Denn wenn die Stützlinie durch irgend welchen Punkt der inneren oder äußeren Wölbfäche hindurchginge, so müßte an dieser Stelle der betreffende Stein den ganzen Stützdruck in seiner Kante, d. h. also in einer Fläche von unendlich geringer Breite aufnehmen, d. h. die spezifische Pressung würde daselbst unendlich groß werden. Da nun auch die festesten Bausteine nur eine begrenzte Widerstandsfähigkeit besitzen, und, wie alle festen Körper unter Einfluß von Pressungen zusammengedrückt werden, so muß man annehmen, daß derjenige Punkt, in welchem der resultirende Druck  $W$  eine Fuge trifft, nicht allein diesem Drucke widersteht, sondern daß auch die ihn benachbarten Fugenelemente gewissen Pressungen ausgesetzt sind. Diese Pressungen hat man dann in solcher Weise über die gedrückte Fläche vertheilt anzunehmen, daß der besagte Durchschnittspunkt der Stützlinie der Mittelpunkt aller parallelen Elementarpressungen ist. Sei z. B. s, Fig. 54,

Fig. 54.



der Durchschnitt, in welchem die Stützlinie  $AS$  die Fuge  $f_1 f_2$  eines Gewölbes trifft, und setzt man wie bei den Futtermauern, (§. 14) voraus, daß die in  $s$  wirkende Druckkraft  $W$  in einem gewissen Flächenstücke von der Erstreckung  $f_2$  bis  $f$  Pressungen erzeuge, welche in  $f$  gleich Null und in irgend welchem anderen Punkte dem Abstände desselben von  $f$  proportional, also in der Kante  $f_2$  am größten sind, so hat man  $s$  als den Schwerpunkt eines Dreiecks von der Basis  $f_2$ , also

$$f_2 s = \frac{1}{3} f f_2 \text{ anzunehmen.}$$

Diese Erstreckung  $f f_2$  der gepressten Fläche hängt, außer von dem Drucke  $W$ , von der Widerstandsfähigkeit oder Pressbarkeit des Gewölbfmaterials ab, und bestimmt sich, unter  $p$  die äußerste noch zulässige Pressung in  $f_2$  verstanden, bekanntlich durch die Beziehung:

$$W = \frac{1}{2} p \cdot f f_2,$$

woraus

$$f f_2 = 2 \frac{W}{p}$$

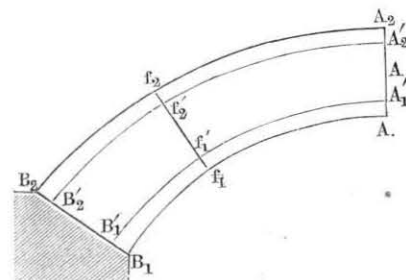
und

$$f_2 s = e = \frac{2}{3} \frac{W}{p}$$

folgt.

Wenn man daher, den vorstehenden Betrachtungen gemäß, für jede Fuge, wie  $f_1 f_2$  eines Gewölbes, Fig. 55, aus der höchstens zulässigen Pressung  $p$

Fig. 55.



des Materials und aus dem Stützdrucke  $W$ , der sich nach Obigem als Resultirende der Schubkraft  $H$  und des Gewichtes  $G_1$  vom Gewölbestück  $f_1 f_2 A$  ergibt, den Abstand

$$e = \frac{2}{3} \frac{W}{p}$$

bestimmt, und diesen Abstand von der inneren und äußeren Kante

$$e = f_1 f_1' = f_2 f_2'$$

anträgt, so erhält man dadurch zwei ideale Flächen bzw. Durchschnittslinien  $A_1' f_1' B_1'$  und  $A_2' f_2' B_2'$ , welche im Innern des Gewölbes einen gewissen Raum, den sogenannten Kern begrenzen, innerhalb dessen die Stützlinie enthalten sein muß, wenn sowohl die Bedingung der Stabilität gegen Ranten erfüllt, als auch die gehörige Rücksicht auf die Festigkeit des Materials genommen werden soll. Es ist natürlich, daß hinsichtlich des Gleitens die früher angeführte Bedingung bestehen bleibt, wonach die Druckrichtung mit keiner Fuge einen Winkel, kleiner als  $90^\circ - \varphi$ , bilden darf.

Was die Größe des hier mit  $e$  bezeichneten Abstandes betrifft, in welchem die Begrenzung des Kerns von den Wölbfächen anzunehmen ist, so sind die Angaben hierüber ziemlich verschieden. Meistens nimmt man für  $e$  einen gewissen Bruchtheil der nach der Fugenrichtung  $f_1 f_2$  gemessenen Gewölbdicke  $d$  an, was der Annahme entsprechend ist, daß diese Gewölbfstärke in den einzelnen Fugen dem auf diese übertragenen Drucke  $W$  proportional gemacht sei. Dieser Abstand  $e$  wird von Vielen zu  $\frac{1}{3} d$  ange-



nommen, so daß also für den Kern ebenfalls die Breite  $\frac{1}{3} d$  verbleibt, während von Anderen, z. B. von Scheffler angegeben wird, daß bei Kalk- und Sandsteinen der Kern sich den Leibungen viel mehr nähern könne, und daß nur bei weichem Materiale, wie Ziegelmauerwerk für den Abstand  $e$  etwa  $\frac{1}{4} d$  zu setzen sei. Nimmt man den Abstand  $e = \frac{1}{3} d$ , so würde nach dem im vorigen Capitel über Futtermauern Gesagten, in einer Fuge, in welcher die Stützlinie die Grenze des Kerns erreicht, die ganze Fugenfläche gepreßt werden, und zwar würde die Spannung an der inneren oder äußeren Kante gerade Null sein, je nachdem die Stützlinie die äußere oder die innere Schale des Kernes trifft. Bei einem geringeren Abstände, also für  $e < \frac{1}{3} d$  dagegen wird ein Deffnen der Fuge an der einen Kante eintreten, wenn man auf eine Zugspannung des Mörtels an dieser Stelle nicht rechnen darf. Ein solches Deffnen oder Klaffen der Fugen zeigt sich in der That öfter nach dem Ausrüsten der Gewölbe und wurde bei berühmten Brücken beobachtet, wie z. B. nach Navier's Angabe bei der bekannten Brücke von Neuilly, deren Korbbögen vor der Herstellung der Hintermauerung innen im Scheitel und außen etwa in der Mitte der Schenkel ein Deffnen der Fugen zeigten.

Wenn die Stützlinie einen Fugenschnitt in der Mitte zwischen der inneren und äußeren Wölbung trifft, so vertheilt sich der Stützdruck  $W$  daselbst gleichförmig über die ganze Fugenfläche, wodurch natürlich die Maximalspannung in diesem Querschnitte den möglich kleinsten Werth annimmt. Man hat sich daher vielfach bemüht, Gewölbe so zu construiren, daß ihre Mittellinie eine Stützlinie ist, unter welcher Bedingung natürlich die Gewölbeform und Belastungslinie nicht mehr beliebig, sondern in bestimmter, unten näher zu besprechender Art von einander abhängig sind. Diese Construction, auf welche später noch specieller eingegangen werden soll, liefert nach dem vorstehend Bemerkten Gewölbe von verhältnißmäßig großer Stabilität, da unter Zugrundelegung der Mittellinie als Stützlinie die specifischen Pressungen den relativ kleinsten Werth annehmen. Daher pflegen denn auch die bedeutendsten Brückenconstructeure diese Methode vielfach anzuwenden. Es würde jedoch unberechtigt sein, wenn man daraus, daß die Mittellinie des Gewölbes eine von den vielen möglichen Stützlinsen ist, die sich in dasselbe einzeichnen lassen, schließen wollte, daß diese Mittellinie nun auch die wirkliche Stützlinie sei, welche bei der gewöhnlichen Belastung des Gewölbes für die Druckübertragung maßgebend ist. Dies wird im allgemeinen nicht der Fall sein, wie sich aus dem folgenden Paragraphen ergeben wird, welcher sich mit der wirklichen Stützlinie

beschäftigen soll, d. h. derjenigen, für deren Auftreten unter den vielen möglichen Stützlinsen die größte Wahrscheinlichkeit besteht.

**Die wirkliche Stützlinie.** Aus den vorhergehenden Betrachtungen §. 20. haben sich die Bedingungen ergeben, denen die Stützlinie eines Gewölbes genügen muß, welche dem Zustande des Gleichgewichtes entspricht. Wenn eine diese Bedingungen erfüllende Stützlinie sich nicht zeichnen läßt, so ist es sicher, daß das betreffende Gewölbe nicht stabil sein kann und einstürzen muß. Wenn sich dagegen eine Stützlinie der verlangten Art angeben läßt, so liegt kein Grund vor, ein Einstürzen des Gewölbes zu befürchten, denn zum Gleichgewichte ist es nur erforderlich, daß der dieser Stützlinie zukommende Horizontalschub  $H$  von den Widerlagern ausgeübt werde, was immer möglich ist, wenn diese Widerlager selbst hinreichend fest sind, worüber in einem folgenden Paragraphen eine nähere Untersuchung angestellt werden soll. Es würde demzufolge das Gewölbe auch noch stabil sein, wenn nur eine einzige Stützlinie von den verlangten Eigenschaften sich angeben ließe, doch würde dieser Zustand ein Grenzzustand sein, welchen aufzuheben die geringste Aenderung der Stützlinie im Stande wäre, wie sie etwa durch zufällige Aenderung der Belastung, insbesondere durch eine unsymmetrische Vertheilung derselben sich einstellt. Bei stabilen Gewölben wird dieser Fall einer einzigen nur möglichen Stützlinie nicht vorkommen, man wird bei ihnen vielmehr eine große, ja unendlich große Anzahl von Stützlinsen innerhalb des Kerns einzeichnen können, welche sich nach §. 18 entweder durch die Höhenlage des Scheitelaugriffes  $A$ , oder durch die Größe des Horizontalschubes  $H$ , oder nach beiden Hinsichten von einander unterscheiden. Es ist nach dem Vorstehenden klar, daß jede dieser Stützlinsen dem Gleichgewichtszustande entspricht, denn für jede ist die zugehörige Horizontalkraft  $H$  im Stande, das Ranten oder Gleiten unbeschadet der Festigkeit des Materials zu verhüten. Die Frage, welche von diesen unendlich vielen möglichen Stützlinsen in Wirklichkeit dem belasteten Gewölbe zukommt, ist demnach eine unbestimmte, welche mit Sicherheit zu bestimmen, man nur würde hoffen können, wenn die Elasticitätsverhältnisse der Gewölbe gehörig berücksichtigt werden könnten, in ähnlicher Art etwa, wie man über die Auflagerdrücke und Anspannungen eines auf drei oder mehr Stützen ruhenden continuirlichen Balkens nur durch Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse Aufschluß erlangen kann. Einer derartigen auf die Elasticitätslehre begründeten Lösung der Frage ist man zwar in der neuesten Zeit durch die vortrefflichen Arbeiten von Winkler, Steiner \*), Culmann, Föppel \*\*)

\*) Förster'sche Bauztg. 1874 und 1878.

\*\*) Theorie der Gewölbe von A. Föppel. Leipzig 1880.



und Anderen näher getreten, doch muß man zur Zeit auf eine Anwendung dieser Theorie wegen der ungenügenden Kenntniß der Preßbarkeit des Materials und wegen der Schwierigkeiten der Rechnung verzichten, und man hat sich damit zu begnügen, gewisse Grenzen festzusetzen, innerhalb deren die wirkliche Stützlinie jedenfalls nur liegen kann, und höchstens zu ermitteln, welche Stützlinie in bestimmtem Falle die wahrscheinlichste sein wird.

Zunächst ist es ersichtlich, daß unter den vielen, durch die Größe des Horizontalschubes  $H$  unterschiedenen Stützlinien, welche sich im Innern eines stabilen Gewölbes angeben lassen, eine vorhanden ist, welcher der kleinste Werth von  $H$  zukommt, während einer anderen das Maximum von  $H$  entspricht. Diese beiden Stützlinien vom kleinsten und bezw. größten Schube sind, wie sich durch einfache Betrachtungen ergibt, dadurch charakterisiert, daß sie mit jeder der beiden Wölbflächen je einen Punkt gemein haben müssen, wobei es gleichgültig ist, ob dieser gemeinsame Punkt in der Scheitel- oder Kämpferfuge, also in  $A_1 A_2$ ,  $B_1 B_2$  liegt, oder ein Berührungspunkt zwischen dem Scheitel  $A$  und dem Widerlager  $B$  ist. In Fig. 56 und 57 sind zwei solche Stützlinien durch  $A C_1 C_2 B$  dargestellt,

Fig. 56.

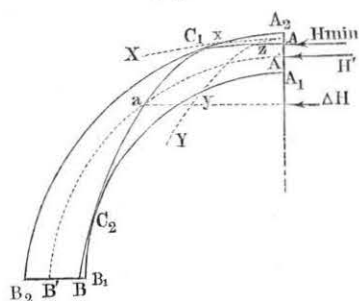
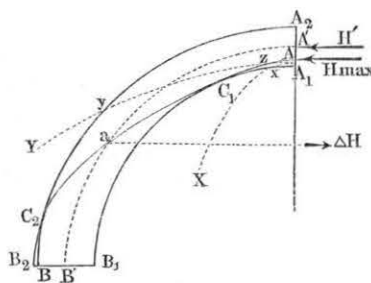


Fig. 57.



und man erkennt leicht, daß die Stützlinie in Fig. 56, bei welcher in der Richtung vom Scheitel  $A$  aus nach dem Widerlager  $B$  hin zuerst die äußere und dann die innere Wölbung getroffen wird, einem Minimum der Schubkraft entspricht, während die Stützlinie, Fig. 57, dem Maximum von  $H$  zukommt, sobald vom Scheitel aus zuerst die innere, und dann die äußere Wölbung von der Stützlinie berührt wird. Um dies zu beweisen, kann man zunächst bemerken, daß in Fig. 56 überhaupt keine ganz in das Gewölbe fallende Stützlinie möglich sein kann, deren Scheitelangriff höher als  $A$ , also zwischen  $A$  und  $A_2$  gelegen ist. Denn würde hierfür die Horizontalkraft ebenso groß, oder größer sein als diejenige für  $A C_1 C_2 B$ , so müßte nach dem Früheren diese Stützlinie irgendwo

zwischen  $A_2$  und  $C_1$  etwa bei  $x$  durch die äußere Wölbung heraustreten, wie die punktierte Linie  $X$  zeigt. Man könnte zwar durch einen geringeren Werth von  $H$  in diesem Falle die Stützlinie soweit senken, daß sie nicht aus der äußeren Wölbfläche  $A_1 C_1$  heraustritt, vielmehr die Stützlinie  $AB$  zwischen  $A$  und  $C_1$  in einem Punkte, etwa in  $z$  schneidet, dann würde aber diese Linie  $zY$ , da sie nur diesen einen Punkt  $z$  mit  $AB$  gemeinsam haben kann, auf ihrem weiteren Verlaufe irgendwo bei  $y$  die innere Wölbfläche durchschneiden. Daraus folgt, daß überhaupt oberhalb von  $A$  der Angriffspunkt einer möglichen Stützfläche nicht liegen kann. Dagegen kann man unterhalb  $A$ , etwa in  $A'$  eine Stützlinie beginnen lassen, welche die Stützlinie  $AB$  in einem beliebigen Punkte wie  $a$  schneidet, sobald man den Horizontaldruck  $H'$  dieser Linie um eine durch  $a$  gehende Componente  $\Delta H$  größer annimmt, als der Schub  $H$  der Linie  $AB$  ist, und diese Linie  $A'aB'$  wird, vorausgesetzt, daß die Vergrößerung  $\Delta H$  der Schubkraft gewisse Grenzen nicht überschreitet, auch zwischen  $a$  und dem Widerlager  $B$  ganz innerhalb des Gewölbes verbleiben können. Hieraus geht hervor, daß sich außer der Stützlinie  $AB$ , deren Schub  $H$  ist, nur solche andere Stützlinien in dem Gewölbe angeben lassen, deren Horizontalschub  $H'$  größer ist als  $H$ , d. h. die Linie  $AB$  in Fig. 56 entspricht dem kleinsten Schube  $H_{min}$ .

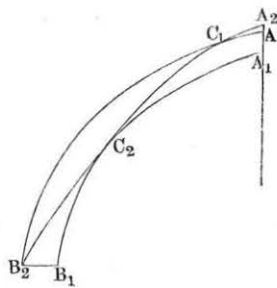
In ähnlicher Weise findet sich, daß in Fig. 57 keine Stützlinie möglich ist, deren Angriffspunkt zwischen  $A$  und  $A_1$  gelegen ist, da dieselbe entweder wie die Linie  $X$  die innere Wölbfläche bei  $x$  durchsetzt, wenn ihre Schubkraft ebenso groß oder kleiner als die von  $AB$  angenommen wird, oder wie die Linie  $Y$  durch die äußere Leibung bei  $y$  hindurchgeht, wenn bei einer größeren Schubkraft ein Durchschneiden der Stützlinie  $AB$  in  $z$  stattfindet. Daher sind hier nur Stützlinien wie  $A'B'$  möglich von denen jede einer Schubkraft  $H'$  angehört, die aus  $H$  in  $A$  und der entgegengesetzt gerichteten Componente  $\Delta H$  in  $a$  sich zusammensetzt, also kleiner ist als  $H$ .

Die Linie  $AB$  in Fig. 57 ist daher die Stützlinie des größten Schubes  $H_{max}$ . Wie schon erwähnt, kann in beiden Fällen der Punkt  $C_1$  auch mit  $A_2$  oder  $A_1$ , und der Punkt  $C_2$  mit  $B_1$  oder  $B_2$  zusammen treffen, in welchem letzteren Falle die Stützlinie auch die Wölbflächen in  $B_1$  oder  $B_2$  schneiden kann, anstatt sie zu berühren.

Aus dem Vorhergehenden folgt sogleich, daß, wenn in einem Gewölbe eine Stützlinie sich zeichnen läßt, welche wie  $A C_1 C_2 B_2$ , Fig. 58, mit einer der Wölbflächen etwa der äußeren  $A_2 B_2$  zwei Punkte  $C_1$  und  $B_2$  gemein hat, und die andere Leibung in einem zwischenliegenden Punkte  $C_2$  berührt, also das Gewölbe zweimal durchkreuzt, diese Linie, da sie zugleich dem größten wie dem kleinsten Schube entspricht, offenbar die einzige überhaupt mögliche Stützlinie für das Gewölbe ist. Das Gewölbe würde in diesem Falle im Grenzzustande sich befinden, und man hätte, ganz abgesehen

von der Widerstandsfähigkeit des Materials, die Gewölbstärke entsprechend zu vergrößern, wenn man eine gewisse Stabilität erlangen wollte.

Fig. 58.



Wie nun bereits oben bemerkt worden, ist von vornherein nicht anzugeben, welche von den unendlich vielen Stützlinien, die zwischen den beiden Grenzlinien des kleinsten und größten Druckes angegeben werden können, die wirkliche ist. Um diese Unbestimmtheit zu beseitigen, hat man wohl verschiedene Hypothesen gemacht, und es ist in dieser Beziehung von Mosely\*) ein Gesetz ausgesprochen, welches unter dem Namen des Principes vom kleinsten Widerstande bekannt geworden ist. Nach diesem Principe, dessen Beweis an der unten angezeigten Stelle sowie in dem schon oben erwähnten Werke von Scheffler\*\*) nachgesehen werden kann, hätte man bei einem Gewölbe, wenn dasselbe aus einem vollkommen starren und nicht zusammendrückbaren Material bestehen würde, als wirkliche Stützlinie diejenige vom kleinsten Horizontalschube anzusehen.

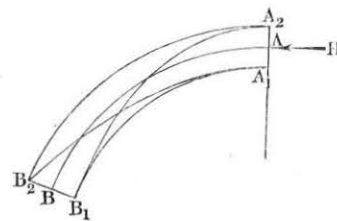
Anmerkung. Das erwähnte Princip des kleinsten Widerstandes, wie es von Scheffler definiert wird, läßt sich in der Hauptsache etwa folgendermaßen ausdrücken. Denkt man sich ein System fester Körper, die nur durch Verührung ihrer Oberflächen mit einander in Verbindung stehen, unter Einfluß äußerer Kräfte sich gegen einzelne feste, widerstehende Punkte stützend, und zerlegt man die Resultirende  $Q$  aller äußeren Kräfte in lauter parallele Componenten  $q$ , die durch jene widerstehenden Punkte gehen, so müssen, wenn jene Punkte nicht fähig sind, in der Richtung dieser Componenten zu widerstehen, noch gewisse zu  $Q$  senkrechte Seitenkräfte  $p$  in jenen Punkten rege werden, welche unter sich für das ganze System im Gleichgewichte sind, und von denen jede einzelne zusammen mit der in diesem Punkte wirkenden Componente  $q$  eine Mittelkraft  $w$  von der Art giebt, daß sie von dem festen Stützpunkte aufgenommen werden kann. Von den unendlich vielen möglichen Systemen der Seitenkräfte  $p$  hat nun dem gedachten Principe gemäß nur dasjenige in der Wirklichkeit Anspruch auf Existenz, bei welchem sämmtliche auf der Richtung der resultirenden Kraft  $Q$  senkrechte Seitenkräfte  $p$  gleichzeitig den möglich kleinsten Werth annehmen. In dem vorliegenden Falle ist also unter der Mittelkraft der äußeren Kräfte das Gewicht  $Q$  einer Gewölbenhälfte sammt ihrer Belastung zu verstehen, während die gedachten Seitenkräfte  $p$  durch die in der Scheitelfuge und am Kämpfer auftretende horizontale Schubkraft  $H$  dargestellt sind, welche dem angeführten Gesetze zufolge daher  $H_{min}$  sein soll.

\*) S. Mosely, Philosophical Magazine, October 1833.

\*\*) Scheffler, Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. ej. Brücken 1857.

Man hätte sich hiernach den Zustand der Gewölbe etwa in folgender Weise zu verdeutlichen. Es sei  $A_1 A_2 B_1 B_2$ , Fig. 59, die Hälfte eines zunächst aus

Fig. 59.



absolut unpreßbarem Materiale bestehenden Gewölbes, welches noch durch das beim Baue erforderliche Lehrgerüst unterstützt ist, so daß angenommen werden muß, daß im Scheitel  $A_1 A_2$  überhaupt noch keine Schubkraft zwischen den beiden Gewölbenhälften vorhanden ist. Denkt man sich nun das unterstützende Lehrgerüst weggenommen, so würde die zunächst noch nicht durch eine Horizontalkraft gestützte Gewölbenhälfte ihrem Bestreben, zu fallen, Genüge leisten, wenn nicht gleichzeitig mit diesem Bestreben eine gewisse Horizontalkraft in der Scheitelfuge  $A_1 A_2$  von der rechtsseitigen Gewölbenhälfte ausgeübt würde, welche einen hinreichend großen Werth  $H$  hat, um das Gewölbe am Einstürzen zu hindern. Hierbei wird man sich vorstellen müssen, daß diese Horizontalkraft nicht momentan und gewissermaßen sprungweise von dem Werthe 0 auf  $H$  sich erhebt, sondern es wird eine gewisse, wenn auch unmeßbar kleine Zeit vergehen, während welcher die Schubkraft in schneller Aufeinanderfolge alle Werthe von 0 bis zu dem erforderlichen Werthe  $H$  durchläuft. Wenn dabei die Schubkraft bei dieser Zunahme den Werth  $H_{min}$  erreicht hat, welcher gerade genügt, um das Gleichgewicht herzustellen, so fällt nunmehr gerade wegen dieses alsdann bestehenden Gleichgewichts jeder Grund fort, weshalb eine noch weiter gehende Vergrößerung von  $H$  über  $H_{min}$  hinaus stattfinden sollte, und man muß daher annehmen, daß das Gewölbe unter Einfluß seiner Belastung in demjenigen Zustande sich befindet, welchem die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubes zukommt.

Die hier auftretende Schubkraft  $H$  ist eine passive oder, wie sie auch wohl genannt wird, latente Kraft, welche stets nur genau in dem Betrage ersteht, in welchem sie gefordert wird. Anders gestaltet sich die Sachlage, wenn  $H$  eine von außen auf das Gewölbe ausgeübte active Kraft ist, wie sie etwa durch den Schub eines benachbarten Gewölbes ausgeübt, und durch die rechtsseitige Gewölbenhälfte auf die Scheitelfuge  $A_1 A_2$  übertragen wird. Wenn in diesem Falle die Kraft  $H$  den Betrag  $H_{min}$  überschreitet, so kann das Gleichgewicht unter Beibehaltung der Stützlinie  $A_2 B_1$  nicht mehr bestehen, es würde alsdann, wenn die vergrößerte Schubkraft wirklich in  $A_2$  angriffe, das Gewölbe nach oben übergekippt werden. Da aber das Gewölbe im Scheitel und im Widerlager nicht in den Punkten  $A_2 B_1$ , sondern in den Flächen  $A_1 A_2$  und  $B_1 B_2$  gestützt wird, so muß man annehmen, daß bei

der gedachten Vergrößerung der Schubkraft  $H$  die Angriffspunkte von  $A_2$  und  $B_1$  aus in das Innere des Gewölbes hineinrücken können, so daß die Stützlinie wie etwa  $AB$  in dem Maße flacher wird, wie die Vergrößerung von  $H$  es erfordert. Als letzter Grenzzustand, für welchen gerade noch das Gleichgewicht bestehen kann, gilt demgemäß die Stützlinie  $A_1 B_2$  des maximalen Schubes, und erst, wenn  $H$  den hierzu gehörigen Werth  $H_{max}$  überschreitet, wird das Gewölbe nach oben übergestürzt werden. Die beiden Stützlinien des kleinsten und größten Gewölbeschubes entsprechen daher zweien Grenzzuständen, und die Stabilität wird so lange nicht gestört sein, so lange die zugehörige Stützlinie zwischen diesen beiden Grenzen verbleibt. Man könnte daher die Entfernung zwischen diesen beiden äußersten Stützlinien in gewissem Sinne als ein Maß für die Stabilität eines Gewölbes ansehen, insofern die mögliche Veränderlichkeit der Stützlinie mit jener Entfernung zwischen  $A_1 B_2$  und  $A_2 B_1$  wächst und zu Null wird, sobald, wie in Fig. 58, die Stützlinie des kleinsten gleichzeitig diejenige des größten Gewölbeschubes, also die einzige überhaupt mögliche Stützlinie ist.

Da nun in Wirklichkeit das Material der Gewölbe niemals wie im Vorstehenden zunächst vorausgesetzt wurde, vollkommen starr und unpreßbar ist, so kann die wahre Stützlinie auch niemals durch die Kanten der Steine gehen, sondern muß sich wegen deren Zusammendrückung in gewissem Grade mehr in das Innere des Gewölbes hineinziehen. Scheffler nimmt an, daß an den Stellen, wo die Stützlinie des kleinsten Schubes die äußere oder innere Gewölbfäche trifft, auch die stärkste Zusammendrückung der Wölbfeste in der Nähe der betreffenden äußeren und inneren Kante liegen wird, d. h. daß die wahre Stützlinie, welche bei unpreßbarem Material mit der Stützlinie vom kleinsten Schub wirklich zusammentreffen würde, bei preßbarem Material sich dieser Linie möglichst zu nähern strebt. Ferner wird von demselben angeführt, daß Beobachtungen an ausgeführten Bauten aus Granit, hartem Kalk- und Sandstein zeigen, daß die Stützlinie dabei fast genau die eigentliche Kante des Fugenschnittes erreiche. Nach dieser Voraussetzung darf man keine gleichmäßige Vertheilung des Druckes über die ganze Fugenfläche bei allen Steinen annehmen, da dies offenbar nur bei einer solchen Fuge der Fall sein kann, welche von der Stützlinie in ihrer Mitte getroffen wird. Letzteres wird aber selbst bei einem Gewölbe, für welches die Mittellinie als eine mögliche Stützlinie construirt ist (s. §. 19), nicht in allen Fugen der Fall sein, wenn die wirkliche Stützlinie sich derjenigen vom kleinsten Schube möglichst zu nähern strebt. In diesem Falle muß selbstverständlich die spezifische Pressung des Materials in den Fugen um so größer ausfallen, je weiter sich in ihnen die wahre Stützlinie von der Mittellinie des Gewölbes entfernt.

Unter Zugrundelegung dieser Voraussetzung, welche vielfach gemacht

wird, hat man die Prüfung eines Gewölbes in der Weise vorzunehmen, daß man die Begrenzungen des Kerns (s. §. 19) einzeichnet, und diejenige Stützlinie aufsucht, welche ganz innerhalb dieses Kerns verbleibend, dem kleinsten Horizontalschube entspricht, d. h. einen Punkt mit der äußeren und einen tiefer liegenden Punkt mit der inneren Begrenzung dieses Kerns gemeinsam hat. Diese Stützlinie hat man dann als die wirkliche zu betrachten und ein Gewölbe hinsichtlich seiner Stabilität und Widerstandsfähigkeit nicht als genügend stark anzusehen, wenn sich eine solche Stützlinie von der verlangten Eigenschaft innerhalb des Kerns nicht angeben läßt. Diese Untersuchung soll im nächsten Paragraphen durchgeführt werden.

Ueber die Beschaffenheit der in einem Gewölbe auftretenden wirklichen Stützlinie sind auch andere Behauptungen aufgestellt worden, so u. A. von Culmann\*). Derselbe spricht den Satz aus: „Von allen Drucklinien, welche eingezeichnet werden können, ist diejenige die wirkliche Drucklinie eines Gewölbes, welche sich der Aze desselben in der Art am meisten nähert, daß der Druck in den am stärksten comprimierten Fugentanten ein Minimum ist.“

Es kann bemerkt werden, daß die so charakterisirte Stützlinie nicht sowohl dem Minimum des Horizontalschubes  $H$ , sondern der relativ kleinsten Pressung, also der günstigsten Anstrengung des Materials entspricht. Demgemäß würde z. B. für ein Gewölbe, das so construirt ist, daß seine Aze oder Mittellinie eine mögliche Stützlinie ist, diese Mittellinie auch die wirkliche Stützlinie sein, denn die Bedingung der kleinsten spezifischen Pressung eines Querschnitts wird bei einer gleichmäßigen Druckvertheilung d. h. also dann erfüllt sein, wenn die resultirende Druckkraft durch die Mitte des Querschnitts geht. Culmann giebt übrigens an, daß, da die Auffindung der gedachten Stützlinie von der relativ kleinsten Pressung zu umständlich sei, man gewöhnlich das oben angedeutete Verfahren anwenden werde, zu untersuchen, ob sich innerhalb des Kerns eine Stützlinie einzeichnen läßt.

Ist dies der Fall, so ist damit auch der Beweis geliefert, daß es außer dieser Stützlinie noch eine günstigere geben müsse, nämlich die als wirkliche angegebene, welche sich der Mittellinie des Gewölbes noch mehr nähern wird.

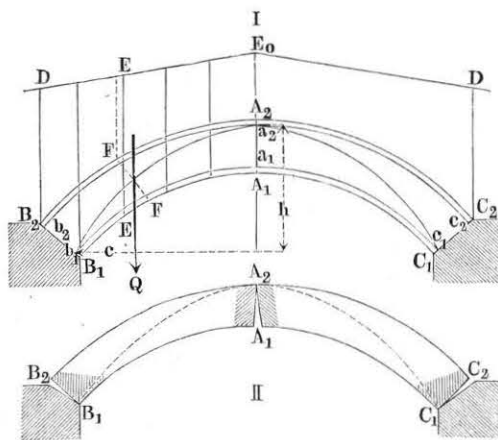
**Prüfung der Gewölbe.** Um ein Gewölbe hinsichtlich seiner Stabilität auf graphischem Wege zu prüfen, zeichnet man zu dem Gewölbe zunächst die Belastungslinie, indem man, wie oben angegeben, sämtliche darauf ruhenden Lasten durch Mauerkörper von dem spezifischen Gewichte des Gewölbumaterials ersetzt und gleichmäßig über die ganze Gewölbbreite in der Azenrichtung vertheilt denkt. Diese gleichmäßige Vertheilung nach der Azenrichtung gilt auch insbesondere bei den Brücken für die Brustmauern, welche die Brückenbahn beiderseits begrenzen. Zunächst soll im Folgenden, wie bisher immer eine symmetrische Belastung des Gewölbes vorausgesetzt

\*) S. dessen „Graphische Statik“. 1. Auflage, 1866.



werden, indem der Einfluß einseitiger und isolirter Lasten später besonders besprochen werden soll. Wenn man in dieser Weise für ein Gewölbe, Fig. 60

Fig. 60.



die Belastungslinie  $DE_0D$  gezeichnet hat, so kann man dasselbe durch eine Anzahl Ebenen, am einfachsten von verticaler Stellung wie  $EE$ , in eine Reihe von Streifen von beliebiger Breite theilen, und die Gewichte  $Q_1, Q_2 \dots$  dieser Streifen von 1 m Länge in bekannter Weise, unter Zugrundelegung einer gewissen Basis  $b$  für den Kräftemaßstab, durch Strecken darstellen, welche man in dem Kräfteplane in verticaler Richtung aneinandersezt. Gleichzeitig kann man die den Theilungsebenen  $E$  zugehörigen corrigirten Fugen  $F$  in der in §. 18 angegebenen Weise ermitteln, und in der daselbst angeführten Art mit Hülfe des Kräftepolygons irgend eine Stützklinie zeichnen, welche durch einen beliebigen Punkt der Scheitelfuge  $A_1A_2$  und durch einen ebenfalls beliebig angenommenen Punkt der Widerlager  $B_1B_2$  bzw.  $C_1C_2$  geht. Jede solche Stützklinie ist in dem vorliegenden Falle symmetrisch gegen die Scheitelfuge, in welcher sie eine horizontale Tangente haben muß. Zeichnet man nun noch in der dem Materiale entsprechenden Entfernung (s. §. 19) von den Wölbflächen die Begrenzungen  $b_1a_1c_1$  und  $b_2a_2c_2$  des Kerns ein, so kommt es darauf an, innerhalb dieses Kerns die mehrbefagte Stützklinie der kleinsten Schubkraft zu entwerfen.

Zu diesem Ziele gelangt man am einfachsten durch die Zeichnung einer Probe stützklinie, welche man unter willkürlicher Annahme eines Punktes in  $A_1A_2$  und  $B_1B_2$  entwirft, und welche man passend corrigirt, falls sie, wie dies meistens der Fall sein wird, den an die wirkliche Stützklinie zu stellenden Anforderungen noch nicht genügt. Dabei wird es sich fast immer

empfehlen, den höchsten Punkt  $a_2$  im Scheitel und den tiefsten Punkt  $b_1$  im Widerlager als die willkürlich anzunehmenden Punkte zu wählen; denn da für diese Punkte der Verticalabstand  $h$  ein Maximum ist, so ist zu erwarten, daß die ihnen zugehörige Stützklinie derjenigen vom kleinsten Schube nahe liegt,

indem der Schub irgend welcher Stützklinie sich durch  $H = Q \frac{c}{h}$  ausdrückt, also um so kleiner ausfällt, je größer der besagte Verticalabstand  $h$  zwischen Scheitel- und Kämpferangriff ausfällt.

Hat man diese Probe stützklinie zwischen  $a_2$  und  $b_1$  entworfen, so können folgende Fälle eintreten. Entweder diese Stützklinie liegt ganz innerhalb des Kerns, oder sie schneidet nur dessen äußere oder nur dessen innere Begrenzung oder aber, sie schneidet beide Begrenzungen. Diese einzelnen Fälle sollen gesondert betrachtet werden.

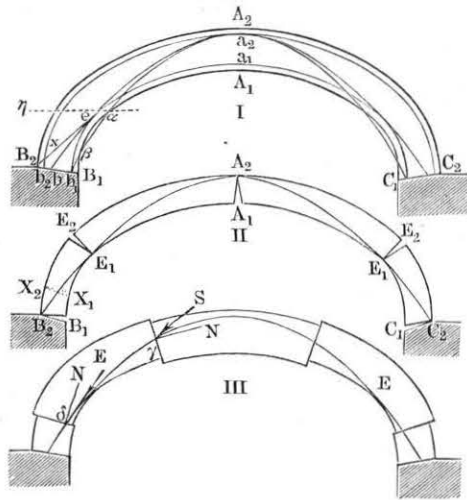
Gesetzt zunächst, die Probe stützklinie  $a_2b_1$  verbleibt, wie in Fig. 60, gänzlich innerhalb des Kerns, so ist sie die wirkliche Stützklinie, und die Stabilität des Gewölbes ist bei der angenommenen Gewölbeförderung und Widerstandsfähigkeit der Steine als gesichert zu betrachten. Würde die eine oder die andere dieser letztgedachten Größen indeffen soweit verringert, daß ein Einsturz erfolgen müßte, so würde ein Bruch des Gewölbes in zwei Theile eintreten, derart, daß die Fugen nach Fig. 60, II innen im Scheitel bei  $A_1$  und außen in den Kämpfern bei  $B_2, C_2$  sich öffnen würden. Diese gefährlichsten Stellen bei  $A, B$  und  $C$  nennt man daher bei diesem Gewölbe die Bruchfugen, welchen Namen man auch bei einem stabilen Gewölbe beibehält, welches dem Bruche nicht ausgesetzt ist. Bei der Zeichnung wird man finden, daß der hier angegebene Fall im Allgemeinen sich einstellt bei kreisförmigen Tonnengewölben, deren Mittelpunktswinkel zu jeder Seite des Scheitels den Betrag von  $60^\circ$  nicht übersteigt. Ein Gleiten der Wölbsteine auf einander wird in diesem Falle in der Regel nicht zu befürchten sein, da die Richtung des Fugendruckes von der Fugennormalen nirgends um den Reibungswinkel abweichen wird. Die größte spezifische Pressung der Steine findet selbststrebend in den Bruchfugen statt.

Wenn dagegen, wie es bei Halbkreisgewölben, gedrückt elliptischen oder Korbbögen meistens der Fall sein wird, die durch  $a_2$  und  $b_1$  gehende Stützklinie, Fig. 61, die innere Grenze  $a_1b_1$  des Kerns oder gar die innere Wölbfläche  $A_1B_1$  bei  $\alpha\beta$  durchsezt, so erhält man genau genug die wirkliche Stützklinie in derjenigen, welche durch denselben Punkt  $a_2$  im Scheitel und außerdem durch denjenigen Punkt  $c$  der inneren Kernbegrenzung geht, welcher von der Probe stützklinie zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  die größte Entfernung hat. Zeichnete man diese Stützklinie, und sollte sich herausstellen, daß dieselbe doch noch an einer Stelle, den Kern überschreitet, so würde eine Wiederholung dieser Construction in jedem Falle mit genügender Genauigkeit die wirkliche Stützk-



linie  $aeb$  liefern. Hierbei ist nur zu beachten, daß diese letztere nicht die äußere Begrenzung des Kerns etwa bei  $x$  schneide, denn wenn dies der

Fig. 61.



vorhergehenden durch Fig. 60 dargestellten zurückgeführt ist.

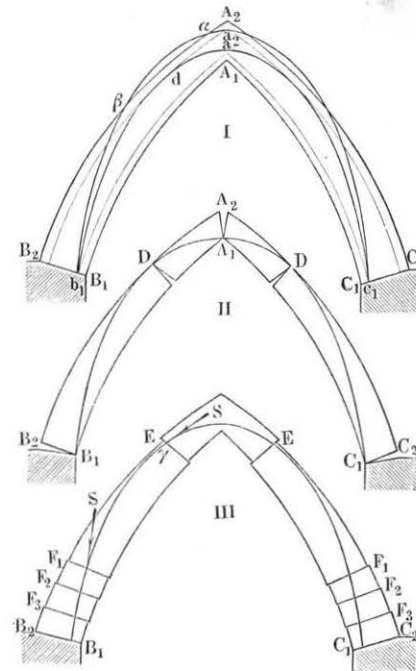
Die Bruchfugen, welche sich bei einer ungenügenden Stärke des Gewölbes, Fig. 61, einstellen, liegen im Scheitel  $A_1 A_2$  und in den Schenkeln bei  $E_1 E_2$ , Fig. II. Während die Scheitelfuge bei  $A_1$  sich innen öffnet, erfolgt bei  $E_2$  ein Deffnen außerhalb für alle die Fugen, welche in dem zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  erhaltenen Stücke von der Stützlinie nicht getroffen werden. Die Füße der Schenkel zwischen  $\beta$  und den Widerlagern bleiben dabei stehen, sobald die Stützlinie bei  $b$  innerhalb des Kerns endigt, und aus dem Gewölbe fallen die beiden im Scheitel sich trennenden mittleren Theile  $AE$  heraus. Würde dagegen die Stützlinie noch oberhalb des Kämpfers  $B$ , etwa bei  $x$ , auch die äußere Begrenzung durchschneiden, so würden an dieser Stelle die Fugen sich innerlich bei  $X_1$  öffnen und das Gewölbe dementsprechend in mehrere Theile zerfallen.

Wenn die Richtung des Stützdruckes  $S$  die Fugen des Gewölbes etwa bei  $\gamma$  und  $\delta$ , Fig. III, unter Neigungen gegen die Normalen  $N$  treffen würde, die größer sind, als der Reibungswinkel  $\rho$  der Wölfssteine aufeinander, so würde, wenn man dies nicht durch geeignete Fugenrichtung verhinderte, eine Störung des Gleichgewichtes durch Gleiten eintreten, wobei das Mittelstück abwärts rutschen, und die beiden Seitenstücke  $E$  seitwärts hinausdrängen würde.

Fall sein würde, so wäre in dem Gewölbe überhaupt keine Stützlinie möglich, und man müßte, um den Einsturz zu verhüten, die Schenkel bei  $B_2$  und  $C_2$  durch eine daselbst aufgeführte Hintermauerung verstärken, so daß die Stützlinie auch dort innerhalb des Kerns verbleibt. Wenn man diese Hintermauerung bis etwa zu der Horizontalen  $a\eta$  durch  $\alpha$  auführt, so erkennt man leicht, daß der vorliegende Fall auf den

Setzt man ferner voraus, die durch  $a_2 b_1$  Fig. 62, I, gehende Stützlinie durchschneide die äußere Begrenzung des Kerns oder gar des Gewölbes bei  $\alpha$

Fig. 62.



und  $\beta$ , so zeichnet man die wirkliche Stützlinie  $adb_1$  durch  $b_1$  und den Punkt  $d$  der Kernbegrenzung, welcher von der Probestützlinie  $a_2 \alpha \beta b_1$  zwischen  $\alpha$  und  $\beta$  die größte Entfernung hat, und es gelten für diesen Fall, welcher besonders bei gotischen Bögen mit geneigten Widerlagsfugen vorkommt, ähnliche Betrachtungen, wie für den vorhergehenden. Die Bruchfugen treten hier, außer im Scheitel  $A$  und in den Kämpfern  $B$  und  $C$ , wo selbst ein Deffnen nach außen stattfindet, noch bei  $D$  zu beiden Seiten des Scheitels auf, so daß der Bogen in der aus Fig. II ersichtlichen Weise in mehrere Stücke zerfällt. Dabei wird das Deffnen bei  $D$  entweder nur auf eine Fuge oder auf mehrere

neben einander liegende sich erstrecken, je nachdem die Stützlinie die betreffende Wölbsfläche berührt, oder durchschneidet.

Was den Zustand des Gleitens anbelangt, so wird, wenn die Druckrichtung  $S$  bei  $\gamma$  um mehr als den Reibungswinkel gegen die Fugennormale geneigt ist, jeder Schenkel bei  $E$  einwärts gleiten, während in den Fußstücken  $BF$  und  $CF$  ein Gleiten der Steine in allen den Fugen stattfindet, für welche die besagte Abweichung der Stützkraft  $S$  von der Normalen größer als der Reibungswinkel ist.

Wenn endlich der Fall, Fig. 63, I, vorliegt, daß die Probestützlinie  $a_2 b_1$  beide Begrenzungen des Kerns und zwar zuerst die äußere bei  $\alpha \beta$  und dann die innere bei  $\gamma \delta$  durchschneidet, so zeichnet man diejenige Stützlinie  $adeb$  ein, welche durch die beiden Punkte  $d$  und  $e$  der Kernbegren-

zungen geht, die von der Stützlinie  $a_2 b_1$  am entferntesten sind, wozu das in §. 18 angegebene Verfahren am bequemsten dienen kann. Diese Stützlinie wird die wirkliche sein, sobald sie weder oberhalb  $d$  die innere, noch unterhalb  $e$  die äußere Begrenzung des Kerns durchsetzt. Im Uebrigen gelten ähnliche Betrachtungen, wie in den früheren Fällen, und man erkennt, daß die Bruchfugen, Fig. II bei  $A$ ,  $D$  und  $E$  liegen, während bei einem etwaigen Gleiten in jedem Schenkel das Stück  $EF$  Fig. III, nach außen gedrückt wird. Der hier vorliegende Fall kommt

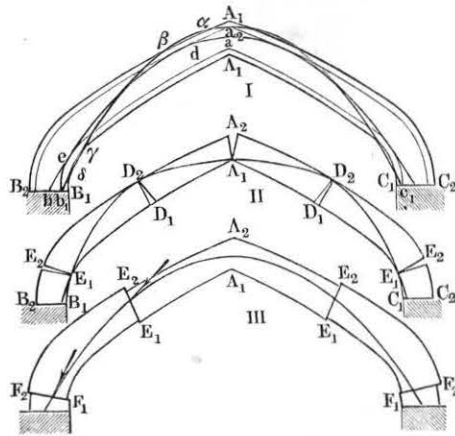
in der Wirklichkeit besonders bei den gedrückt gothischen, sogenannten normannischen oder Tudorbögen vor.

Es bedarf schließlich kaum der Erwähnung, daß bei jedem Gewölbe beim Einsturze, geschehe derselbe nun durch Ranten oder Gleiten, stets eine Senkung des Gesamtschwerpunktes stattfinden muß, selbst wenn auch im Beginne des Einstürzens einzelne Gewöltheile momentan gehoben werden sollten, wie dies beispielsweise in dem letztbetrachteten Falle der Fig. 63, III mit den Stücken  $EF$  in der That geschieht.

Mit den hier vorgeführten Beispielen sind sämtliche in der Wirklichkeit vorkommende Fälle erledigt, denn wenn z. B. die gedachte Probestützlinie  $a_2 b_1$ , Fig. 64, zuerst die innere Begrenzung des Kerns in  $\alpha$  und  $\beta$  und dann die äußere in  $\gamma$  und  $\delta$  durchschneidet, so ist überhaupt für das betreffende Gewölbe keine Stützlinie und daher keine Stabilität möglich, wie aus den in §. 18 angegebenen Betrachtungen über die allgemeinen Eigenschaften der Stützlinie sich unschwer ergibt.

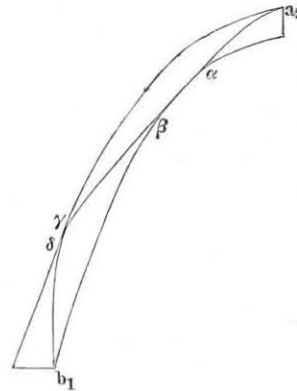
Wenn man für irgend ein Gewölbe diejenige Stützlinie  $S$  entworfen hat, welche durch die Mitten der Fugen im Scheitel und den Kämpfern geht, so kann man sich die Aufgabe stellen, das Material des Gewölbes so zu vertheilen, bezw. die Gewölbbform so zu verändern, daß die gezeichnete Stützlinie zur geometrischen Mittellinie des Bogens wird. Ist dies geschehen, indem man zu jeder Seite der besagten Stützlinie  $S$  die halbe

Fig. 63.



Gewölbbreite an dieser Stelle anträgt, so wird zwar für diese etwas geänderte Gewölbbform  $G$  die ursprüngliche Stützlinie nicht mehr genau eine Stützlinie

Fig. 64.



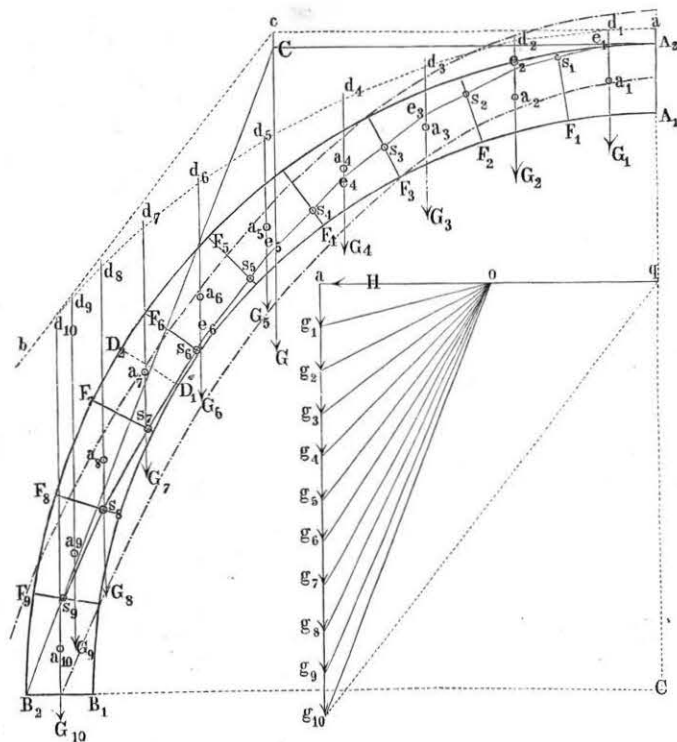
sein. Man kann indessen leicht die erforderliche Correction der Gewölbbform dadurch vornehmen, daß man für die neuerhaltene Gewölbbform  $G$  abermals die durch die Mitten der Scheitel- und Kämpferfuge gehende Stützlinie  $S_1$  zeichnet, welche von der erstgezeichneten  $S$  nur unbedeutend abweichen wird. Wenn man daher dieser neuen Stützlinie  $S_1$  entsprechend die Vertheilung der Gewölbmassen wieder so vornimmt, daß  $S_1$  die Mittellinie wird, so erhält man ein Gewölbe  $G_1$ , dessen Mittellinie sehr nahe eine mögliche Stützlinie ist. Es wurde schon früher ange-

führt, daß damit zwar noch nicht ausgesprochen ist, daß diese mögliche, mit der Mittellinie zusammenfallende Stützlinie auch die wirkliche sei, doch wurde ebenfalls bemerkt, daß jedenfalls ein so construirtes Gewölbe eine große Stabilität besitzen müsse. Es ist daher eine dementsprechende Ermittelung der Verhältnisse von Gewölben von großer Bedeutung für die Baupraxis, und es soll in dem folgenden Paragraphen diese Ermittelung noch auf rechnerischem Wege gezeigt werden.

Als ein Beispiel von Interesse möge indeß zuvor der häufiger vorkommende Fall hier betrachtet werden, daß ein kreisförmiges Tonnengewölbe nur sein Eigengewicht, sonst aber keine zusätzliche Belastung zu tragen hat. Es sei zu dem Ende in Fig. 65,  $A_1 A_2 B_2 B_1$  der Durchschnitt durch die Hälfte eines halbkreisförmigen Tonnengewölbes dargestellt, dessen überall gleiche Gewölbbreite  $A_1 A_2 = B_1 B_2$  gleich 0,1 des äußeren Halbmessers  $CA_2 = CB_2$  angenommen wurde. Denkt man nun diese Gewölbbälfte, deren axial gemessene Dimension gleich 1 m vorausgesetzt werde, durch radiale Ebenen  $F_1 F_2 \dots$  in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zerlegt, und ermittelt unter Zugrundelegung eines gewissen Kräftemaßstabes die Strecken, welche den Gewichten  $G_1 G_2 G_3$  u. s. w. der einzelnen Gewöltheile entsprechen, so erhält man durch Antragen dieser Strecken auf einer Verticallinie den Kräfteplan  $ag_1 g_2 \dots g_{10}$ . In dem vorliegenden Falle, in welchem das Gewölbe in lauter unter sich gleiche Theile getheilt wurde, fallen auch die einzelnen Strecken  $ag_1, g_1 g_2, g_2 g_3 \dots$  gleich groß aus, so daß man nur die dem Gesamtgewicht  $G$  des halben Gewölbes entsprechende Strecke  $ag_{10}$  in ebenso viel gleiche Theile zu theilen hat, wie das Gewölbe, um die Einzelgewichte der Theile zu erhalten. Die Einzelgewichte denkt man sich in den Schwerpunkten  $a_1, a_2, a_3, \dots$  der einzelnen trapezförmigen Gewöltheile wirksam und

findet nun zunächst die Lage der Schwerkraft  $G$  des halben Gewölbes in bekannter Weise durch eine Hilfsconstruction. Nimmt man nämlich ganz beliebig außerhalb  $ag_{10}$ , etwa auf der in  $a$  zu  $ag_{10}$  Senkrechten in  $p$  einen Punkt als Pol

Fig. 65.

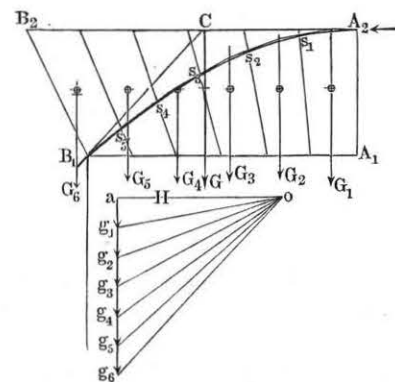


an und construirt mit Hilfe desselben in bekannter Weise ein Seilpolygon  $ad_1d_2d_3 \dots d_{10}b$ , so erhält man in dem Durchschnittspunkte  $c$  der beiden Endstrahlen  $ad_1$  und  $bd_{10}$  einen Punkt, durch welchen die verticale Schwerkraft  $G$  der Gewölbbälfte hindurchgeht. Wenn man nun zwei Punkte für eine Stützlinie des Gewölbes annimmt, etwa einen in der Scheitelfuge  $A_1A_2$  und den anderen im Widerlager  $B_1B_2$ , so ist es nach dem Vorhergegangenen leicht, diese Stützlinie selbst zu zeichnen. Wählt man als solche Punkte etwa  $A_2$  und  $B_2$ , so zieht man durch  $A_2$  die Horizontale bis zum Durchschnitte  $C$  mit dem Gewichte  $G$ , um in der von  $C$  durch  $B_2$  gehenden Geraden die Richtung des Strahls  $g_{10}o$  im Kräfteplane zu erhalten, welcher in  $oa$  die Schubkraft  $H$  ergibt. Betrachtet man nunmehr  $o$  als Pol des Kräftepolygons, und zeichnet danach das Seilpolygon  $A_2e_1e_2e_3 \dots B_2$ , so erhält man in den Durchschnitten  $s_1s_2s_3 \dots$  der

Seiten dieses Polygons mit den Fugen  $F$  Punkte der gesuchten Stützlinie  $A_2s_1s_2 \dots B_2$ . Diese Stützlinie nähert sich bei  $D_1$  zwischen  $s_6$  und  $s_7$  in einem Abstände von etwa  $60^\circ$  vom Scheitel der inneren Gewölbeleibung fast bis zur Berührung, und sie stellt daher nach dem in §. 19 Bemerkten gleichzeitig die Stützlinie vom kleinsten wie diejenige vom größten Schube, folglich die einzig mögliche Stützlinie dar. Man erkennt auch aus der Figur leicht, daß durch eine Verrückung nach innen eines ihrer Angriffspunkte sowohl im Scheitel wie im Widerlager die Stützlinie die innere Wölbfläche in der Nähe von  $D_1$  durchschneiden würde. Hieraus ergibt sich, daß ein halbkreisförmiges Gewölbe von den gewählten Verhältnissen, d. h. dessen Stärke nur  $\frac{1}{10}$  seines Halbmessers beträgt, wenn es nur sein eigenes Gewicht zu tragen hat, sich im Grenzzustande des Gleichgewichts befindet. Um dem Gewölbe Stabilität zu verleihen, würde daher die Gewölbestärke vergrößert werden müssen, während die geringste Verminderung dieser Stärke unfehlbar mit einem Einsturz verbunden wäre. Wollte man das Gewölbe unter Beibehaltung der Stärke und Spannweite stabil erhalten, so hätte man die Gewölform zu ändern. Dies kann z. B. dadurch geschehen, daß man die gefundene Stützlinie  $A_2s_1s_2 \dots B_2$  als Mittellinie auffaßt, und zu beiden Seiten derselben in dem Abstände gleich der halben Gewölbbreite die Begrenzung der Wölbflächen annimmt, in welchem Falle man ein Gewölbe von der in der Figur durch Striche und Punkte angedeuteten, annähernd parabolischen Gestalt erhält.

Wenn man das Gewölbe nur bis zu der Bruchfuge  $D_1D_2$  ausführt, etwa derart, daß man den Schenkel zwischen  $D$  und  $B$  durch kräftige Hintermauerung gewissermaßen zu einem Bestandtheile des festen Widerlagers ausbildet, so erkennt

Fig. 66.



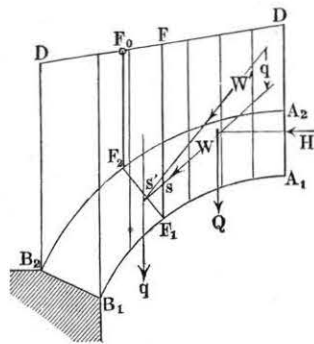
man, daß für den übrigbleibenden Bogen  $AD$  von einem halben Mittelpunktswinkel von etwa  $60^\circ$  die Stützlinie  $A_2D_1$  eine solche vom kleinsten Horizontalstöße ist. Man ersieht hieraus den für die Stabilitätsverhältnisse günstigen Einfluß der Hintermauerung. Der Bogen wird nämlich hierdurch hinreichend stabil, denn es lassen sich für denselben noch unzählig viele Stützlinien dadurch zeichnen, daß man den Scheitelangriff von  $A_2$  herunterrückt, und den Kämpferangriff von  $D_1$  nach  $D_2$  hin erhebt. Für alle diese Stützlinien ist der zugehörige Horizontalstöß größer, als der der Linie  $A_2s_1s_2 \dots D_1$  zukommende  $H_{min}$ , und man erhält den größten Werth  $H_{max}$  für die durch  $A_2$  und  $D_2$  gehende Stützlinie. Es ist ohne Weiteres klar, daß ein unter  $H_{min}$  stehender Schub die Gewölbbälfte  $AD$  am Herunterfallen nach innen nicht hindern kann, während eine Schubkraft größer als  $H_{max}$  die Gewölbbälfte um  $D_2$  nach außen umtänzt. Ein solches Ueberkanten nach außen wird indeß nicht eintreten können, wie groß



auch immer die Schubkraft sein möge, wenn der Punkt  $D_2$  höher als  $A_1$  gelegen ist. Das letztere ist der Fall bei sehr flachen und insbesondere bei allen schiefechten Gewölben. Zeichnet man daher für ein schiefechtes Gewölbe  $A_1 A_2 B_2 B_1$ , Fig. 66, in der erwähnten Art durch  $A_2$  und  $B_1$  die Stützlinie vom kleinsten Schube, so erhält man in diesem  $H = 0$  diejenige Widerstandskraft, welche mindestens von den Widerlagern ausgeübt werden muß, wenn das Gewölbe am Herabfallen durch Rippen um einen Punkt der unteren Leibung verhindert werden soll. Ein Ueberfanten um eine Kante in der oberen Leibung  $A_2 B_2$  ist aber niemals denkbar, wie groß auch der auf das Gewölbe ausgeübte Schub sein möge.

§. 22. Die Kettenlinie als Stützlinie. Die analytische Behandlung der Stützlinie von Gewölben, welche Linie im Vorstehenden als der geometrische Ort der Angriffspunkte der auf die Fugen des Gewölbes wirkenden Mittelkräfte in diesen Fugen charakterisirt worden ist, würde auf große, kaum lösbare Schwierigkeiten der Rechnung führen. Aus diesem Grunde pflegt man bei der Rechnung eine vereinfachende Voraussetzung zu machen, darin bestehend, daß man das Gewölbe sammt seiner Belastung durch einzelne verticale Ebenen wie  $FF_1$ , Fig. 67, in eine größere Anzahl von Streifen theilt und diejenige Stützlinie als Curve betrachtet,

Fig. 67.

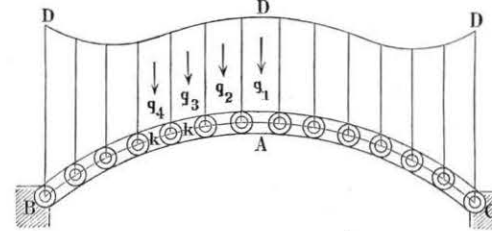


welche die Durchschnittspunkte  $s$  enthält, in denen diese verticalen Trennungsflächen von den bezüglichen Mittelkräften  $W$  getroffen werden. Diese Mittelkräfte selbst hat man sich wieder aus der Zusammensetzung des horizontalen Scheiteldruckes  $H$  mit dem Gewichte  $Q$  des Gewölbtheiles entstanden zu denken, der zwischen der betreffenden Theilungsebene  $FF_1$  und dem Scheitel  $A_1 A_2$  befindlich ist. Die so erhaltene Curve stimmt, streng genommen, nicht mit der dem wirklichen Fugenschnitte des Gewölbes zukommenden Stützlinie überein, denn wie aus Figur ersichtlich ist, erhält man für die durch  $F_1$  gehende Gewölbfuge  $F_1 F_2$  den Punkt  $s'$  der Stützlinie, indem man das Gewicht  $q$  des Trapezes  $FF_1 F_2 F_0$  mit der in  $s$  angreifenden Mittelkraft  $W$  aus  $H$  und dem Gewichte  $Q$  des Stückes  $A_1 D F F_1$  zu einer neuen Mittelkraft  $W'$  zusammensetzt. Die Abweichung zwischen den beiden diese Punkte  $s$  und bezw.  $s'$  aufnehmenden Curven wird um so kleiner sein, je kleiner die Gewölbstärke  $F_1 F_2$  gegen die Belastungshöhe  $FF_1$  und je geringer die Neigung der Fuge gegen

die Verticale ist. Diese erwähnte Abweichung wird daher für jedes Gewölbe in der Nähe des Scheitels unmerklich fein, und würde bei einer sehr kleinen Gewölbstärke in allen Punkten verschwinden, und da sie auch für die gewöhnlichen Gewölbe nur unbedeutend ausfällt, so hat man, wie schon bemerkt, bei den Rechnungen diese gedachte Linie der Punkte  $s$  als Stützlinie des Gewölbes angenommen und es soll dieselbe hier als solche bezeichnet werden. Nach dem im §. 17 über Stützlinien allgemein Gesagten ist es nun ersichtlich, daß die fragliche Linie  $s$  mit derjenigen Kettenlinie zusammenfällt, in welche das zur Construction der Stützlinie dienende Seilpolygon bei unendlich kleiner Breite der streifenförmigen Gewölbtheile übergeht, und welche im Vorstehenden mit dem Namen der Drucklinie oder Richtungslinie des Druckes bezeichnet wurde. Es ist auch schon in §. 17 darauf hingewiesen, daß diese beiden Linien zusammenfallen müssen, wenn die Fugen oder Trennungsebenen vertical angenommen werden.

Demgemäß kann man sich nun, wie Schwedler ausführt, dessen Darstellung \*) hier im Wesentlichen beibehalten worden ist, das Gewölbe als eine aus einzelnen Gliedern  $k$  bestehende Kette, Fig. 68, vorstellen, deren Glieder  $k$  so gegen einander und gegen zwei feste Widerlager  $B$  und  $C$  gestellt sind,

Fig. 68.



daß sie unter Einfluß der auf die einzelnen Glieder wirkenden Belastungen  $q_1 q_2 q_3 \dots$  mit einander im Gleichgewichte stehen. Denkt man sich diese Belastungen wieder durch entsprechend hohe Prismen aus der Wölbsteinmasse ersetzt, deren Breite gleich der Horizontalprojection der betreffenden Kettenglieder ist, so bestimmen die oberen Enden dieser Prismen die bekannte Belastungslinie des Gewölbes, für welche zunächst ebenso wie für das Gewölbe selbst eine symmetrische Gestalt zu beiden Seiten des Gewölbscheitels vorausgesetzt werden soll.

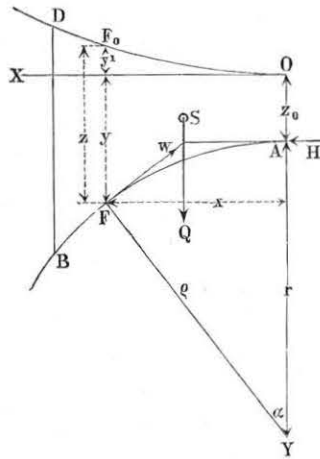
Die Untersuchung geschieht nun ähnlich wie für eine hängende Kette, (I. Thl. I.), in folgender Art. Ist  $AFB$ , Fig. 69, die besagte Kettenlinie

\*) S. Theorie der Stützlinie von Schwedler, Zeitschr. für Bauwesen 1859.



für eine Belastungslinie  $OF_0D$ , deren Ordinaten über der Kettenlinie im Scheitel  $AO = z_0$  und für irgend einen Punkt  $F$  durch  $FF_0 = z$  ausgedrückt sind, so wähle man  $O$  zum Anfangspunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems mit verticaler, in die Symmetrieebene des Gewölbes fallender  $Y$  Axe. Auf das zwischen dem Scheitel  $A$  und dem beliebigen Punkte  $F$  mit den Coordinaten  $x, y$  gelegene Kettenstück  $AF$  wirken nun die Horizontalkraft  $H$  im Scheitel, das Gewicht  $Q$  des Belastungsfeldes  $OAFF_0$  in seinem Schwerpunkte  $S$  und in dem Querschnitte bei  $F$  der Widerstand des Gewölbes  $W$ , welcher, in der Tangente an die Kettenlinie wirkend, mit dem Horizonte den Winkel  $\alpha$  bilden möge. Man findet für das Gleichgewicht ohne Weiteres die Beziehungen

Fig. 69.



$$Q = W \sin \alpha \quad (1)$$

$$H = W \cos \alpha \quad (2)$$

und

$$\frac{Q}{H} = \tan \alpha = \frac{dy}{dx} \quad (3)$$

Hierin kann man den Voraussetzungen gemäß,

$$Q = \int_{z_0}^z z dx \quad (4)$$

setzen, wenn man wieder ein Gewölbe von 1 m Länge in Betracht zieht und das Gewicht von 1 cbm Wölfeinmaterial als Gewichtseinheit annimmt, so daß aus (3) und (4)

$$H \frac{dy}{dx} = \int_{z_0}^z z dx$$

folgt, woraus man durch Differentiation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{z}{H} \quad (5)$$

erhält.

Bezeichnet man nun mit  $\rho$  den Krümmungshalbmesser der Kettenlinie in  $F$ , welcher bekanntlich durch

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{(1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{1}{\cos^3 \alpha \frac{d^2 y}{dx^2}} \quad (6)$$

ausgedrückt ist, so findet man aus (5) und (6):

$$\rho = \frac{H}{z \cos^3 \alpha} \quad (7)$$

als allgemeine Gleichung für den Krümmungsradius der Stützlinie in irgend welchem Punkte, in welchem die Tangente mit dem Horizonte, also auch die Krümmungsradius mit der Verticalen den Winkel  $\alpha$  bildet. Für den Scheitel erhält man daraus mit  $\alpha = 0$  und  $z = z_0$ , wenn man daselbst den Halbmesser  $r$  nennt,

$$r = \rho = \frac{H}{z_0} \text{ oder } H = rz_0 \quad (8)$$

d. h. der Horizontalschub eines Gewölbes wächst direct mit der Krümmung im Scheitel und mit der Belastung daselbst.

Die Form der Stützlinie hängt wesentlich ab von dem Verhältniß  $\frac{r}{z_0}$  des Krümmungshalbmessers zu der Belastung im Scheitel, und man hat, wenn man dieses Verhältniß  $\frac{r}{z_0}$ , welches auch wohl der Modulus des Gewölbes genannt wird, mit  $a$  bezeichnet, nach (8)

$$H = az_0^2 \quad (9)$$

und erhält damit aus (7)

$$\rho = \frac{a}{\cos^3 \alpha} \frac{z_0^2}{z} \quad (10)$$

Schreibt man diese letztere Gleichung

$$\rho = \frac{a}{\cos^3 \alpha} \frac{z_0}{z} z_0,$$

so erkennt man, daß für denselben Werth des Modulus  $a$  der Krümmungshalbmesser  $\rho$  für einen beliebigen Winkel  $\alpha$  proportional mit der Scheitel-

belastung  $z_0$  wächst, sobald auch das Verhältniß  $\frac{z_0}{z}$  für diesen Winkel constant bleibt, d. h. sobald die Belastung  $z$  überall durch dieselbe Function von  $\alpha$  ausgedrückt ist, mit anderen Worten, sobald die Art der Lastvertheilung dieselbe bleibt. Unter dieser Voraussetzung sind also alle Stützklinien von gleichem Modul unter einander ähnlich.

Um daher die verschiedenen Stützklinien gleicher Belastungsart zu beurtheilen, genügt es, für verschiedene Werthe des Moduls  $a$  je eine Stützklinie herauszugreifen, für welche der Halbmesser  $r$  im Scheitel eine bestimmte Größe hat, die man etwa gleich der Einheit annehmen darf, indem diese Stützklinie mit allen übrigen, demselben Modul angehörigen Stützklinien gleicher Belastungsart geometrisch ähnlich ist. Der Modul ist in Wirklichkeit natürlich sehr verschieden, er wird aber selten den Werth 25 übersteigen, in welchem Falle also die Höhe der Scheitelbelastung nur 4 Proc. des Gewölbbahnmessers beträgt; während andererseits bei hohen Belastungen der Werth  $a = \frac{r}{z_0}$  bis auf einen kleinen achten Bruch ( $1/4$  bis  $1/10$ ) herabgehen kann.

Setzt man zunächst den für Bauausführungen häufigen Fall voraus, daß die Stützklinie ein Kreisbogen ist, so hat man dafür in den vorstehenden Formeln den Krümmungshalbmesser  $\rho$  an jeder Stelle gleich dem Scheitelhalbmesser  $r$  zu setzen, und erhält damit aus (7) und (8):

$$r = \frac{H}{z \cos^3 \alpha} = \frac{H}{z_0},$$

oder

$$z = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha} \dots \dots \dots (11)$$

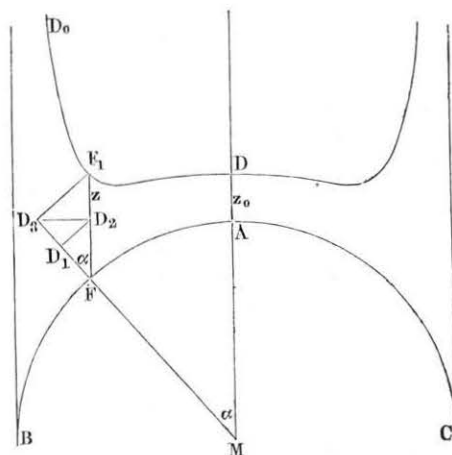
Diese Gleichung gewährt ein einfaches Mittel, für ein gegebenes Kreisgewölbe vom Halbmesser  $r$  und für eine gegebene Scheitelbelastung  $z_0$  die Größe der einem beliebigen Winkel  $\alpha$  entsprechenden Belastungsordinate  $z$  durch Rechnung oder Construction zu finden. Zu letzterem Zwecke hat man nur, wenn  $AD$ , Fig. 70, die Ordinate  $z_0$  der Belastung im Scheitel des kreisförmigen Gewölbes  $CAB$  ist, für einen Punkt  $F$  im Abstände  $AMF = \alpha$  vom Scheitel auf dem Radius  $MF$  die Strecke  $FD_1 = AD$  zu machen, dann  $D_1D_2$  senkrecht zum Radius bis zur Verticalen  $FF_1$  durch  $F$  zu ziehen,  $D_2D_3$  senkrecht auf  $FF_1$  und endlich  $D_3F_1$  wieder senkrecht zu  $FD_3$  zu machen, um in

$$FF_1 = \frac{FD_3}{\cos \alpha} = \frac{FD_2}{\cos^2 \alpha} = \frac{FD_1}{\cos^3 \alpha} = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha} = z$$

die gesuchte Belastungsordinate für den Winkel  $\alpha$  zu erhalten. Wiederholt

man diese Construction für genügend viele Winkel  $\alpha$ , so erhält man als Belastungslinie die Curve  $DF_1D_0$ , welche sich beiderseits asymptotisch an die durch  $B$  und  $C$  gelegten Verticalen anschließt.

Fig. 70.



Wenn man entweder in dieser Weise oder durch Rechnung die Belastungslinien für ein und dasselbe Kreisgewölbe vom Radius  $r$ , aber für verschiedene Modul  $a$ , d. h. für verschiedene Scheitelbelastungen

$$\frac{r}{a} = z_0$$

zeichnet, so erhält man eine Darstellung, wie Fig. 71 (a. f. S.), in

welcher die Belastungslinien für die Werthe von  $a = 1, 2, 3, 5, 10$ , und 20 eingetragen sind.

Diese Figur zeigt, daß unter diesen Stützklinien die dem Modul  $a = 3$  zugehörige, welche für eine Erstreckung von etwa  $20^\circ$  zu jeder Seite vom Scheitel nahezu eine horizontale Gerade wird, in gewissem Sinne eine Grenze bildet zwischen den Formen der Stützklinien mit größerem und denjenigen mit kleinerem Modul. Während nämlich die letzteren ihren tiefsten Punkt im Scheitel haben und durchweg ihre concave Seite abwärts kehren, sind die übrigen Stützklinien in ihrem mittleren Theile auf einer um so größeren Erstreckung nach unten concav gebogen, ehe sie sich an den Schenkeln wieder erheben, je größer der Modul  $a$  ist. Der asymptotische Anschluß aller Stützklinien zeigt, daß es in Wirklichkeit nicht möglich ist, eine Belastung anzugeben, welcher die Form des vollen Halbkreises als Stützklinie zukommt, daß dies dagegen möglich ist für kleinere Mittelpunktswinkel, welche etwa zu  $\alpha = 20^\circ$  für  $a = 3$ ; zu  $\alpha = 30^\circ$  für  $a = 5$  u. f. w. aber selbst für  $a = 25$  nicht größer als etwa  $70^\circ$  nach jeder Seite vom Scheitel annehmen sein dürften.

Daß die gedachte Grenze durch diejenige Stützklinie gegeben ist, welche genau dem Modul  $a = 3$  entspricht, läßt sich leicht nachweisen. Bezeichnet man mit  $y'$  die verticale Ordinate einer Belastungslinie in Bezug auf ihren im Scheitel gelegenen Punkt als Koordinatenanfang, so hat man nach Fig. 69:

$$y' = z - y = z - z_0 - r(1 - \cos \alpha) = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha} + r \cos \alpha - (z_0 + r).$$

Für das Maximum oder Minimum von  $y'$  hat man daher

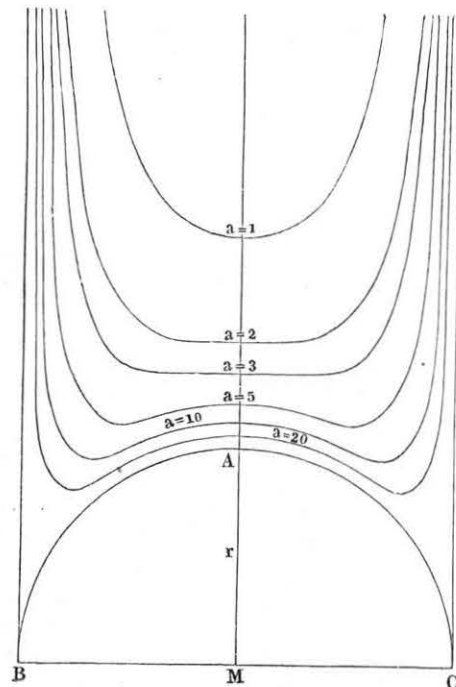
$$0 = \frac{dy'}{d\alpha} = 3 \frac{z_0}{\cos^2 \alpha} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - r \sin \alpha,$$

woraus

$$\cos^4 \alpha = 3 \frac{z_0}{r} = \frac{3}{a}$$

folgt. Hieraus ergibt sich für  $a = 3$ ;  $\cos \alpha = 1$  oder  $\alpha = 0$  und für  $a > 3$  erhält man zwei gleiche reelle Winkel, welche einen positiven und einen negativen Werth haben, während  $a < 3$  imaginäre Werthe ergibt.

Fig. 71.

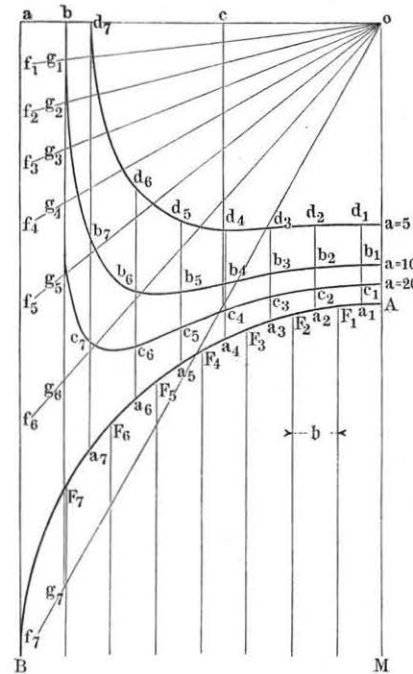


nommenen Pol  $o$  ein Strahlenbüschel, dessen Strahlen  $oa, of_1, of_2 \dots$  mit den Tangenten in  $A, F_1, F_2 \dots$  parallel sind, so liefert dieses Strahlenbüschel das zugehörige Kräftepolygon, sobald man die Belastung des Gewölbes auf einer Verticallinie in gehöriger Weise einträgt. Zieht man z. B. durch den Punkt  $b$  des horizontalen Strahls  $oa$  die Verticale  $bg_1$ , so stellen die einzelnen Strecken  $bg_1, g_1g_2, g_2g_3 \dots$  dieser Verticallinie zwischen den Strahlen die auf die Bogenelemente  $AF_1, F_1F_2, F_2F_3 \dots$  entfallenden Belastungen nach einem gewissen

Man kann auch für eine kreisförmige oder ganz beliebige Stützlinie die zugehörigen Belastungslinien in einfacher Weise graphisch entwerfen, wenn man zu der angenommenen Stützlinie, welche man als Seilpolygon ansieht, ein zugehöriges Kräftepolygon zeichnet. Diese Construction ist in Fig. 72 für ein Kreisgewölbe  $MAB$  dargestellt. Denkt man sich das halbe Gewölbe durch eine möglichst große Anzahl verticaler Theilungsebenen  $F_1F_2F_3 \dots$  in einzelne Streifen von gleicher Breite  $b$  getheilt, so hat man die Stützkkräfte des Bogens in den Theilpunkten  $A, F_1, F_2, F_3 \dots$  in den Richtungen der Tangenten dieser Punkte anzunehmen. Legt man daher durch einen beliebig ange-

Kräftemaßstab dar. Wenn man nun für diesen Kräftemaßstab die Breite  $b$  der einzelnen Gewölbstreifen als Basis annimmt, so ergibt sich die dem Kräftepolygone  $obg_7$  zugehörige Belastungslinie in der Curve  $b_1b_2b_3 \dots$ , welche man erhält, wenn man in den Mitten  $a_1a_2a_3 \dots$  der Bogenelemente die verticalen Ordinaten  $a_1b_1 = bg_1$ ,

Fig. 72.



$a_2b_2 = g_1g_2, a_3b_3 = g_2g_3 \dots$  aufträgt. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction ergibt sich einfach aus der Bemerkung, daß das angegebene Verfahren im Wesentlichen nur eine Umkehrung des zur Construction der Stützlinie für eine vorgeschriebene Belastungslinie angegebenen ist, und es folgt daraus, daß die Construction gültig bleibt, auch wenn man anstatt des Kreisbogens  $MAB$  eine beliebige Curve als Stützlinie voraussetzt. Es läßt sich daher ebensowohl für jede angenommene Stützlinie die Vertheilung der Last ermitteln, wie umgekehrt aus jeder Belastungslinie die zugehörige Stützlinie sich ergibt. In der Figur ist der Punkt  $b$  in solchem Abstände von  $o$  gewählt, daß  $bg_1 = \frac{1}{10} MA$  ist, daher wird die Linie  $b_1b_2b_3 \dots$  einem Modul des Gewölbes  $a = 10$  entsprechen. Die Verticale durch  $c$ , welcher Punkt in der Mitte zwischen

$o$  und  $b$  angenommen ist, giebt folglich die dem Modul 20 zukommende Belastungslinie  $c_1c_2c_3 \dots$  während ebenso für die Construction der dem Modul  $a = 5$  zukommenden Belastungslinie  $d_1d_2d_3 \dots$  eine Verticale angenommen wurde, welche vom Pole  $o$  einen doppelt so großen Abstand hat, als  $bg_1$ .

**Horizontal begrenzte Belastung.** In derselben Weise, wie im §. 23. vorhergehenden Paragraphen zu einer bestimmt angenommenen Stützlinie die zugehörige Belastungslinie ermittelt worden ist, läßt sich, wie schon bemerkt wurde, auch umgekehrt für eine vorgeschriebene Belastung die zugehörige Stützlinie bestimmen. Es möge der häufige Fall vorausgesetzt werden, daß die Belastungslinie des Gewölbes durch eine horizontale Gerade dargestellt ist, so hat man für diesen Fall einfach in den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen überall  $y$  für  $z$  zu setzen, und erhält daher zunächst aus (5)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y}{H} \quad \dots \quad (12)$$

Multipliziert man diese Gleichung beiderseits mit  $2 dy$ , so erhält man die zur Integration geeignete Form

$$2 \frac{dy}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2y dy}{H},$$

woraus

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2}{H} + C$$

folgt, und da für  $x = 0$  hier  $y = y_0$  und  $\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = 0$  zu setzen ist, ergibt sich die Constante  $C$  aus

$$0 = \frac{y_0^2}{H} + C \text{ zu } C = -\frac{y_0^2}{H},$$

folglich ist:

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2 - y_0^2}{H}} \quad \dots \quad (13)$$

und hieraus

$$y = \sqrt{H \tan^2 \alpha + y_0^2} \quad \dots \quad (14)$$

Schreibt man die Gleichung (13), um sie nochmals zu integrieren,

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} = \frac{dx}{\sqrt{H}},$$

so erhält man, da

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - y_0^2}} = d \ln (y + \sqrt{y^2 - y_0^2})$$

ist,

$$\ln (y + \sqrt{y^2 - y_0^2}) + C = \frac{x}{\sqrt{H}}.$$

Da hier  $x = 0$  und  $y = y_0$  zusammengehörige Werthe sind, so folgt  $C = -\ln y_0$ , folglich erhält man

$$\ln \frac{y + \sqrt{y^2 - y_0^2}}{y_0} = \frac{x}{\sqrt{H}} \quad \dots \quad (15)$$

als die Gleichung für die gesuchte Stützlinie.

Diese Gleichung, welche zuerst von Hagen\*) aufgestellt worden ist, kann dazu dienen, die Ordinaten  $y$  für jeden horizontalen Abstand  $x$  vom Scheitel zu bestimmen, wenn die Ordinate  $y_0$  der Belastung im Scheitel und der Halbmesser  $r$  daselbst, oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Modul

\*) Hagen, Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen. Berlin, 1862.

$a = \frac{r}{y_0}$  gegeben sind, denn der Horizontalschub  $H$  bestimmt sich nach (8) und (9), wenn man  $y_0$  anstatt  $z_0$  einführt, zu

$$H = r y_0 = a y_0^2.$$

Ebenso kann man, wenn außer der Scheitelbelastung  $y_0$  etwa die Spannweite  $l$  und Pfeilhöhe  $h$  gegeben sind, die Größe  $H$ , also auch den Scheitelhalbmesser  $r = \frac{H}{y_0}$  finden, wenn man in Gleichung (15)  $\frac{l}{2}$  für  $x$  und  $h + y_0$  für  $y$  einsetzt.

Führt man den Werth  $r y_0$  für  $H$  in (15) ein, so kann man diese Gleichung auch schreiben:

$$\frac{x}{e \sqrt{r y_0}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - y_0^2}}{y_0} = \frac{y}{y_0} + \sqrt{\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 1},$$

woraus sich nach einfacher Umformung ergibt

$$\frac{y}{y_0} = \frac{1}{2} \left( e^{\frac{x}{\sqrt{r y_0}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{r y_0}}} \right) \quad \dots \quad (16)$$

Zur Veranschaulichung der dieser Belastungsart zugehörigen Stützlinien kann die Formel (7) für den Krümmungshalbmesser dienen, welche, wenn darin  $y$  für  $z$  gesetzt wird, in

$$\varrho = \frac{H}{y \cos^3 \alpha}$$

übergeht. Führt man hierin für  $y$  den Werth aus (14)

$$y = \sqrt{H \tan^2 \alpha + y_0^2}$$

ein, und setzt

$$H = a y_0^2,$$

so erhält man

$$\varrho = \frac{a y_0^2}{\cos^3 \alpha \sqrt{a y_0^2 \tan^2 \alpha + y_0^2}} = \frac{a y_0}{\cos^3 \alpha \sqrt{a \tan^2 \alpha + 1}} \quad \dots \quad (17)$$

Schreibt man diese Gleichung

$$\cos^3 \alpha \sqrt{a \tan^2 \alpha + 1} = \frac{a y_0}{\varrho}$$

und differentiiert, so erhält man weiter:

$$\frac{\cos^3 \alpha \cdot a \tan \alpha}{\cos^2 \alpha \sqrt{a \tan^2 \alpha + 1}} - 3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \sqrt{a \tan^2 \alpha + 1} =$$

$$-\frac{a y_0}{\varrho^2} \frac{d\varrho}{d\alpha},$$



oder, hierin nach (17)

$$\sqrt{a \tan^2 \alpha + 1} = \frac{a y_0}{\rho \cos^3 \alpha}$$

gesetzt:

$$\frac{\rho \cos^4 \alpha \tan \alpha}{y_0} - 3 a y_0 \frac{\tan \alpha}{\rho} = - \frac{a y_0}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\alpha},$$

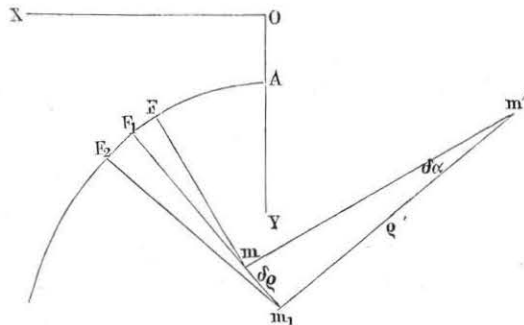
woraus endlich

$$\frac{d\rho}{d\alpha} = \rho \tan \alpha \left( 3 - \frac{\rho^2 \cos^4 \alpha}{a y_0^2} \right) = \rho' \quad (18)$$

folgt.

Der hier entwickelte Werth  $\frac{d\rho}{d\alpha}$  hat bekanntlich die geometrische Bedeutung, den Krümmungshalbmesser für die Evolute der betrachteten Curve darzustellen, wie man am einfachsten aus Fig. 73 ersieht. Ist hier  $F$

Fig. 73.



irgend ein Punkt der betrachteten Stützlinie mit den Coordinaten  $x, y$  und  $F_1$  der unendlich nahe liegende Punkt der Curve mit den Ordinaten  $x + dx$  und  $y + dy$ , also  $FF_1$  das Curvelement  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ , so schneiden sich die beiden in  $F$  und  $F_1$  auf der Curve daselbst errichteten Normalen in dem Krümmungsmittelpunkte  $m$  des Elementes  $FF_1$ , und ebenso ist der Schnittpunkt  $m_1$  der Normalen in  $F_1$  und  $F_2$  der Krümmungsmittelpunkt des Elementes  $F_1F_2$ , und man hat daher  $Fm = \rho$ , und da  $mm_1 = d\rho$  ist, so stellt  $mm_1$  das zugehörige Element der Evolute für die Curve  $AF$  vor. Die Normalen zu den Krümmungshalbmessern in  $m$  und  $m_1$ , welche sich in  $m'$  schneiden mögen, schließen denselben Winkel  $d\alpha$  mit einander ein, wie die Krümmungshalbmesser  $Fm$  und  $F_1m_1$  oder die Tangenten der Stützlinie in  $F$  und  $F_1$ . Bezeichnet man daher den

Krümmungshalbmesser  $mm' = m_1m'$  der Evolute in  $mm_1$  mit  $\rho'$ , so hat man  $\rho' d\alpha = mm_1 = d\rho$ , d. h.  $\frac{d\rho}{d\alpha} = \rho'$ .

Setzt man nun den in (18) für  $\frac{d\rho}{d\alpha}$  gefundenen Werth gleich Null, so erhält man in den zugehörigen Werthen von  $\alpha$  diejenigen Winkel, für welche  $\rho$  ein Maximum oder Minimum wird, und offenbar entspricht diesen Punkten der Stützlinie eine Spitze oder ein Rückkehrpunkt der Evolute. Die mit  $\frac{d\rho}{d\alpha} = 0$  aus (18) entstehende Gleichung

$$0 = \rho \tan \alpha \left( 3 - \frac{\rho^2 \cos^4 \alpha}{a y_0^2} \right)$$

wird nun erfüllt erstens durch  $\tan \alpha_1 = 0$ , d. h. für  $\alpha_1 = 0$  im Scheitel des Gewölbes, welchem daher stets eine Spitze der Evolute entspricht, und zweitens durch  $3 a y_0^2 = \rho^2 \cos^4 \alpha$ . Aus dieser Gleichung und (17) folgt:

$$3 a y_0^2 = \frac{a^2 y_0^2 \cos^4 \alpha}{\cos^6 \alpha (a \tan^2 \alpha + 1)}$$

oder

$$3 = \frac{a}{\cos^2 \alpha (a \tan^2 \alpha + 1)} = \frac{a (\tan^2 \alpha + 1)}{a \tan^2 \alpha + 1},$$

woraus man den gesuchten Winkel  $\alpha_2$  durch

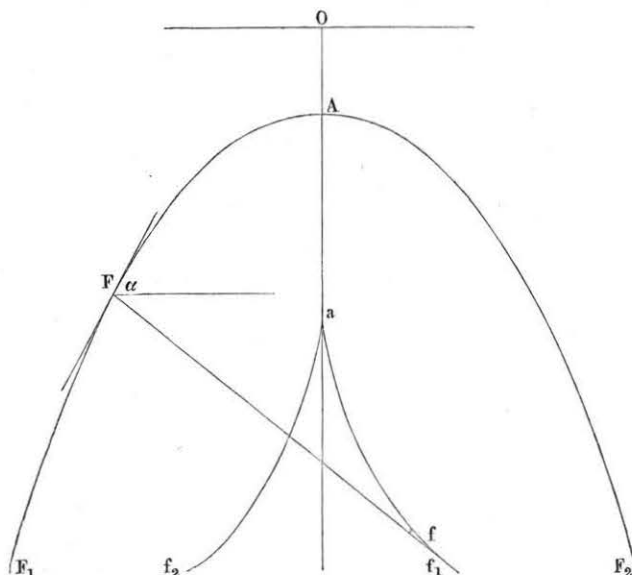
$$\tan \alpha_2 = \sqrt{\frac{a-3}{2a}} \quad (19)$$

erhält.

Dieser Gleichung gemäß hat man wieder die Stützlinien zu unterscheiden in zwei Arten, je nachdem der Modulus  $a$  kleiner oder größer ist als 3. Für  $a < 3$  führt die Gleichung (19) zu imaginären Werthen, ein Anzeichen dafür, daß in diesem Falle die Größe  $\frac{d\rho}{d\alpha} = \rho'$  nur einmal zu Null wird, nämlich für den Scheitel d. h. für  $\alpha = 0$ , und zwar ist daselbst der Krümmungsradius  $\rho = a y_0 = r$  ein Minimum, indem  $\rho$  nach (17) um so größer ausfällt, je größer man  $\alpha$  annimmt. Die Evolute der Stützlinie hat daher hier nur einen Rückkehrpunkt  $a$ , Fig. 74 (a. f. S.), von welchem aus zwei Curvenzüge  $af_1$  und  $af_2$  symmetrisch zur Verticalen durch den Scheitel ausgehen, derart, daß der Evolutenzweig  $af_1$  die Krümmungsmittelpunkte für die halbe Stützlinie  $AF_1$  aufnimmt, z. B. stellt  $f$  den Krümmungsmittelpunkt für die Stützlinie in  $F$  vor, woselbst die Tangente von der Horizontalen um den Winkel  $\alpha$  abweicht. Es ist hieraus ersicht-

lich, daß alle diese Stützklinien, für welche  $a < 3$  ist, eine überhöhte oder eiförmige Gestalt zeigen müssen.

Fig. 74.



Setzt man dagegen voraus, daß  $a > 3$  sei, so liefert die Gleichung (19) für  $\alpha$  zwei gleiche entgegengesetzte Werthe  $\alpha_2$ , welchen nunmehr ein Minimalwerth von  $\varrho_2$  angehört, der sich aus (19) und (17) zu

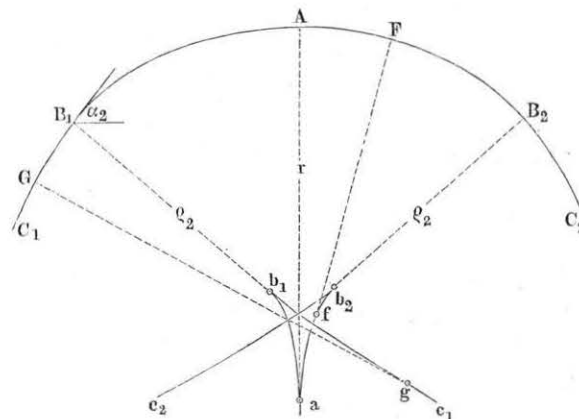
$$\begin{aligned} \varrho_2 &= \frac{ay_0 \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\sqrt{a \tan^2 \alpha + 1}} = \frac{ay_0 \sqrt{1 + \frac{a-3}{2a}}}{\sqrt{\frac{a-3}{2} + 1}} = \frac{ay_0 \sqrt{\frac{3}{2a}(a-1)}}{\sqrt{\frac{a-1}{2}}} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{3} \cdot y_0 \frac{a-1}{\sqrt{a}} = 2,6 y_0 \frac{a-1}{\sqrt{a}} \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

berechnet. Der Werth  $\varrho_1 = r$  für  $\alpha = 0$  entspricht in diesem Falle einem relativen Maximum des Krümmungshalbmessers, welcher vom Scheitel aus bei allmäliger Zunahme von  $\alpha = 0$  bis  $\alpha = \alpha_2$  zunächst seinen Werth auf  $\varrho_2 = 2,6 y_0 \frac{a-1}{\sqrt{a}}$  vermindert, um dann bei weiterer Zunahme von

$\alpha$  bis ins Unendliche zu wachsen, so daß die Schenkel der Stützklinie sich verticalen geraden Linien nähern.

Der Verlauf der Stützklinien und ihrer Evoluten für den Fall  $a > 3$  ist aus Fig. 75 ersichtlich. Während für den Scheitel A der Stützklinie der

Fig. 75.



Mittelpunkt in der Spitze a der Evolute liegt, wandert bei allmäliger Zunahme von  $\alpha$  der Krümmungsmittelpunkt von a nach  $b_1$  bzw.  $b_2$ , und erreicht diese Ecken, sobald in B der Winkel der Stützklinie gegen den Horizont nach (19) den Werth  $\alpha_2 = \arctan \sqrt{\frac{a-3}{2a}}$  erlangt hat, in

welchem Falle der Krümmungshalbmesser von  $aA = r$  im Scheitel auf  $b_1B_1 = b_2B_2 = \varrho_2$  herabgegangen ist. Bei noch weiterer Vergrößerung von  $\alpha$  wandert der Krümmungsmittelpunkt der Stützklinie den Zweigen  $b_1c_1$  und  $b_2c_2$  der Evolute entlang bis ins Unendliche, indem nunmehr der Krümmungshalbmesser fortwährend wächst. Für den Punkt F z. B. ist f und für den Punkt G ist g der Krümmungsmittelpunkt. Es ist hieraus ersichtlich, daß die Stützklinien dieser Gruppe (für  $a > 3$ ) gedrückte Gestalt nach Art der Korblinien zeigen werden.

Mittels der Formel (17)

$$\varrho = \frac{ay_0}{\cos^3 \alpha \sqrt{a \tan^2 \alpha + 1}}$$

kann man nun für irgend ein Gewölbe, dessen Modul  $\frac{r}{y_0} = a$  gegeben ist, für jeden beliebigen Winkel  $\alpha$  den Krümmungshalbmesser  $\varrho$  berechnen, und

damit die Stützlinie selbst mit beliebig großer Annäherung verzeichnen. Zur Erleichterung dieser Aufgabe soll hier die von Schwedler berechnete Tabelle der Krümmungshalbmesser für Winkel von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  wachsend, angeführt werden. Diese Tabelle enthält für die in der obersten Horizontalreihe angegebenen Modul  $a$  zwischen 0,1 und 25 in den Verticalreihen die Coefficienten

$$\frac{a}{\cos^3 \alpha \sqrt{a \tan^2 \alpha + 1}},$$

mit denen die Belastungsordinate  $y_0$  im Scheitel multiplicirt werden muß, um denjenigen Halbmesser  $\rho$  der Stützlinie zu finden, welcher von der Verticalen im Scheitel um den zugehörigen Winkel  $\alpha$  abweicht. Nimmt man dabei die Ordinate  $y_0$  der Belastung im Scheitel als Einheit an, so geben die gedachten Zahlen natürlich direct die Krümmungshalbmesser, und die Werthe der obersten Horizontalreihe für den Modul  $a$  sind gleichbedeutend mit den Halbmessern  $r = ay_0$  im Scheitel. Ferner sind unter der Bezeichnung  $\rho_2$  die kleinsten Halbmesser für diejenigen Stützlinien angeführt, deren Modul  $a$  größer als 3 ist, und die unter  $a_2$  angegebenen Werthe entsprechen den Abweichungen dieser kleinsten Werthe  $\rho_2$ .

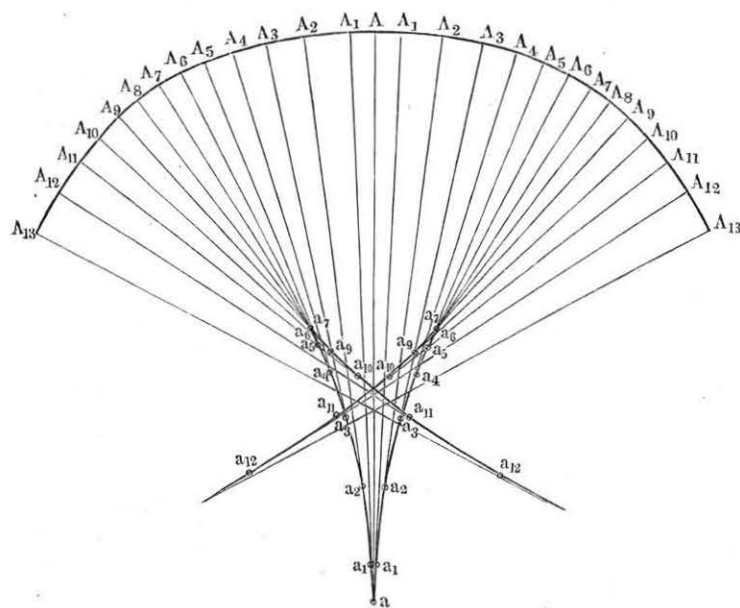
In welcher Weise diese Tabelle dazu dienen kann, für einen bestimmten Fall die Stützlinie zu verzeichnen, ist aus Fig. 76 zu ersehen, welche die dem Modul  $a = 25$  zugehörige Stützlinie darstellt. Hier ist auf der durch den Scheitel  $A$  gezogenen Verticallinie die Strecke  $Aa = 25$  Einheiten des zu Grunde gelegten Maßstabes abgetragen, und um  $a$  mit dem Halbmesser  $aA = r = 25$  ein Bogen  $AA_1$  von  $2,5^\circ$  nach jeder Seite gezeichnet. Nunmehr ist auf dem Radius  $A_1a$  die Strecke  $A_1a_1$  gleich dem aus der Tabelle für  $\alpha = 5^\circ$  zu entnehmenden Radius  $\rho = 23,2$  angetragen und  $a_1$  als Mittelpunkt für das Bogenelement  $A_1A_2$  von  $5^\circ$  Erstreckung benutzt. Ebenso ist auf  $A_2a_1$  die Strecke  $A_2a_2 = 19,8$  angetragen, entsprechend dem Werthe  $\rho$  für  $\alpha = 10^\circ$ , und von  $a_2$  der Bogen  $A_2A_3$  gezeichnet u. s. w. Auf diese Weise erhält man in der Aufeinanderfolge der Bogen von je  $5^\circ$  eine Curve, welche sich der wirklichen Stützlinie sehr nahe anschließt, während die einzelnen Mittelpunkte  $a, a_1, a_2, \dots$  die Ecken eines Polygons darstellen, welches der Evolute der Stützlinie eingeschrieben ist. Wollte man die Annäherung an die genaue Stützlinie noch weiter treiben, so hätte man nur die obige Tabelle in der Art zu erweitern, daß man die Intervalle des Winkels  $\alpha$  kleiner annimmt und die entsprechenden Zwischenwerthe von  $\rho$  noch berechnet. Der damit gezeichnete Zug von Kreisbögen wird sich dann der wirklichen Stützlinie um so mehr nähern, je kleiner man die Intervalle von  $\alpha$  annimmt. Diese genauere Construction, welche übrigens keine besonderen Schwierigkeiten darbietet, wird

Tabelle der Krümmungshalbmesser  
für Stützlinien mit horizontaler Belastungsebene  
 $y_0 = 1.$   
 $\rho = \frac{a}{\cos^3 \alpha \sqrt{a \tan^2 \alpha + 1}} y_0$

$a = r =$	25	20	15	10	8	5	3	1	0,5	0,1
$\alpha =$	23,2 19,8 16,7 14,6 13,4 12,5 12,5 12,8 13,8 15,5 18,4 23 76,1 12,5 330°30'	18,7 16,6 14,4 12,6 11,6 11,1 11,1 11,4 12,2 13,8 16,2 20,5 68,8 11,1 330°	14,3 13,1 11,6 10,5 9,7 9,4 9,4 9,8 10,5 11,9 14,1 17,7 59,5 9,4 320°20'	9,7 9,1 8,5 7,9 7,5 7,4 7,5 7,8 8,5 9,3 11,4 14,4 48,7 30°7,40'	7,84 7,51 7,10 6,68 6,48 6,42 6,55 6,87 7,48 8,55 10,0 12,8 43,1 290°20'	4,96 4,89 4,78 4,70 4,64 4,7 4,84 5,19 5,70 6,56 7,85 10,0 34,2 4,6 240°20'	3,01 3,02 3,03 3,06 3,13 3,27 3,47 3,75 4,22 4,89 5,90 7,60 26,5	1,01 1,03 1,07 1,14 1,22 1,34 1,41 1,69 1,99 2,40 3,0 4,0 15,1	0,51 0,52 0,55 0,58 0,64 0,71 0,82 0,96 1,15 1,43 1,85 2,53 10,2	0,10 0,10 0,11 0,12 0,13 0,15 0,18 0,21 0,27 0,35 0,48 0,70 3,70
$\left\{ \begin{matrix} \rho_2 \\ \alpha_2 \end{matrix} \right. =$	23	20	17	15	10	7	17	10	10	3
$\left\{ \begin{matrix} \tau_1 \\ \alpha' \end{matrix} \right. =$	22,2 12,5°	18,1 12,5°	14 12,5°	9,5 12,5°	7,74 12,5°	4,98 12,5°	3,1 30°	1,1 30°	0,56 30°	0,12 30°
$\left\{ \begin{matrix} \tau_2 \\ \alpha' \end{matrix} \right. =$	14,4 55°	12,7 55°	10,35 50°	8,3 50°	6,8 47,5°	4,73 35°	5 60°	2,2 60°	1,3 60°	0,33 60°
$\left\{ \begin{matrix} \tau_3 \\ \alpha' \end{matrix} \right. =$	23	20	17	15	10	7	17	10	10	3

aber nur in den seltensten Fällen nöthig werden; im Gegentheil wird man sich für gewöhnlich einer weiteren Vereinfachung in der Construction der Stützlinie bedienen können, darin bestehend, daß man die Stützlinie durch eine Vereinigung von einigen wenigen Kreisbögen ersetzt, deren Halbmesser

Fig. 76.



und Mittelpunkte so gewählt werden, daß die einzelnen Bögen nicht nur wie bei den bekannten Korbbögen ohne Knick in einander übergehen, sondern sich auch in ihrem Verlaufe der exacten Stützlinie möglichst nahe anschließen. Zur Bestimmung der geeignetsten Halbmesser für diese einzelnen Kreisbogensegmente giebt Schwedler folgenden Weg an.

Der relativ größte Halbmesser ist unter der Voraussetzung  $a > 3$  nach dem Vorhergehenden der Scheitelhalbmesser  $r$ , in Fig. 76 durch  $Aa = 25$  gegeben, während der kleinste Halbmesser der Stützlinie zu  $q_2 = 12,5$  entsprechend einem Winkel  $\alpha = 33^\circ 30'$  aus der Tabelle zu entnehmen ist, und in der Figur einem Punkte zwischen  $A_6$  und  $A_7$  angehört. Der mittlere Halbmesser zwischen beiden ist also durch  $\frac{1}{2}(25 + 12,5) = 18,75$  ausgedrückt, welcher einem Punkte der Stützlinie zwischen  $A_2$  und  $A_3$  zukommt. Denkt man sich nun von sämtlichen Krümmungshalbmessern

zwischen demjenigen  $r$  im Scheitel  $A$  und diesem mittleren Werthe  $\frac{r + q_2}{2}$  zu beiden Seiten des Scheitels das arithmetische Mittel genommen, welches durch  $r_1$  ausgedrückt sein mag, so kann man dieses Mittel als den Halbmesser eines Kreissegmentes annehmen, welches sich auf einen Winkel erstreckt, der gleich ist der Summe aller der Winkel, die den einzelnen Radien zukommen, von denen  $r_1$  das arithmetische Mittel ist. So z. B. ergibt sich im vorliegenden Falle für  $a = 25$  nach der Tabelle das arithmetische Mittel aller Radien zu beiden Seiten des Scheitels, die zwischen  $r = 25$  und  $\frac{1}{2}(r + q_2) = 18,75$  gelegen sind, zu:

$$r_1 = \frac{19,8 + 23,2 + 25 + 23,2 + 19,8}{5} = 22,2,$$

und der Centriwinkel, welcher allen diesen Radien zukommt, zu  $5 \cdot 5 = 25^\circ$ . Folglich wird man mit dem Radius  $r_1 = 22,2$  ein Kreissegment von  $25^\circ$  oder zu jeder Seite des Scheitels von  $12,5^\circ$  als angenäherte Form für die Stützlinie anwenden können. In derselben Weise ergibt sich nun das arithmetische Mittel  $r_2$  aller der zwischen dem kleinsten Werthe  $q_2 = 12,5$  und jenem mittleren Werthe  $\frac{1}{2}(r + q_2) = 18,75$  gelegenen Radien nach der Tabelle zu:

$$r_2 = \frac{16,7 + 14,6 + 13,4 + 12,5 + 12,5 + 12,8 + 13,8 + 15,5 + 18,4}{9} = 14,4,$$

und der zu diesem Radius zugehörige Centriwinkel ist  $9 \cdot 5 = 45^\circ$ . Will man die Stützlinie über den Winkel  $12,5 + 45 = 57,5^\circ$  hinaus verlängern, so kann man der Tabelle zufolge den Halbmesser  $q = 23$  für  $\alpha = 60^\circ$  anwenden u. s. w. In der Tabelle finden sich in den mit  $r_1, r_2, r_3$  bezeichneten Horizontalreihen diese mittleren Halbmesser und unter  $\alpha', \alpha''$  die zugehörigen Winkelabstände vom Scheitel angegeben, so zwar, daß man mit dem Halbmesser  $r_1$  einen Bogen vom Scheitel aus zu jeder Seite im Betrage  $\alpha'$  zu zeichnen, daran in jeder Gewölbhälfte je einen Bogen mit dem Halbmesser  $r''$  vom Winkelbetrage  $\alpha'' - \alpha'$  zu schließen hat u. s. w. In ähnlicher Weise würde man die mittleren Halbmesser bestimmen können, wenn man behufs engeren Anschlusses der Korblinie an die wirkliche Stützlinie für die erstere eine größere Anzahl (ungerade) von Bogensegmenten anwenden wollte.

Eine in der vorstehenden Art aus verschiedenen Kreisbögen zusammengesetzte Korblinie kann natürlich nur als angenäherte Form der wirklichen Stützlinie gelten, und man wird bei der Annahme dieser Korblinie gewisse Fehler begehen, von deren Größe man sich leicht in jedem Falle Rechenschaft geben kann. Es sei zu dem Zwecke beispielsweise in Fig. 77 (a. f. S.) die Korblinie aus fünf Mittelpunkten  $o_1 o_2 o_3$  gezeichnet, welche der obigen Tabelle gemäß



der Stützlinie für den Modulus  $a = 10$  entspricht, indem die Radien und Bögen

$$r_1 = A o_1 = 9,5; \quad \alpha' = A o_1 A_1 = 12,5^\circ,$$

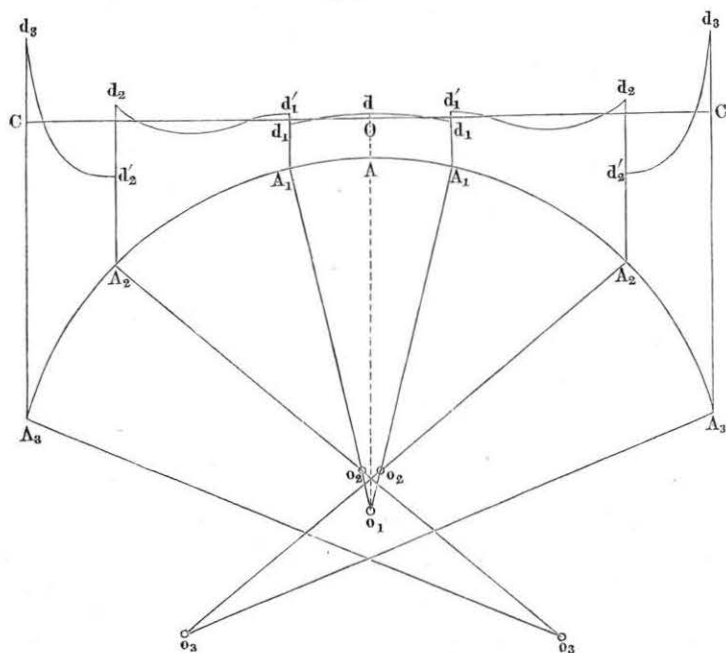
$$r_2 = A_1 o_2 = 8,3; \quad \alpha'' = A A_1 A_2 = 50^\circ,$$

$$r_3 = A_2 o_3 = 15; \quad \alpha''' = A A_1 A_2 A_3 = 60^\circ$$

gewählt sind.

Man kann sich nun jedes der fünf verschiedenen Kreissegmente als eine exacte Stützlinie vorstellen, wenn man nämlich voraussetzt, daß die Belastung jedes einzelnen Theiles genau so vorgenommen werde, wie es nach dem vorigen Paragraphen für die zugehörige kreisförmige Stützlinie er-

Fig. 77.



forderlich ist. Wenn dann, wie hier, die einzelnen Segmente in den vier Vereinigungspunkten  $A_1$  und  $A_2$  ohne Knick in einander übergehen, und man ferner die für jede Stützlinie geltende Bedingung eines überall gleichen Horizontalschubes  $H$  für alle Segmente stellt, so kann man auch die Vereinigung der fünf Segmente, d. h. die ganze Korblinie als eine exacte Stützlinie ansehen, für welche die Belastung durch die Vereinigung

der auf die einzelnen Theile entfallenden Belastungen gegeben ist. Natürlich ist dann diese Belastung nicht mehr durch eine horizontale Ebene, sondern durch fünf verschiedene Belastungsflächen von der Art der in Fig. 71 gezeichneten dargestellt. Der Horizontalschub des Bogens ist nach Gleichung (8) allgemein durch  $H = r z_0$  ausgedrückt, unter  $r$  den Halbmesser im Scheitel und unter  $z_0$  die Belastung daselbst verstanden, folglich hat man für die vorliegende Korblinie die Bedingung

$$H = r_1 z_0' = r_2 z_0'' = r_3 z_0''',$$

wenn  $z_0'$ ,  $z_0''$ ,  $z_0'''$  die betreffenden Scheitelbelastungen der einzelnen Kreisgewölbe bedeuten. Dieser Horizontaldruck  $H$  ist nun auch gleich demjenigen des Gewölbes mit horizontal abgeglichener Belastung vom Modul  $a = 10$  zu setzen, für dessen Stützlinie die Korblinie ein Ersatz sein soll, und da für dieses Gewölbe, wenn  $A O = y_0$  gleich der Einheit angenommen wird,

$$H = r y_0 = a y_0^2 = 10$$

ist, so findet man ohne Weiteres die Scheitelbelastungen der einzelnen Gewölbe theile zu

$$z_0' = \frac{H}{r_1} = \frac{10}{9,5} = 1,05 \quad \text{für } A_1 A A_1,$$

$$z_0'' = \frac{H}{r_2} = \frac{10}{8,3} = 1,205 \quad \text{für } A_1 A_2,$$

$$z_0''' = \frac{H}{r_3} = \frac{10}{15} = 0,667 \quad \text{für } A_2 A_3.$$

Mit diesen Scheitelbelastungen findet man nun durch die für Kreisgewölbe im vorigen Paragraphen gefundene Formel (11)  $z = \frac{z_0}{\cos^3 \alpha}$  die Belastungshöhen für die Endpunkte  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  jedes Bogenstückes, wenn man für  $\alpha$  die entsprechenden Werthe  $\alpha' = 12,5^\circ$ ,  $\alpha'' = 50^\circ$ ,  $\alpha''' = 66^\circ$  einführt. Auf diese Weise hat man die Belastungsordinaten für

1) das mittlere Bogenstück  $A_1 A_2$  im Scheitel:

$$z_0' = 1,05 = A d,$$

an den Enden  $A_1$ :

$$z_0' \sec^3 12,5^\circ = 1,13 = A_1 d_1;$$

2) das Gewölbestück  $A_1 A_2$  jederseits in  $A_1$ :

$$z_0'' \sec^3 12,5^\circ = 1,30 = A_1 d_1',$$

in  $A_2$ :

$$z_0'' \sec^3 50^\circ = 4,54 = A_2 d_2;$$

3) das Gewölbestück  $A_2 A_3$  jederseits in  $A_2$ :

$$z_0''' \sec^3 50^\circ = 2,51 = A_2 d_2',$$

in  $A_3$ :

$$z_0''' \sec^3 66^\circ = 9,94 = A_3 d_3.$$

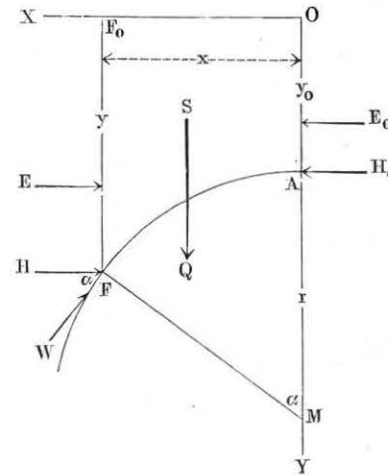
Berechnet man auch noch für Zwischenpunkte die Ordinaten  $z$ , so erhält man als Belastungslinie die gebrochene Curve  $d d_1 d_1' d_2 d_2' d_3$ . Nach dieser Linie müßte folglich die Belastung über dem Gewölbe ausgebreitet sein, wenn die Korblinie eine exacte Stützlinie sein sollte. Soll dagegen die Korblinie nur als angenäherte Stützlinie für ein Gewölbe mit horizontal abgeglichener Belastung gelten, so hat man die Anordnung, d. h. die Halbmesser und Winkel für die Korblinie, so zu wählen, daß die horizontale Belastungslinie  $COC$  die Belastungscurve jedes einzelnen Gewölbtheiles derart schneidet, daß die Flächentheile oberhalb der Geraden gleich denjenigen unterhalb werden. In welcher Weise man, falls dies nicht der Fall sein sollte, eine entsprechende Correctur der Korblinie vornehmen kann, ist leicht zu erkennen, denn wenn man z. B. den Halbmesser  $r_2 = A_1 o_2$  entweder kleiner oder größer wählt, so wird dadurch das Curvenstück  $d_1' d_2$  im ersten Falle gehoben, im zweiten gesenkt.

Aus dem Vorstehenden dürfte wohl von selbst hervorgehen, in welcher Weise man zu verfahren haben wird, um die Belastungsvertheilung zu ermitteln, vermöge deren eine bestimmt vorliegende Gewölbeform zur Stützlinie wird. In der Ausführung hat man dann in geeigneter Weise, z. B. bei Brückengewölben, durch Herstellung von Hohlräumen, Zwischengewölben, Mauerkörpern u. d. d. dafür zu sorgen, daß die wirkliche Belastung des Gewölbes der gefundenen entspricht. Wo eine derartige Freiheit in der Belastung indessen nicht möglich ist, die letztere vielmehr von vornherein nahezu feststeht, wird man durch entsprechende Wahl der Gewölbeform diese zu einer Stützlinie machen können.

Es mag hier noch bemerkt werden, daß in der Praxis meistens nicht der Modulus oder der Halbmesser im Scheitel, sondern in der Regel die Spannweite  $l$  und die Pfeilhöhe, d. h. die Höhe  $h$  des Scheitels über den Kämpfern, sowie auch die Belastung im Scheitel  $y_0$  gegeben ist. In diesem Falle hat man nur nöthig, in der Formel (15) für  $x$  den Werth  $\frac{l}{2}$  und für  $y$  die Summe  $y_0 + h$  einzuführen, um daraus die horizontale Schubkraft  $H$  und folglich auch den Scheitelhalbmesser  $r = \frac{H}{y_0}$  und den Modulus  $a = \frac{r}{y_0} = \frac{H}{y_0^2}$  zu erhalten.

§. 24. Die Stützlinie für Erddruck. Wenn die Belastung des Gewölbes durch Sand, Erde oder überhaupt lockere Massen dargestellt wird, wie dies z. B. bei den Durchlässen unter Dammschüttungen der Fall ist, so hat man außer dem Gewichte dieser Massen auch deren Horizontalschub gegen das

Gewölbe zu berücksichtigen. Es sei  $A$ , Fig. 78, wieder der Scheitel des Gewölbes, über welchem die aus Erde vom specifischen Gewichte  $\gamma$  zu denkende, oben horizontal abgeglichene Belastung die Höhe  $AO = y_0$  habe, und sei das Eigengewicht des Gewölbes selbst gegen die darauf ruhende Erdmasse zuvörderst unberücksichtigt, was bei den gewöhnlich bedeutenden Ueberschüttungen nur einen unbedeutlichen Fehler verursachen wird. Ein Stück des Gewölbes zwischen den Vertical-



ebenen  $AO$  durch den Scheitel und  $FF_0$  durch den Punkt  $F$ , dessen Coordinaten  $x, y$  sind, ist jetzt im Gleichgewichte unter Einfluß des Horizontalschubes  $H_0$  im Scheitel, des Gewichtes  $Q$  der betrachteten Masse  $OF$ , des Bogenwiderstandes  $W$  in  $F$ , der unter dem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont wirkt, und der beiden horizontalen Druckkräfte  $E_0$  und  $E$ , mit welchen die verticalen Flächen  $AO$  und  $FF_0$  von der umgebenden Erdmasse gedrückt werden.

Setzt man den Erddruck gegen eine verticale Fläche von der Breite 1 und der beliebigen Tiefe  $y$  nach den Ergebnissen des ersten Capitels (§. 8) gleich  $\frac{k}{2} \gamma y^2$ , unter  $k$  einen von der Beschaffenheit der Erde abhängigen Coefficienten verstanden, so hat man, wenn man noch das Gewicht  $\gamma$  eines Cubikmeters Erde als Kräfteeinheit wählt:

$$E_0 = \frac{k}{2} y_0^2 \text{ und } E = \frac{k}{2} y^2$$

zu setzen, und man hat daher, wenn hier unter  $H = W \cos \alpha$  die horizontale Componente des Bogenwiderstandes  $W$  verstanden wird, ähnlich wie in §. 22 die Gleichungen:

$$Q = W \sin \alpha, \dots \dots \dots (1)$$

$$H = H_0 - \frac{k}{2} (y^2 - y_0^2), \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{Q}{H} = \tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} \dots \dots \dots (3)$$

und

$$Q = \int_{y_0}^y y \partial x \dots \dots \dots (4)$$

Man erhält daher durch Differentiiren der aus (2), (3) und (4) folgenden Gleichung

$$\int_{y_0}^y y \partial x = H \tan \alpha = \left( H_0 - \frac{k}{2} (y^2 - y_0^2) \right) \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$y = \left( H_0 - \frac{k}{2} (y^2 - y_0^2) \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - k y \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2,$$

woraus

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y \frac{1 + k \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}{H_0 - \frac{k}{2} (y^2 - y_0^2)} = y \frac{1 + k \tan^2 \alpha}{H} \dots (5)$$

folgt. Multiplicirt man beiderseits mit  $2k \partial y$ , so hat man

$$2k \frac{\partial y}{\partial x} \partial \frac{\partial y}{\partial x} = 2 \frac{k y \partial y}{H_0 - \frac{k}{2} (y^2 - y_0^2)} \left[ 1 + k \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right],$$

woraus durch Integration

$$\ln \left[ 1 + k \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] = -2 \ln \left( H_0 - \frac{k}{2} (y^2 - y_0^2) \right) + \text{Const} \quad (6)$$

folgt. Da für  $x = 0$ ;  $y = y_0$  und  $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$  ist, so folgt die Constante aus  $0 = -2 \ln H_0 + C$ , und Gleichung (6) geht damit über in

$$\ln \left[ 1 + k \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] = 2 \ln \frac{H_0}{H_0 - \frac{k}{2} (y^2 - y_0^2)} = 2 \ln \frac{H_0}{H} \dots (7)$$

Diese Gleichung schreibt sich auch:

$$1 + k \tan^2 \alpha = \left( \frac{H_0}{H_0 - \frac{k}{2} (y^2 - y_0^2)} \right)^2,$$

oder

$$H_0 - \frac{k}{2} (y^2 - y_0^2) = H = \frac{H_0}{\sqrt{1 + k \tan^2 \alpha}} \dots (8)$$

woraus weiter

$$y = \sqrt{y_0^2 + \frac{2H_0}{k} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k \tan^2 \alpha}} \right)} \dots (9)$$

sich ergibt, welche Gleichung die Ordinate  $y$  für irgend welchen Neigungswinkel  $\alpha$  der Stütze bestimmt.

Um auch die Krümmungsverhältnisse der Stütze zu ermitteln, hat man wieder den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{(1 + \tan^2 \alpha)^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} = \frac{1}{\cos^3 \alpha \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \dots (10)$$

zu benutzen, welche Gleichung mit Rücksicht auf (5) und (8) übergeht in:

$$\varrho = \frac{H}{\cos^3 \alpha y (1 + k \tan^2 \alpha)} = \frac{H_0}{y \cos^3 \alpha (1 + k \tan^2 \alpha)^{3/2}} \dots (11)$$

Setzt man ferner wieder den Modul des Gewölbes  $\frac{r}{y_0} = a$ , und den Schub im Scheitel  $H_0 = r y_0 = a y_0^2$ , so erhält man hiermit aus (9) und (11) die Gleichungen:

$$y = y_0 \sqrt{1 + \frac{2a}{k} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k \tan^2 \alpha}} \right)} \dots (12)$$

und

$$\varrho = \frac{a y_0}{\cos^3 \alpha \sqrt{(1 + k \tan^2 \alpha)^3 \left[ 1 + \frac{2a}{k} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k \tan^2 \alpha}} \right) \right]}} \quad (13)$$

Kennt man den von der Beschaffenheit der Erdmasse abhängigen Coefficienten  $k$ , so lassen sich mit Hilfe dieser letzteren Formel die Krümmungshalbmesser der Stütze für beliebig viele Punkte berechnen, sobald man noch über den Modul  $a = \frac{r}{y_0}$  eine Annahme macht. Dieser Modul wird bei den hier in Betracht kommenden Tunnelgewölben wegen der meist hohen Scheitelbelastung  $y_0$  immer nur einen kleinen Werth haben. Nach dem in §. 8 über den Erddruck Gesagten kann man

$$k = \tan^2 \frac{90^\circ - \varrho}{2}$$

annehmen, und erhält für mittlere Erde, deren Reibungswinkel  $\varrho = 36^\circ 40'$  ist

$$k = \tan^2 \frac{90^\circ - 36^\circ 40'}{2} = \tan^2 26^\circ 40' = 1/4.$$

Für diesen Werth von  $k$  hat Schwedler folgende Tabelle der Krümmungshalbmesser für die Werthe des Moduls  $a = 3, 1, 0,5$  und  $0,1$  berechnet, in welcher wiederum die Ordinate  $y_0$  der Scheitelbelastung als Einheit angenommen ist.

Tabelle  
der Krümmungshalbmesser  $\rho$  für Stützlinien  
mit Erddruck.

$$\rho = \frac{a y_0}{\cos^3 \alpha \sqrt{(1 + k \tan^2 \alpha)^3 \left[ 1 + \frac{2a}{k} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + k \tan^2 \alpha}} \right) \right]}} ,$$

$$y_0 = 1, k = 1/4.$$

$\alpha =$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	90°
$a = 3$	2,99	2,90	2,94	3,04	3,4	4	4,8
$a = 1$	1,02	1,07	1,19	1,34	1,62	2	2,7
$a = 0,5$	0,51	0,55	0,64	0,75	0,95	1,25	1,8
$a = 0,1$	0,103	0,113	0,134	0,168	0,225	0,317	0,6

Den Werthen dieser Tabelle entsprechend ist in Fig. 79 die Stützlinie für den Modul  $a = 0,5$  in der Weise gezeichnet, wie früher gelegentlich der Fig. 76 angegeben wurde. Zur einfacheren Construction einer angenäherten Form schlägt Schwedler vor, eine aus mehreren Kreisbögen zusammengesetzte Korblinie zu wählen, und zwar soll man für die vorliegende, dem Modul  $a = 0,5$  entsprechende Stützlinie, dem Scheitelradius  $r_1$  eine Größe gleich  $0,5 y_0$  geben, die Halbmesser  $r_1 = o_1 A_1$ ,  $r_2 = o_2 A_2$  und  $r_3 = o_3 A_3$  in dem Verhältnisse wie  $1 : 1,5 : 2,5$  annehmen, und jedem der drei Bögen  $A A_1$ ,  $A_1 A_2$ ,  $A_2 A_3$  einen Centriwinkel von  $30^\circ$  geben. Unter dieser Voraussetzung würde die Spannweite  $A_3 A_3$ , die sich allgemein durch

$$l = 2 [r_1 \sin \alpha' + r_2 (\sin \alpha'' - \sin \alpha') + r_3 (\sin \alpha''' - \sin \alpha'')]$$

ausdrückt, zu

$$l = 2,77 r_1$$

sich ergeben, oder man hätte

$$r_1 = 0,361 l,$$

folglich

$$r_2 = 1,5 r_1 = 0,542 l$$

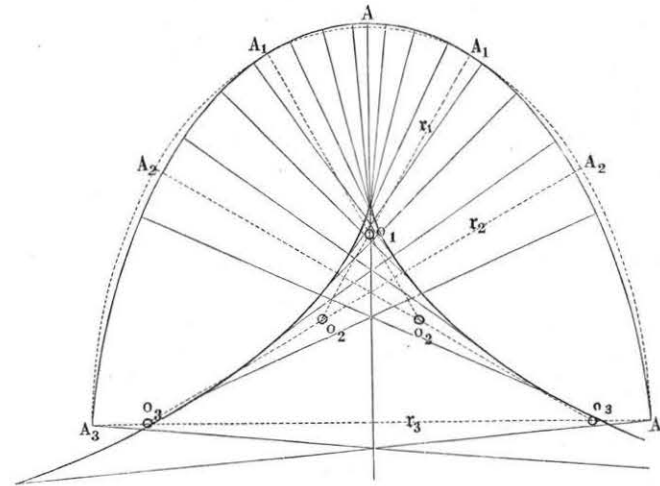
und

$$r_3 = 2,5 r_1 = 0,903 l.$$

Die Halbmesser und die angenäherte Korblinie sind in der Figur durch punktierte Linien angegeben.

Für einen größeren Modul, wie etwa für  $a = 1$  bis zu  $a = 3$ , genügen danach zwei Kreisbogen für jede Gewölbhälfte, von denen jeder einem

Fig. 79.



Centriwinkel von  $45^\circ$  entspricht (s. die Abhandlung von Schwedler an vorgedachter Stelle).

Bei der vorstehenden Untersuchung ist, wie bereits bemerkt worden, das Eigengewicht des Gewölbes nicht berücksichtigt worden. Ebenso ist dabei angenommen, daß die horizontale Componente  $E$  des Erddruckes auf ein beliebiges Element der Wölbfläche proportional mit dessen Verticalprojection und unabhängig von der Neigung dieses Elementes gegen den Horizont ist. Letztere Annahme wird nun mit dem im Cap. I über den Erddruck Gesagten sich nicht vereinbaren lassen, da hiernach sowohl die Richtung wie die Größe des Erddruckes gegen eine Fläche mit deren Neigung veränderlich ist. Die Durchführung einer Rechnung, welche diese Abhängigkeit des Erddruckes auf die verschiedenen Gewölbtheile von deren Neigung berücksichtigt, würde kaum möglich sein, wogegen eine graphische Behandlung des vorliegenden Falles keinerlei Schwierigkeiten darbietet. Es soll daher im Folgenden auf graphischem Wege die Aufgabe gelöst werden, für ein Tunnelgewölbe die Stützlinie oder diejenige Form des Gewölbes zu ermitteln, bei welcher die Mittellinie zu einer Stützlinie wird, und soll dabei nicht nur die erwähnte Abhängigkeit des Erddruckes von der Neigung der Gewölbflächentheile, sondern auch das Eigengewicht des Gewölbes berücksichtigt werden.

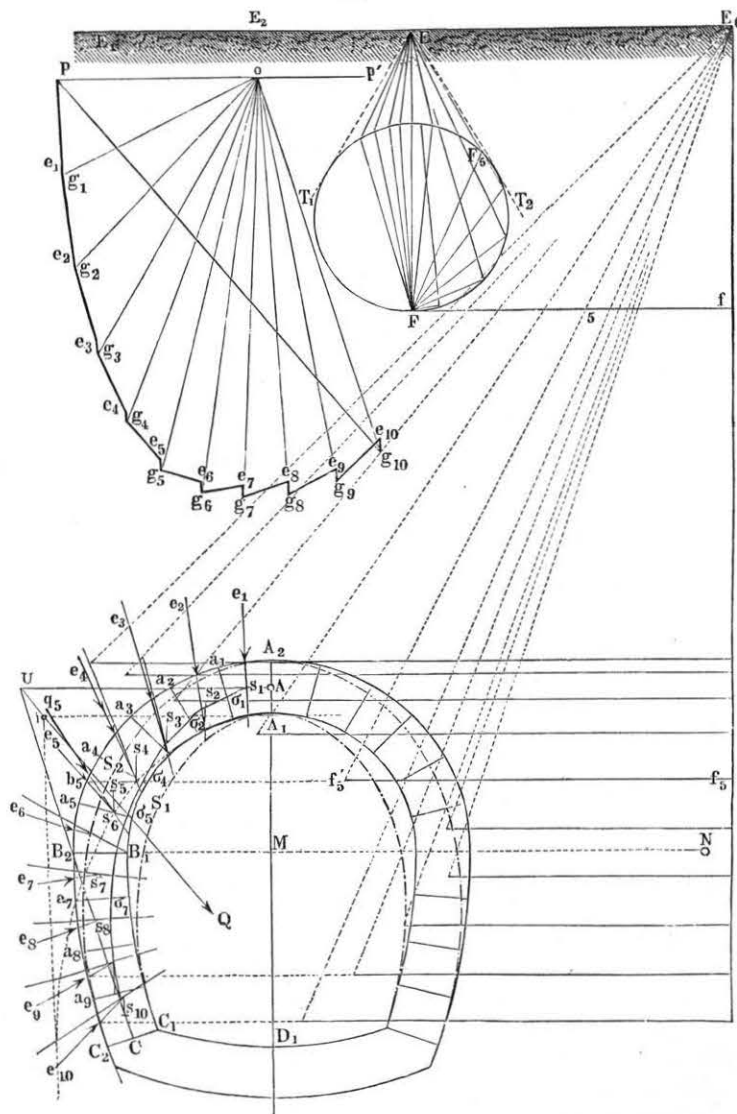


Um zu dieser vortheilhaftesten Gewölbform zu gelangen, könnte man nun zwar von irgend einer ganz beliebigen Gewölbform ausgehen, welche durch die aus der Stützlinie sich ergebende Correction in die geforderte günstigste Form übergeführt würde, doch wird es sich empfehlen, zum Ausgangspunkte der Construction eine Gewölbform zu wählen, welche erfahrungsmäßig der betreffenden noch zu suchenden Stützlinie schon nahe kommt, wodurch man eine öftere Wiederholung der Correctionen wird vermeiden können.

Demgemäß sei denn, entsprechend den in der Praxis meist gebräuchlichen Tunnelprofilen von annähernd elliptischer Form, zunächst ein Tunnelgewölbe von dem Profile  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , Fig. 80, vorausgesetzt, welches oberhalb durch einen Halbkreis zum Mittelpunkte  $M$  und Radius  $MA_1$ , zu jeder Seite durch einen flachen Kreisbogen  $B_1 C_1$  zum Mittelpunkte  $N$  und unterhalb ebenfalls durch einen flachen Kreisbogen  $C_1 D_1$  begrenzt sein soll. Die Gewölbstärke sei überall gleich  $d = A_1 A_2 = B_1 B_2 = C_1 C_2$  angenommen und vorausgesetzt, daß die horizontale Oberfläche  $E_1 E_2$  der Erde eine Höhe  $E_2 A_2 = h = 9$  m über dem Scheitel  $A_2$  des Tunnels habe. Das specifische Gewicht der Erde sei zu  $\gamma = 1600$  kg, der natürliche Böschungswinkel zu  $\varphi = 30^\circ$  angenommen, und vorausgesetzt, daß auf eine Cohäsion derselben nicht zu rechnen sei, wie dies bei Dammschüttungen der Wirklichkeit entsprechen wird. Wenn dagegen die Erde, wie bei Tunnelausführungen anzunehmen ist, eine gewisse Cohäsion besitzt, so gewährt die Vernachlässigung derselben eine gewisse Sicherheit, indem die Druckkräfte der Erde dann in Wirklichkeit geringer sein werden, als unter der Voraussetzung einer cohäsionslosen Masse gefunden wird. Das specifische Gewicht der Mauermaße sei zu  $\gamma_1 = 2000$  kg  $= \frac{5}{4} \gamma$  vorausgesetzt, und es mögen sämtliche Kräfte als die Gewichte von Erdprismen angesehen werden, deren Basis 1 m breit und 5 m lang ist, so daß in bekannter Art die Höhen dieser Prismen die einzelnen Kräfte darstellen, und daß also jede Strecke, welche nach dem Längensmaßstabe der Figur ( $\frac{1}{100}$ ) 1 m bedeutet, im Kräfteplane einer Kraft von  $5 \cdot 1600$  kg  $= 8$  Tonnen entspricht. Es ergibt sich daher, daß die Volumina der Gewölbtheile durch eine Vergrößerung im Verhältnisse von  $\gamma : \gamma_1 = 4 : 5$  auf Erdmassen reducirt werden müssen.

Um nun die einzelnen Kräfte zu ermitteln, sei das halbe Gewölbe  $ABC$  (mit Ausnahme der Sohle), in eine beliebige Anzahl von Theilen durch die radialen Fugen durch  $a_1, a_2, a_3 \dots$  getheilt. In der Figur ist der obere Theil  $AB$  in sechs unter sich gleiche Theile und der Seitentheil  $BC$  in vier ebenfalls gleiche Theile zerlegt. Es ist nun leicht, die Gewichte  $g_1, g_2, g_3 \dots g_{10}$  dieser Theile in der angegebenen Weise durch Strecken darzustellen, welche den Höhen der Erdprismen gleich sind, die bei gleichem Gewichte mit den Gewölbtheilen die gemeinsame Basis von 5 qm zur Grundfläche haben. Die Ausführung der zu dieser Reduction dienenden Verwandlung

ist, als hinreichend bekannt, in der Figur nicht näher angegeben. Die Gewichte  $g_1 \dots g_{10}$ , von denen nach dem Vorstehenden  $g_1$  bis  $g_6$  und  $g_7$  bis Fig. 80.



$g_{10}$  unter sich gleiche Größe haben, wirken in den Schwerpunkten  $s_1, s_2 \dots s_{10}$  der einzelnen Gewölbflectoren, welche in bekannter Weise leicht zu bestimmen sind, wenn man die Profile der einzelnen Gewölbtheile als Trapeze ansieht.

Um nun die Größe und Richtung des Erddruckes für jeden der einzelnen Gewölbtheile zu ermitteln, kann man sich am besten der aus der Mohr'schen Theorie des Erddruckes (s. §. 4) gefolgerten Regeln bedienen. Zu dem Ende sei eine Verticallinie  $EF$  durch irgend einen Punkt  $E$  der Erdoberfläche gezogen und darauf eine beliebige Strecke  $EF$  (in der Figur 4 m), abgetragen. Werden dann ferner an  $EF$  unter dem Reibungswinkel  $\varphi = 30^\circ$  die beiden Geraden  $ET_1$  und  $ET_2$  gelegt, so erhält man bekanntlich in dem diese Geraden berührenden und durch  $F$  gehenden Kreise  $K$  ein Mittel zur Bestimmung des specifischen Erddruckes für irgend ein Flächenelement in  $F$ , d. h. in einer Tiefe  $EF$  unter der Oberfläche. Darnach ergibt sich nun leicht folgende Construction:

Um für irgend einen Gewölbtheil, z. B. den zwischen  $a_4$  und  $a_5$  gelegenen, den Erddruck zu bestimmen, kann man die Fläche  $a_4 a_5$  genügend genau als eine Ebene betrachten. Zieht man daher durch  $F$  eine Parallele  $FF_5$  mit  $a_4 a_5$ , so erhält man nach §. 4 in der Strecke  $EF_5$  das Maß für die specifische Spannung eines in der Tiefe  $EF$  unter der Erdoberfläche gelegenen Flächenelementes, das mit  $a_4 a_5$  parallel ist. Da nun der specifische Druck proportional mit der Tiefe wächst, so hat man, um die Pressung für  $a_4 a_5$  zu erhalten, auf der Horizontalen durch  $F$  nur die Strecke  $EF_5$  gleich  $f_5$  anzutragen, durch die Mitte  $b_5$  zwischen  $a_4$  und  $a_5$  eine Horizontale  $b_5 f_5$  zu ziehen, auf welcher die durch  $E_0$  und 5 gezogene Gerade das Stück  $f_5 f_5'$  abschneidet, welches die mittlere specifische Pressung des Erddruckes auf das Element  $a_4 a_5$  darstellt. Daher ist der Erddruck auf diese Fläche  $a_4 a_5$  gegeben durch das Gewicht eines Erdprismas von der Höhe  $f_5 f_5'$  und einer Basis, deren Breite gleich  $a_4 a_5$ , und deren Länge senkrecht zur Figur 1 m ist. Die Reduction dieses Prismas auf die gemeinsame Basis 5 qm liefert die Strecke für den gesuchten Erddruck. Die Richtung dieses Druckes ist ebenfalls durch den Kreis  $K$  festgestellt, denn nach §. 4 giebt  $FEF_5$  den Winkel  $\delta$  an, unter welchem der Erddruck gegen die Normale zur Fläche  $a_4 a_5$  geneigt ist, so daß der Erddruck in der Richtung  $e_5 b_5$  angetragen werden kann.

In derselben Weise ist nun für jeden Gewölbtheil der Erddruck bestimmt und seine Richtung in den Mitten der gedrückten Flächen angetragen ( $e_1, e_2, e_3 \dots e_{10}$ ). Um alsdann den Erddruck  $e$  jedes Elementes mit dem Gewichte  $g$  desselben zu vereinigen, ist nun das Kräftepolygon  $p e_1 g_1 e_2 g_2 \dots e_{10} g_{10}$  gezeichnet, indem die einzelnen Kräfte  $e$  und  $g$  ihrer Aufeinanderfolge gemäß von einem beliebigen Punkte  $p$  aus aneinander gefügt sind. Man ersieht

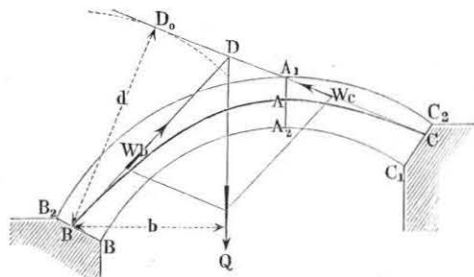
hieraus zunächst, daß die Eigengewichte  $g$  der einzelnen Gewölbssegmente gegen den Erddruck derselben nur sehr gering sind. Um nun die Mittelkraft aus  $e$  und  $g$  für irgend ein Element, z. B.  $a_4 a_5$  zu finden, hat man nur im Kräftepolygon die Punkte  $g_4$  und  $g_5$  zu verbinden, so erhält man in der Strecke  $g_4 g_5$  der Richtung und Größe nach die Mittelkraft  $g_5$  aus dem Eigengewichte  $g_5$  und dem Erddrucke  $e_5$  des Elementes  $a_4 a_5$ , und zwar hat man sich den Durchschnittspunkt dieser beiden Kräfte als den Angriffspunkt der Mittelkraft  $g_5$  zu denken. Ist diese Construction von  $g_1, g_2, g_3 \dots$  für sämtliche Theile des Gewölbes durchgeführt, so ist es leicht, die resultirende Kraft  $Q$  aller dieser Kräfte  $g_1 g_2 \dots g_{10}$  zu bestimmen. Die Größe und Richtung derselben ist schon aus dem Kräfteplane durch die Strecke  $p g_{10}$  gegeben, und um auch die Lage von  $Q$  festzustellen, kann in bekannter Weise ein Seilpolygon dienen, welches man mit Hilfe eines willkürlich angenommenen Poles  $p'$  zeichnet. Dieses Seilpolygon ist in der Figur punktiert angedeutet, und der Durchschnittspunkt  $i$  des ersten Seiles mit dem letzten ist bekanntlich ein Punkt der Resultirenden  $Q$ , welche letztere also in der durch  $i$  zu  $p g_{10}$  gezogenen Parallele gefunden ist. Um nunmehr die Stützlinie zu zeichnen, welche durch die Mitte  $A$  der Scheitelfuge und die Mitte  $C$  der untersten Fuge  $C_1 C_2$  geht, hat man wieder durch  $A$  eine Horizontale bis zum Durchschnitte  $U$  mit der Resultirenden zu ziehen, um in der Geraden  $CU$  die Richtung und Lage der Widerstandskraft in  $C$  zu finden. Zieht man daher mit  $CU$  eine Parallele durch  $g_{10}$  im Kräftepolygone, so schneidet dieselbe auf der Horizontalen durch  $p$  die Strecke  $p o$  ab, welche den Horizontalschub  $H$  im Scheitel darstellt. Die Zeichnung des Seilpolygons für den gefundenen Horizontalschub  $H$  oder Pol  $o$  macht nun keine Schwierigkeiten, und wenn man die Schnittpunkte  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots$ , in welchen die Fugen von den entsprechenden Seiten des Seilpolygons getroffen werden, mit einander durch eine stetige Curve  $A \sigma_1 \sigma_2 \dots C$  verbindet, so stellt diese die gesuchte Stützlinie des Gewölbes vor.

Wie aus der Figur zu ersehen ist, fällt diese Stützlinie zwar überall in die Gewölbstärke hinein, doch hat sie mit der Mittellinie des Gewölbes außer den Punkten  $A$  im Scheitel und  $C$  im Rämpfer keinen Punkt gemein. Am meisten nähert sich die Stützlinie der inneren Leibung zwischen den Punkten  $\sigma_4$  und  $\sigma_5$ . Wenn nun die Aufgabe gestellt ist, die Gewölbform so zu entwerfen, daß die Mittellinie eine Stützlinie wird, so hat man nur nöthig, zu beiden Seiten dieser Stützlinie  $A \sigma_1 \sigma_2 \dots C$  zwei parallele Curven  $A_1 S_1 C_1$  und  $A_2 S_2 C_2$  zu ziehen, von welchen jede von der Stützlinie  $A \sigma C$  um die halbe Gewölbbreite entfernt ist, und dann sind diese beiden Curven als die Profile für die innere und äußere Leibung anzusehen. Allerdings wird durch die so vorgenommene Veränderung der Gewölbform auch eine Aenderung in der Druckvertheilung herbeigeführt werden, so daß die nunmehr dem Ge-

wölbe zugehörige Stützlinie nicht mehr genau mit  $A_1 C_2 \dots C$  zusammenfällt. Zeichnet man daher in der vorgedachten Weise durch Wiederholung des angegebenen Verfahrens die neue Stützlinie, und betrachtet diese letztere als Mittellinie, so wird nummehr die damit verbundene Abänderung so gering ausfallen, daß man die gefundene Form als die der Aufgabe entsprechende ansehen darf.

§. 25. **Unsymmetrische Gewölbe.** Bisher wurde immer eine gegen den Scheitel des Gewölbes symmetrische Form und Belastung desselben vorausgesetzt, in Folge dessen es genügte, eine Hälfte des Gewölbes zu betrachten, indem unter dieser Voraussetzung die Stützkraft  $H$  im Scheitel sowie die Tangente der Stützlinie daselbst die horizontale Richtung haben, und auch die Stützlinie zu beiden Seiten symmetrisch ausfallen muß. Wenn dagegen hinsichtlich der Form, oder der Belastungsart oder in Bezug auf beide Elemente zu beiden Seiten des Scheitels eine Verschiedenheit vorhanden ist, so wird auch die Stützlinie

Fig. 81.



nicht mehr symmetrisch sein. Es wird in dem Scheitel, d. h. an der höchsten Stelle  $A_1 A_2$ , Fig. 81, des Gewölbes im Allgemeinen weder die Stützlinie noch die Stützkraft horizontal sein, vielmehr wird dies an einer anderen Stelle stattfinden, deren Lage von der Form und Lastvertheilung des Gewölbes abhängt. Es ist daher nöthig, diesen allgemeinen Fall noch einer besonderen Behandlung zu unterziehen, welche mit Rücksicht auf das Vorhergegangene besondere Schwierigkeiten nicht darbietet.

Während es nach dem Vorhergehenden (s. §. 18) für ein symmetrisches Gewölbe, dessen Lastvertheilung gegeben ist, zur Construction der Stützlinie genügt, irgend zwei verschieden hoch gelegene Punkte derselben zu kennen, reicht diese Bedingung für ein unsymmetrisches Gewölbe nicht mehr aus, wie sich leicht übersehen läßt. Denn nimmt man z. B. für das Gewölbe  $BAC$ , Fig. 81, dessen resultirende Gesamtbelastung  $Q$  in die Richtung  $DQ$  fallen möge, irgend zwei Punkte  $B$  und  $C$  an, durch welche die Stützlinie hindurchgehen soll, so läßt sich das Gleichgewicht zwischen der Belastung  $Q$  und zwei von  $B$  und  $C$  geäußerten Stützreaktionen  $W_b$  und  $W_c$  in unendlich verschiedener Art herstellen. Man kann nämlich irgend welchen Punkt  $D$  in

der Richtung von  $Q$  mit  $B$  und  $C$  verbinden, und erhält durch die Zerlegung von  $Q$  nach den beiden Richtungen  $DB$  und  $DC$  die gesuchten Stützreaktionen  $W_b$  und  $W_c$ . Zur Beseitigung dieser Unbestimmtheit ist daher noch die Kenntniß eines dritten Elementes erforderlich, sei dies die Richtung oder die Größe einer der Stützreaktionen, oder sei es ein dritter Punkt, durch welchen die Stützlinie ebenfalls hindurchgeht.

Ist z. B. außer  $B$  und  $C$  die Richtung der Reaction  $W_b$  gegeben, so ist damit auch der Schnittpunkt  $D$  unzweifelhaft festgestellt. Ebenso ist dies der Fall, wenn eine der Stützkraften, z. B.  $W_c$  in  $C$  nur ihrer Größe nach, nicht aber ihrer Richtung nach bekannt ist, denn in diesem Falle erfordert das Gleichgewicht in Bezug auf den anderen Stützpunkt  $B$ , daß die Gleichung erfüllt sei:

$$Qb = W_c d,$$

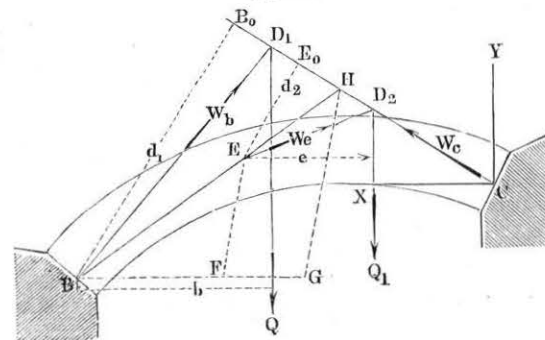
wenn  $b$  und  $d$  die betreffenden Hebelarme bedeuten. Zeichnet man daher mit dem aus obiger Gleichung zu berechnenden Hebelarme

$$d = \frac{Qb}{W_c}$$

als Radius einen Kreis um  $B$ , so giebt die von  $C$  an diesen Kreis gezogene Tangente  $CD_0$  die Richtung von  $W_c$  und in  $D$  den Schnittpunkt mit  $Q$ , durch welchen auch die andere Reaction  $W_b$  hindurchgeht.

Wenn von der Stützlinie drei beliebige Punkte  $B$ ,  $C$  und  $E$ , Fig. 82 gegeben sind, so läßt sich die Stützlinie ebenfalls leicht folgendermaßen be-

Fig. 82.



stimmen. Ist wieder mit  $W_c$  die der Richtung und Größe nach unbekannte Reaction in  $C$  bezeichnet, deren verticale und horizontale Componenten bzw.  $V_c$  und  $H_c$  sein mögen, und denkt man  $C$  als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems mit horizontaler  $X$  Achse, in welchem



$x_e, y_e, x_b$  und  $y_b$  die Coordinaten von  $E$  und  $B$  sind, so hat man wieder, unter  $Q$  und  $Q_1$  die Gewichte von  $CB$  und  $CE$  und unter  $b$  und  $e$  deren Hebelarme für  $B$  und  $E$  verstanden, die Gleichungen

$$Qb = H_e y_b + V_e x_b \text{ für } B$$

und

$$Q_1 e = H_e y_e + V_e x_e \text{ für } E.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind in jedem Falle die Componenten  $V_e$  und  $H_e$  der Stützreaction in  $C$  zu bestimmen, wodurch diese selbst ihrer Größe und Richtung nach festgestellt ist.

Man kann diese Reaction  $W_e$  aber auch graphisch leicht finden. Bezeichnet man nämlich mit  $d_1$  und  $d_2$  die Abstände der vorläufig noch unbekannten Richtung  $W_e$  von  $B$  und  $E$ , so hat man:

$$W_e d_1 = Qb \text{ für } B$$

und

$$W_e d_2 = Q_1 e \text{ für } E,$$

daher

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{Qb}{Q_1 e}.$$

Nun ist aber nach der Figur, wenn man  $BE$  zieht, auch

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{BH}{EH} = \frac{Qb}{Q_1 e},$$

woraus die Construction unmittelbar folgt: Man trage auf einer beliebig durch  $B$  gezogenen Geraden  $BG$  in einem ebenfalls beliebigen Maßstabe die Strecken  $BG$  und  $FG$  proportional den Momenten  $Qb$  und  $Q_1 e$  auf so daß

$$\frac{BG}{FG} = \frac{Qb}{Q_1 e}$$

ist, ziehe  $FE$  und durch  $G$  eine Parallele damit bis zum Durchschnitte  $H$  mit  $BE$ , so erhält man in  $CH$  die Richtung der Stützkraft  $W_e$  in  $C$ , denn aus der Construction ergibt sich

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{BB_0}{EE_0} = \frac{BH}{EH} = \frac{BG}{FG} = \frac{Qb}{Q_1 e}.$$

Man erhält dann in  $D_1$  den Punkt, durch welchen die Stützkraft  $W_b$  in  $B$  und in  $D_2$  denjenigen, durch welchen die Stützkraft  $W_e$  in  $E$  hindurchgehen muß u. s. w. Ueberhaupt kann nunmehr die Construction der Stützkraftlinie in ihrem ganzen Verlaufe mit Hülfe des zugehörigen Kräftepolygons in der mehrfach besprochenen Weise vorgenommen werden.

Die für symmetrische Gewölbe gefundene Eigenschaft, wonach die Horizontalkraft für alle Punkte der Stützkraftlinie denselben Betrag  $H$  hat, gilt all-

gemein auch für ein unsymmetrisch geformtes Gewölbe, welches durch verticale Kräfte in ganz beliebiger Weise belastet ist, und ebenso hat man für die verticalen Componenten  $V_b$  und  $V_e$  der Stützkraften  $W_b$  und  $W_e$  zweier beliebigen Punkte  $B$  und  $C$  der Stützkraftlinie die Beziehung

$$V_b + V_e = Q,$$

wenn  $Q$  die gesammte zwischen  $B$  und  $C$  auf das Gewölbe wirkende Belastung bedeutet. Bezeichnet allgemein  $V$  die verticale Componente in irgend einem Punkte der Stützkraftlinie, so gilt für den Neigungswinkel  $\alpha$  der Stützkraft gegen den Horizont in diesem Punkte ebenfalls die Gleichung

$$\tan \alpha = \frac{V}{H}.$$

Dieser Winkel  $\alpha$  wird demgemäß gleich Null sein für denjenigen Punkt, für welchen  $V = 0$  ist. In diesem Punkte wird aber nicht bloß die Richtung der Stützkraft, sondern auch die Tangente an die Stützkraftlinie horizontal sein, wie aus den früheren Betrachtungen sich folgern läßt. Dieser Punkt, in welchem  $V = 0$  ist, stellt daher den höchsten oder Scheitelpunkt der Stützkraftlinie dar, von welchem aus nach beiden Seiten den beiderseitigen Gewölbschenkeln entsprechend zwei verschiedene Zweige der Stützkraftlinie ausgehen, welche beide in dem besagten Scheitel horizontal und ohne Knick in einander übergehen. Dieser höchste Punkt oder Scheitel der Stützkraftlinie, welcher übrigens im Allgemeinen mit dem höchsten Punkte oder Scheitel des Gewölbes nicht in dieselbe Verticallinie fällt, kann nun als der Vereinigungspunkt angesehen werden, in welchem die Stützkraftlinien der beiderseitigen Gewölbschäfte zusammentreffen. Betrachtet man diese Gewölbschäfte als die Hälften zweier symmetrischen Gewölbe, so ist offenbar die Untersuchung des unsymmetrischen Gewölbes auf diejenige des symmetrischen zurückgeführt, und die sämtlichen im Vorstehenden gemachten Bemerkungen sind gültig.

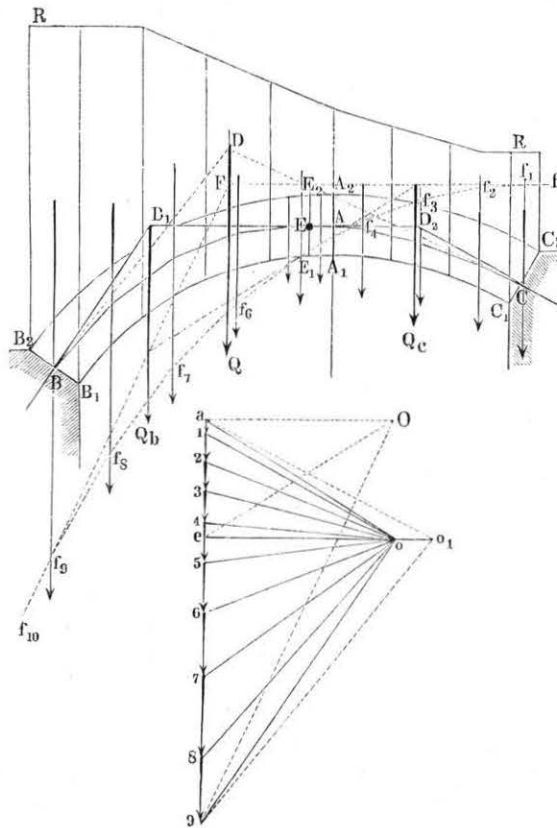
Es handelt sich daher im Wesentlichen nur darum, in jedem besonderen Falle den besagten Scheitel der Stützkraftlinie, d. h. den Punkt, für welchen  $V = 0$  ist, zu bestimmen. Dieser Punkt wird in jedem Falle in demjenigen Verticalschnitte gelegen sein, welcher das gesammte Gewicht des Gewölbes  $Q$  so in zwei Theile  $Q_b$  und  $Q_e$  theilt, daß diese Theile gerade gleich den Verticalcomponenten  $V_b$  und  $V_e$  der Kämpferreactionen sind, denn aus der allgemeinen Gleichung  $V_b + V = Q_b$  ergibt sich mit  $V_b = Q_b$  offenbar  $V = 0$ , d. h. die Bedingung für den Scheitel. Eine Ermittlung dieses Querschnittes wird in jedem besonderen Falle durch Rechnung oder Construction geschehen können, dagegen wird die Aufstellung allgemeiner Formeln nicht möglich sein, wenn Form und Belastungsart des Gewölbes ganz willkürlich angenommen werden. Am einfachsten wird man



die Bestimmung des Gewölbscheitels und der beiden Stützlinsenweige durch Construction bewirken, und zwar kann dies etwa folgenderart geschehen.

Es sei  $BAC$ , Fig. 83, der Querschnitt irgend eines Gewölbes, dessen Kämpferfugen durch  $B_1 B_2$  und  $C_1 C_2$  dargestellt sind, und dessen Scheitel

Fig. 83.



in der Verticalebene durch  $A$  gelegen ist. Die ganz beliebig vertheilte Belastung sei auf das spezifische Gewicht des Gewölbmaterials reducirt und die Belastungslinie durch  $RR$  dargestellt. Es mögen zunächst die beliebigen Punkte  $B$  und  $C$  in den Kämpferfugen als Punkte der Stützlinsen vorausgesetzt und es soll der noch zu findende Scheitel der Stützlinsen in der Mitte der Gewölbstärke liegend angenommen werden. Zunächst sucht man die Schwerlinie  $DQ$  des ganzen Gewölbes nebst Belastung, was am einfachsten mit

Hülfe des Kräfteplans  $a12 \dots 9$  geschieht, welcher in den einzelnen Strecken  $a1, 12, 23 \dots 89$  die Gewichte der einzelnen Streifen darstellt, in welche das Gewölbe durch eine Anzahl verticaler Ebenen zerlegt wird. Nimmt man ganz beliebig irgendwo einen Pol  $O$  an, und construirt mit Hülfe desselben das in der Figur punktirte Seilpolygon  $ff_1 f_2 \dots$ , so erhält man bekanntlich in dem Schnittpunkte  $F$  der Endseile einen Punkt, durch welchen die Schwerlinie des ganzen Gewölbes hindurchgeht, dessen Gewicht nach dem gewählten Kräftemaßstabe durch die Strecke  $a9$  dargestellt ist. Zieht man nun durch irgend einen Punkt  $D$  dieser Schwerlinie Strahlen nach  $B$  und  $C$ , und damit im Kräfteplane durch  $a$  und  $9$  Parallelen, welche sich in  $o_1$  treffen, so erhält man in  $ao_1$  und  $o_1 9$  die Stützkräfte  $W_c$  und  $W_b$  gegen die Kämpfer in  $C$  und  $B$ , daher ist, wenn noch  $o_1 e$  horizontal gezogen wird,

$$ae = V_c \text{ und } e9 = V_b.$$

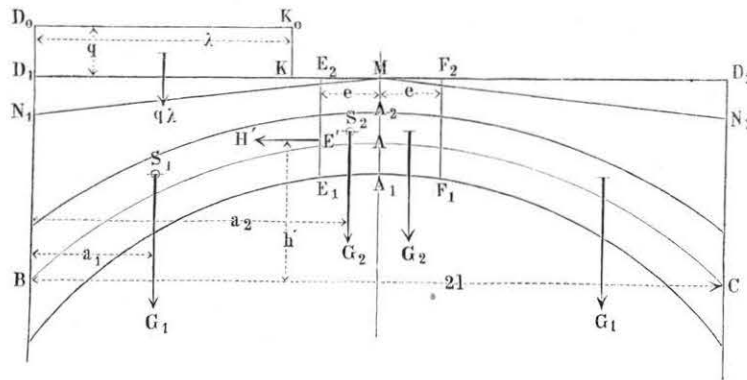
Der Punkt  $e$  im Kräftepolygone entspricht dem Verticallschnitte  $E_1 E_2$  im Gewölbe, und folglich muß in dieser Verticalebene der gesuchte Scheitel der Stützlinsen liegen. Wählt man der Bedingung gemäß die Mitte  $E$  zwischen  $E_1$  und  $E_2$  als diesen Punkt der Stützlinsen, so ist die letztere nunmehr leicht nach bekannten Regeln zu zeichnen. Sucht man nämlich mit Hülfe des Seilpolygons  $ff_1 f_2 \dots$  die Schwerlinien  $D_1 Q_b$  und  $D_2 Q_c$  der beiden Gewölbsheile  $EB$  und  $EC$ , so hat man nur durch  $E$  eine Horizontale bis zu diesen Verticalen zu ziehen, um in  $D_1$  und  $D_2$  Punkte zu erhalten, durch welche die Stützkräfte der Kämpfer in  $B$  und  $C$  hindurchgehen. Zieht man daher durch  $a$  eine Parallele mit  $D_2 C$  und durch  $9$  eine Parallele zu  $D_1 B$ , so erhält man in dem Durchschnitte  $o$  dieser Linien, welcher übrigens auf der Horizontalen  $o_1 e$  liegen muß, den Pol, mit dessen Strahlen  $oa, o1, o2 \dots oe$  der rechte Zweig  $EC$  der Stützlinsen gezeichnet wird, während die Strahlen  $oe, o5, o6 \dots o9$  für den linksseitigen Zweig  $EB$  dienen. Die Strecke  $oe$  giebt die Größe des Horizontalschubes  $H$ , welcher, wie schon bemerkt worden, für das ganze Gewölbe constant ist, und die Zeichnung giebt über alle Verhältnisse genügend Aufschluß, wie z. B. über die Richtung der Stützkräfte durch die Neigung der Polstrahlen u. s. w.

Für jeden der beiden Zweige der Stützlinsen gelten nunmehr die in den vorhergehenden Paragraphen für symmetrische Gewölbe angeführten Bemerkungen, und man kann beispielsweise die Form des Gewölbes derart verändern, daß die gefundene Stützlinsen eine Mittellinsen des Gewölbes wird. Mit dieser Veränderung ist dann zwar auch eine geringe Abänderung der Lastvertheilung verbunden, doch wird die Abweichung der nunmehrigen Stützlinsen in den meisten Fällen so unbedeutend sein, daß eine Wiederholung derselben Construction für die neue Gewölbsform nur ausnahmsweise nöthig werden wird.

§. 26. **Bewegliche Belastung.** In derselben Weise, wie vorstehend die Stabilitätsverhältnisse eines unsymmetrischen und beliebig belasteten Gewölbes geprüft worden sind, läßt sich die Untersuchung auch für ein symmetrisches Gewölbe führen, dessen beide Hälften in ungleicher Weise belastet werden. Dieser Fall gewährt deswegen ein besonderes Interesse, weil er bei allen Brückengewölben vorkommt, sobald eine bewegliche Last, z. B. ein Eisenbahnzug oder ein Frachtwagen über die Brücke fährt. Von dem Augenblicke an, in welchem diese bewegliche Last einen Kämpfer des Gewölbes überschreitet, wird die vorher im Gewölbe vorhandene symmetrische Stützlinie sich fortwährend verändern, indem der Scheitel der Stützlinie sich gleichzeitig mit der Last verschiebt, und es handelt sich daher noch darum, zu untersuchen, ob durch diese Verschiebung die Stabilität des Gewölbes nicht in bedenklicher Weise gefährdet wird. In dieser Beziehung kann man folgende Bemerkungen machen.

Es sei  $BAC$ , Fig. 84, ein zu  $MA$  symmetrisches Brückengewölbe, dessen Eigengewicht incl. der Fahrbahn, auf das Gewölbmaterial reducirt, durch

Fig. 84.



die Belastungslinie  $N_1MN_2$  dargestellt sein soll, während  $D_1MD_2$  die horizontale Fahrbahn sein möge. Für den unbelasteten Zustand wird die Stützlinie in der Mitte  $MA_1$  eine horizontale Tangente haben, und es möge etwa angenommen werden, daß für diesen Zustand die Stützlinie durch die Mitten  $B$  und  $C$  der Kämpferfugen und  $A$  der Scheitelfuge gehe. Denkt man sich nun von links her eine bewegliche Last, etwa einen Eisenbahnzug ankommend, welcher bis zu einem beliebigen Punkte  $K$  um die Länge  $D_1K = \lambda$  sich bewege. Drückt man auch diese als gleichmäßig auf die Länge  $D_1K$  vertheilt anzunehmende bewegliche Last  $Q$  durch das Gewicht

eines Prismas von Gewölbmaterial aus, dessen Höhe zu  $q = D_1D_0 = KK_0$  ermittelt sein soll, so ist die Verkehrslast durch das Rechteck  $D_1KK_0D_0$  vom Inhalte  $q\lambda$  gegeben. Durch diese einseitige Belastung des Gewölbes wird der Scheitel der Stützlinie aus der Mittelebene  $MA$  um eine gewisse Größe nach links gerückt, und es möge etwa die Ebene  $E_1E_2$  im Abstände  $e$  von  $M$  nummehr den Punkt der Stützlinie enthalten, in welchem ihre Tangente horizontal ist. Es sei ferner etwa  $E'$  dieser Punkt und  $H'$  die daselbst wirkende Horizontalkraft, sowie  $h'$  die verticale Höhe von  $E'$  über der Horizontalen  $BC$ . Die Ebene  $E_1E_2$  theilt die linke Gewölbenhälfte  $BA$  in zwei Theile  $BE'$  und  $E'A$ , deren Gewichte, ohne Einschluß der beweglichen Last, bezw. durch  $G_1$  und  $G_2$  bezeichnet werden sollen, während  $a_1$  und  $a_2$  die Abstände dieser Gewichte vom Kämpfer  $B$ , also  $G_1a_1$  und  $G_2a_2$  die betreffenden Momente sind. Wenn man nun auch die rechte Gewölbenhälfte  $AC$  durch eine Ebene  $F_1F_2$ , ebenfalls im Abstände  $e$  von  $M$ , in zwei eben solche Theile von den Gewichten  $G_1$  und  $G_2$  und den Momenten  $G_1a_1$  und  $G_2a_2$  in Bezug auf  $C$  getheilt denkt, so kann man, unter  $2l = BC$  die horizontale Entfernung der Kämpferstützen verstanden, für die beiden im Scheitel  $E'$  der Stützlinie zusammenstoßenden Gewölbtheile  $BE'$  und  $CE'$  die beiden Gleichgewichtsbedingungen schreiben:

$$H'h' = G_1a_1 + q\lambda \frac{\lambda}{2} \text{ für } BE'$$

und

$$H'h' = G_1a_1 + G_2a_2 + G_2(2l - a_2) = G_1a_1 + G_22l \text{ für } CE',$$

daher erhält man durch Subtraction:

$$q \frac{\lambda^2}{2} = G_22l \dots \dots \dots (1)$$

Aus dieser einfachen Gleichung läßt sich jederzeit für eine bestimmte einseitige Belastung die Verschiebung  $e$  des Scheitels der Stützlinie aus der Gewölbumitte dadurch bestimmen, daß man der jeweiligen Form und Construction der Brücke entsprechend dasjenige Stück des Gewölbes  $AE'$  ermittelt, dessen Gewicht

$$G_2 = \frac{q\lambda^2}{4l}$$

gegeben ist, und man ersieht auch, daß die Rechnung dieselbe bleibt, wenn die bewegliche Last  $Q$  nicht gleichmäßig vertheilt, sondern in einem oder mehreren Punkten concentrirt angenommen werden müßte, in welchem Falle man anstatt  $q \frac{\lambda^2}{2}$  nur das Moment dieser concentrirten Belastung für den Punkt  $B$  in die Rechnung einzuführen hätte. In den meisten Fällen der

Wirklichkeit wird man indessen, wie hier geschehen, eine gleichmäßige Vertheilung der Last annehmen dürfen, da auch concentrirte Lasten, wie die Drucke der Wagenräder durch die Erdschüttung und das Pflaster, bezw. durch die Schienen und Schwellen und deren Bettung sich auf eine größere Fläche des eigentlichen Gewölbes übertragen.

Die gefundene Beziehung  $G_2 = \frac{q \lambda^2}{4l}$  zeigt, daß mit zunehmendem Momente  $q \frac{\lambda^2}{2}$  der einseitigen Last  $Q$  auch das Gewicht  $G_2$  des zwischen  $A$  und  $E'$  gelegenen Gewölbtheiles, und folglich auch die Größe  $ME' = e$  zunimmt. Dieses Verhalten gilt aber nur so lange, als die von  $D_1$  aus vorrückende Last den veränderlichen Scheitel  $E'$  der Stützlinie noch nicht überschreitet, da von dem Augenblicke an, wo letzteres geschieht, die tatsächlichen Verhältnisse sich anders gestalten, als bei vorstehender Entwicklung vorausgesetzt wurde. Man findet leicht, daß der stattfindende Vorgang sich folgendermaßen darstellen läßt.

Wenn eine bewegliche Last über die Brücke geführt wird, so bewegt sich der Scheitel der Stützlinie aus seiner mittleren Lage in der Ebene  $MA$  der Last  $Q$  so lange entgegen, also von rechts nach links, wenn die Last bei  $D_1$  ankommt, bis die Last und der Scheitel der Stützlinie sich in einem Abstände  $e$  vom Scheitel begegnen, welcher durch die Gleichung

$$q \frac{(l - e)^2}{2} = G_2 2l \quad \dots \dots \dots (2)$$

gegeben ist, die man aus der oben gefundenen allgemeinen Gleichung (1) erhält, sobald man darin für  $\lambda$  den Werth  $l - e$  und für  $G_2$  das Gewicht des Gewölbstückes zwischen dem Scheitel und dem Begegnungspunkte einsetzt. Bei einer weiteren Bewegung der Last kehrt der Scheitel der Stützlinie, wie leicht zu erkennen ist, seine Bewegung um, indem er nunmehr in gleicher Richtung wie die Last sich bewegt, und zwar so, daß er wieder nach der Mitte  $M$  gelangt, sobald die Last  $q$  bis zu dem rechten Kämpfer  $D_2$  vorgeschritten ist, also die Brücke gleichmäßig über die ganze Spannweite einer specifischen Belastung  $q$  unterworfen ist. Denkt man sich nun die bewegliche Last von beschränkter Erstreckung, so daß das Ende der Last in einem gewissen Augenblicke den linken Kämpfer  $D_1$  überschreitet, so setzt von diesem Augenblicke an der Scheitel der Stützlinie seine Bewegung nach rechts fort, und zwar ebenfalls bis zu einem Punkte in demselben Abstände  $e$  wie vorher vom Scheitel. Diese äußerste Verschiebung der Stützlinie findet in demjenigen Augenblicke statt, in welchem auch das Ende der beweglichen Last bis zu diesem Punkte vorgeschritten ist, daher die Brücke nunmehr in der rechten Hälfte einer Belastung auf die Länge  $l - e$  vom Kämpfer  $D_2$  aus unter-

worfen ist. Bei weiterer Ueberführung der Last kehrt dann der Scheitel der Stützlinie wieder nach der Mitte  $M$  zurück, welche er erreicht, sobald die Last in dem Punkte  $D_2$  angekommen ist, die Brücke also nur noch ihrem Eigengewichte ausgesetzt ist, wie zu Anfang des betrachteten Vorganges. Ein analoges Verhalten muß natürlich eintreten, wenn die Last die Brücke in der entgegengesetzten Richtung überschreitet; in jedem Falle wird ein einfaches Ueberführen der Last den Scheitel der Stützlinie zu einer Doppelschwingung aus der Mitte  $M$  des Gewölbes nach der einen Seite um die Länge  $e$ , dann zurück durch die Mitte nach der anderen Seite um  $e$  und wieder zurück nach der Mitte veranlassen. Es ist danach klar, daß bei einer Belastung von einer Hälfte des Gewölbes der Scheitel der Stützlinie von der Gewölbmitte einen Abstand nach der belasteten Hälfte hin hat, welcher kleiner als der gedachte Werth  $e$  ist.

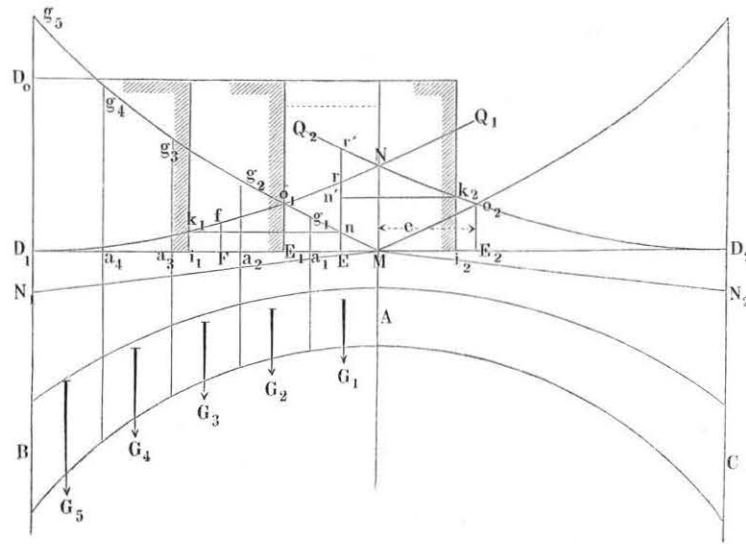
Die größte Verschiebung  $e$  des Scheitels der Stützlinie wird daher durch Gleichung (2) gegeben sein, und man wird die derselben entsprechende einseitige Belastung als die für den Gleichgewichtszustand der Brücke ungünstigste anzusehen und zu untersuchen haben, ob bei derselben die Stützlinie nicht den Wölbflächen zu nahe tritt, und zwar der äußeren Wölbfläche auf der belasteten und der inneren Wölbfläche auf der unbelasteten Seite. Die Zeichnung der Stützlinie für diesen äußersten Belastungszustand ist, da man nach (2) die Verticalebene für den Scheitel kennt, nach dem Vorangegangenen jederzeit leicht auszuführen. Die Lage des Scheitelpunktes  $E'$  selbst ist in der Ebene  $E_1 E_2$  noch in gewissem Maße willkürlich, und man hat zu untersuchen, ob sich wenigstens ein Punkt darin angeben läßt, für welchen als Scheitel die Stützlinie ganz innerhalb des Kernes verbleibt. Würde man etwa finden, daß für eine gewählte Lage  $E'$  des Scheitels der Stützlinie die letztere auf der belasteten Seite die äußere Kernbegrenzung durchschneidet, auf der unbelasteten Seite aber die innere Kernbegrenzung nicht erreichte, so hätte man zu untersuchen, ob man durch eine entsprechende Senkung des Scheitelpunktes und damit der ganzen Stützlinie parallel zu sich selbst den Zweig der belasteten Hälfte in das Innere des Kernes zurückziehen kann, ohne daß der andere Zweig in Folge der Senkung die innere Kernbegrenzung durchschneidet. Würde aber ein solches Durchschneiden dadurch herbeigeführt werden, so hätte man die Gewölbstärke entsprechend zu vergrößern. Würde sich für die gedachte ungünstigste einseitige Belastung eine Stützlinie ergeben, welche auf der einen Seite vom Scheitel die äußere, auf der anderen Seite die innere Kernbegrenzung berührte, so ist leicht einzusehen, daß diese Stützlinie die einzig mögliche wäre, denn sowohl eine Veränderung in der Höhenlage des Scheitels wie eine Aenderung der Horizontalkraft würde den einen oder anderen Zweig der Stützlinie aus der betreffenden Kernbegrenzung heraustreten lassen. In diesem Falle wäre



das Gewölbe für den betrachteten Zustand der einseitigen Belastung im labilen Gleichgewichte, während dabei jedoch nicht ausgeschlossen ist, daß das Gewölbe für symmetrische Belastung eine gewisse Stabilität besitzen kann, d. h. daß es für diesen Zustand verschiedene Stützeinlinien giebt, für welche das Gleichgewicht möglich ist. Es ist zwar die bewegliche Last in den meisten Fällen, besonders bei kleinen Spannweiten, gegen das beträchtliche Eigengewicht der Brücken nur von untergeordneter Bedeutung, doch kann in besonderen Fällen, namentlich bei größeren Spannweiten, die seitliche Verschiebung des Scheitels erheblich genug werden, um eine besondere Prüfung der Stabilität mit Rücksicht auf die beweglichen Lasten nöthig zu machen.

Die Größe  $e$  der seitlichen Verschiebung des Scheitels der Stützeinlinie aus der Mitte des Gewölbes ist zwar mit Hilfe der Gleichungen (1) oder (2) für jedes Gewölbe und jede einseitige Belastung einfach zu berechnen, doch läßt sich die betreffende Ermittlung auch aus einer Zeichnung entnehmen, welche zugleich

Fig. 85.



ein anschauliches Bild von dem betreffenden Vorgange gewährt. Zu dem Ende sei  $BAC$ , Fig. 85, ein symmetrisches Gewölbe mit der Belastungslinie  $N_1MN_2$ , und es sei  $D_1D_0 = q$  die der mobilen Last zugehörige Belastungshöhe. Man denke sich dann jede Gewölbehälfte durch verticale Ebenen in  $a_1a_2a_3 \dots$  in eine Anzahl Lamellen getheilt, und in bekannter Art die Gewichte  $G_1G_2G_3 \dots$  dieser Lamellen bestimmt. Trägt man dann auf den durch die Theilpunkte  $a$  gezogenen Verticalen die Strecken  $a_1g_1, a_2g_2, a_3g_3 \dots$  so auf, daß jede dieser



Construction die beiden in  $E$  zusammenstoßenden Gewölbtheile  $EB$  und  $EC$  gleiche Momente in Bezug auf  $B$  und  $C$  haben, denn es ist nach der Construction  $Er = En + n'r'$ , und nach dem Vorbemerkten ist  $n'r'$  gleich dem Momente der über  $E\frac{1}{2}$  befindlichen Last, in Bezug auf  $D_2$  oder  $C$ . Bezeichnet daher wieder  $G_1 a_1$  das Moment des Gewölbsstückes  $BE$  in Bezug auf  $B$ , und ist  $G_2$  das Gewicht des Stückes  $ME$ , so hat man das Moment des Theils  $BE$  in Bezug auf  $B$ , gleich  $M_1 = G_1 a_1 + Er$ , und dasjenige von  $EC$  in Bezug auf  $C$  gleich

$$M_2 = G_1 a_1 + 2 G_2 \cdot l + n'r' = G_1 a_1 + En + nr = M_1.$$

§. 27. **Gewölbstärke.** Wenn für ein Gewölbe in der vorstehend angegebenen Weise für eine bestimmte Belastung die Form des Bogens, oder für eine gegebene Bogenform die Vertheilung der Last so bestimmt ist, daß sich eine ganz im Innern des Gewölbes, resp. des Kerns verbleibende Stützlinie einzeichnen läßt, so ist das Gewölbe hinsichtlich seiner Stabilität gegen Drehung als gesichert zu betrachten. Wenn ferner die Fugenstellung so gewählt wird, daß die Richtung der Stützkraft nirgend um den Reibungswinkel von der Normalen zur Fuge abweicht, so kann auch kein Gleiten der einzelnen Wölbfesteine stattfinden. Diese letztere Bedingung wird immer leicht zu erfüllen sein, denn wenn man, wie dies wohl allgemein geschieht, die Fugen überall normal zur Mittellinie oder auch wohl zur inneren Bogenfläche anordnet, so wird man im Allgemeinen fast immer finden, daß der gedachte Abweichungswinkel der Stützkraft von der Fugennormalen für die verschiedenen möglichen Stützlinien wesentlich unter dem Reibungswinkel für die Steine bleibt, und daß man nicht genöthigt ist, auf eine besondere Cohäsion oder Scherfestigkeit des Mörtels zu rücksichtigen. Das Gewölbe ist aber außer auf seine Stabilität auch in Hinsicht seiner Festigkeit zu prüfen, und dazu ist es erforderlich, daß die einzelnen Wölbfesteine mit hinreichend großen Flächen sich gegen einander stützen, um nicht durch den auf sie wirkenden Druck zermalmt zu werden. Bezeichnet man allgemein mit  $W$  den Normaldruck zwischen zwei beliebigen Wölbfesteinen, und ist  $p$  die Druckspannung pro Flächeneinheit, welche man für das Wölfbmaterial als zulässig erachtet, so ist zur Aufnahme dieses Druckes eine Fläche  $F = \frac{W}{p}$  erforderlich. Dieser Werth würde in dem Falle gleich der ganzen Fugenfläche zu setzen sein, wenn der Druck  $W$  in der Mitte der Fuge wirkte, weil in diesem Falle eine gleichmäßige Vertheilung des Druckes angenommen werden kann. Wenn jedoch der Angriffspunkt der Druckkraft außerhalb der Mitte gelegen ist, etwa in einem Abstände  $e$  von derselben, so findet eine ungleiche Vertheilung der Pressung statt, und es gelten hierfür die gleichen Betrachtungen, welche in §. 14 in Bezug auf die Futtermauern angeführt worden sind. Insbesondere wird die Pressung an der einen

Kante der Fuge gleich Null, sobald der besagte Abstand  $e$  den Werth  $\frac{d}{6}$  erreicht, unter  $d$  die Stärke des Gewölbes an der betrachteten Stelle verstanden. Deswegen hat man auch, wie schon in §. 19 angeführt worden ist, das innere Drittel des Gewölbes häufig als den Kern vorausgesetzt, aus welchem die Stützlinie nicht heraustreten soll. Was die zulässige Pressung  $p$  des Wölfbmaterials anbelangt, so pflegt man dieselbe ebenso wie die Belastungen meist durch die Höhe eines Prismas von gleichem specifischen Gewichte mit dem Wölfbmaterial auszudrücken, so daß, unter  $h$  diese Höhe und unter  $\gamma$  dieses specifische Gewicht verstanden, die specifische Pressung durch  $p = h\gamma$  gegeben ist. Für die rückwirkende Festigkeit, d. h. diejenige Belastungshöhe  $K$  durch deren Einfluß das Material zerdrückt wird, sind in der nachfolgenden kleinen Tabelle die mittleren Werthe angegeben, welche nach Bauschinger's Versuchen den für Gewölbe meist angewendeten Baumaterialien zukommen. In der Tabelle ist gleichzeitig das specifische Gewicht und die Festigkeit in Kilogrammen pro 1 qm eingeführt.

Tabelle für die rückwirkende Festigkeit der Gewölbmateriale.

	Specif. Gewicht $\gamma$	Zerdrückungs- höhe $K$	Zerdrückungs- kraft
Trachyt . . . . .	2800 kg	4890 m	1370 kg
Granit . . . . .	2600 "	4150 "	1080 "
Kalkstein . . . . .	2400 "	2920 "	700 "
Sandstein . . . . .	2400 "	1500 "	360 "
Ziegel . . . . .	1800 "	940 "	170 "
Cementmörtel . . . . .	—	—	180 "
Beton . . . . .	2300 "	—	60 "

Die mit Sicherheit zulässige Belastungshöhe  $h$  ist jedoch aus verschiedenen Gründen bei den Ausführungen nur zu einem kleinen Bruchtheile von  $K$  anzunehmen. Zunächst ist, wie aus dem Vorstehenden sich ergibt, keineswegs vorauszusetzen, daß die Druckkraft überall die Mitte der Fuge trifft, denn selbst in den Fällen, in welchen das Gewölbe so entworfen ist, daß die Mittellinie eine mögliche Stützlinie ist, kann durch verschiedene Umstände, wie z. B. das Setzen des Gewölbes beim Austrüften, durch die Ausdehnung bei Temperaturveränderungen, ferner durch bewegliche Belastung u. s. w. die Stützlinie an einzelnen Stellen aus der Mitte gedrängt werden, in Folge dessen

der Druck sich ungleichförmig über die Lagerfugen vertheilt und einzelne Theile besonders stark gedrückt werden. Hierzu kommt die ungleichförmige Beschaffenheit des Baumaterials, welches nicht als durchaus homogen vorausgesetzt werden kann. Auch ist es nicht möglich, die einzelnen Wölblesteine so genau zu bearbeiten und zu versetzen, daß die Berührung gleichmäßig in der ganzen Fugenfläche stattfindet, vielmehr wird die Berührung immer nur auf einzelne Stellen sich beschränken, in welchen der Druck sich derartig concentrirt, daß daselbst ein theilweises Zermalmen des Materials und Zerstören des ganzen Wölblesteins herbeigeführt werden kann. Gerade zur Vermeidung dieses letzteren Uebelstandes ist die Verwendung des Mörtels zwischen den Steinen erforderlich, welcher gewissermaßen als Füllmaterial die Ungleichmäßigkeiten ausgleichen soll. Da aber das gehörige gleichmäßige Vertheilen des Mörtels, besonders in der Nähe des Scheitels, mit großen Schwierigkeiten verbunden zu sein pflegt, und auch der noch nicht gehörig erhärtete Mörtel bei übermäßigem Drucke leicht aus den Fugen herausgedrückt wird, so muß man aus allen diesen Gründen nur eine verhältnißmäßig geringe Pressung zwischen den Wölblesteinen zulassen.

Um für diese Pressung einen Anhalt zu finden, bleibt bei der bislang ungenügenden Kenntniß der erwähnten Umstände nichts anderes übrig, als aus den Dimensionen und Belastungen bewährter Ausführungen die Größe der Pressung zu ermitteln, welche in diesen Ausführungen stattfindet. In dieser Weise hat z. B. Schöffler\*) eine große Anzahl von verschiedenen gut bewährten und renommirten Brücken derartig untersucht, daß er aus den bekannten Dimensionen und Belastungen die Stützlinie des kleinsten Horizontalschubes ermittelte, und dann diesen Schub  $H$  selbst durch die Beziehung (s. §. 18)  $H = \frac{Qc}{h}$  berechnete, unter  $Qc$  das Moment des halben Gewölbes in Bezug auf den Kämpfer und unter  $h$  dessen Abstand von der Schubkraft im Scheitel verstanden. Wurde nun die gefundene Größe  $H$  durch die Gewölblestärke  $d$  im Scheitel dividirt, so ergab sich die spezifische Pressung daselbst zu  $p = \frac{H}{d}$  oder die Pressungshöhe zu  $k = \frac{p}{\gamma}$ . Ebenso wurde der Normaldruck  $W$  auf die unter dem Winkel  $\alpha$  gegen die Verticale geneigte Kämpferfuge zu

$$W = H \cos \alpha + Q \sin \alpha$$

bestimmt, und die Pressung des Kämpfers, dessen Dicke  $d_1$  ist, zu

$$p_1 = \frac{W}{d_1} \text{ bzw. } k_1 = \frac{p_1}{\gamma}$$

ermittelt.

\*) Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eisernen Brücken.

Diese Untersuchung ergab, daß die Pressungshöhe  $k$  im Scheitel für die verschiedenen Spannweiten oder Horizontalschübe sehr verschieden ist, indem diese Höhe bei ganz kleinen Brücken nicht mehr als etwa 3 m betrug, und sich dagegen bei den größten Spannweiten bis über 60 m erhob. Ebenso schwankte die Pressungshöhe in den Kämpferfugen, woselbst sie immer wesentlich größer als im Scheitel sich herausstellte, und in einzelnen Fällen den 3- bis 4 fachen Werth der Scheitelpressung mit gegen 250 m erreichte. Mit Rücksicht hierauf giebt Schöffler an, man solle die spezifische Pressung mit der absoluten Größe des Horizontalschubes  $H$  wachsend, die größte Pressungshöhe im Scheitel aber nicht über 200' oder 63 m annehmen, während man die Pressung für die Kämpfer gleich der anderthalbfachen Scheitelpressung, also die Belastungshöhe daselbst ebenfalls nicht größer als 300' oder 93 m anzunehmen habe. Für die Wahl des in jedem Falle anzuwendenden Betrags ist an dem gedachten Orte eine Tabelle mitgetheilt, welche für verschiedene Werthe des Horizontalschubes  $H$  die spezifischen Pressungen, also auch die Gewölblestärken ergiebt.

Auch auf Grund der in §. 22 ermittelten Beziehungen hat man mit Rücksicht auf ausgeführte stabile Brücken, deren Krümmungshalbmesser, Belastungshöhe und Gewölblestärke im Scheitel bekannt sind, die spezifischen Pressungen des Materials bestimmt, und es ist in dieser Weise von Heinzerling\*) eine Tabelle angegeben, welche im Auszuge hier angeführt werden soll. Die hierfür geltenden Beziehungen lassen sich im Wesentlichen folgendermaßen wiedergeben.

Nach §. 22, Gleichung (8), welche zu

$$H = rz_0\gamma \quad (1)$$

gefunden wurde, ist für jede Stützlinie der Horizontalschub  $H$  eines 1 m breiten Gewölblestreifens gleich dem Gewichte eines Steinprismas von der Höhe  $z_0$ , der Länge  $r$  und der Breite gleich 1 m. Denkt man sich nun ein Gewölbe nach dem Vorhergegangenen so construirt, daß die Stützlinie durch die Mitte der Scheitelfuge geht, und dessen innere Leibung überall parallel zur Stützlinie ist, d. h. denkt man sich die innere Wölblelinie durch Abtragen der halben Scheitelstärke  $\frac{d}{2}$  in allen Punkten der Stützlinie erhalten, so findet zwischen dem Halbmesser  $r_1$  der inneren Wölblelinie im Scheitel und demjenigen  $r$  der Stützlinie daselbst die Beziehung statt:

$$r = r_1 + \frac{d}{2} \quad (2)$$

Bezeichnet man nun noch mit  $h_0$  die auf das spezifische Gewicht  $\gamma$  des Gewölblematerials reducirte Belastungshöhe, welche die Uebermauerung, Fahr-

\*) S. Heinzerling. Die Brücken der Gegenwart, II. Abtheilung, sowie dessen Aufsatz in der Zeitschrift für Bauwesen, 1869 u. 1872.

Weisbach-Herrmann, Lehrbuch der Mechanik. II. 1.

bahn und Verkehrslast repräsentirt, so hat man die Scheitelbelastungshöhe

$$z_0 = d + h_0 \dots \dots \dots (3)$$

zu setzen. Kennt man nun für irgend ein Gewölbe den Scheitelhalbmesser  $r_1$  der inneren Wölbung und die Größen  $d$  und  $h_0$ , so findet man nach obiger Gleichung (1) den Horizontalschub für einen 1 m breiten Gewölbestreifen zu

$$H = \left(r_1 + \frac{d}{2}\right) (d + h_0) \gamma \dots \dots \dots (4)$$

und wenn man die spezifische Pressung in der Scheitelfuge gleich  $p$ , also

$$H = p d \dots \dots \dots (5)$$

setzt, so erhält man aus (4) und (5)

$$p = \left(r_1 + \frac{d}{2}\right) \left(1 + \frac{h_0}{d}\right) \gamma \dots \dots \dots (6)$$

und

$$\frac{d^2}{2} + d \left(r_1 + \frac{h_0}{2}\right) + r_1 h_0 = \frac{p}{\gamma} d,$$

oder

$$d^2 - 2d \left(\frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2}\right) + 2r_1 h_0 = 0.$$

Hieraus findet man, wenn  $p$  gegeben ist, die erforderliche Gewölbstärke zu

$$d = \frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2}\right)^2 - 2r_1 h_0} \dots \dots (7)$$

Mittels der Gleichung (6) sind nun aus stabilen Ausführungen die in der Tabelle unter der Bezeichnung  $\frac{p}{10\,000}$  angegebenen spezifischen Pressungen in Kilogrammen pro Quadratcentimeter für Straßen und Eisenbahnbrücken aus Hausstein ( $\gamma = 2500$ ), Backstein ( $\gamma = 2000$ ) und Bruchstein ( $\gamma = 2200$ ) ermittelt, wobei zu bemerken ist, daß die Scheitelbelastung  $h_0 \gamma$  pro Quadratmeter für Straßenbrücken zu 1800 kg und für Eisenbahnbrücken zu 2800 kg angenommen worden ist.

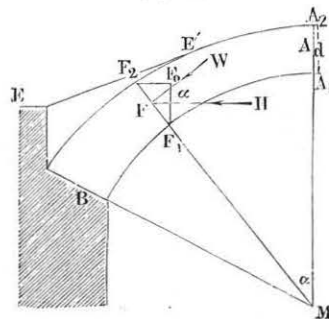
Tabelle der Pressungen in den Schlußsteinen der Brückengewölbe.

Scheitelhalb- messer $r_1$ der inneren Wölb- fläche Meter	Gewölbstärke $d$ im Scheitel			Pressung pro Quadratcentimeter $\frac{p}{10\,000}$ in Kilogrammen					
	Hausstein $\gamma = 2500$	Backstein $\gamma = 2000$	Bruchstein $\gamma = 2200$	Straßenbrücken $h_0 \gamma = 1800 \text{ kg}$			Eisenbahnbrücken $h_0 \gamma = 2800 \text{ kg}$		
				Hausstein	Backstein	Bruchstein	Hausstein	Backstein	Bruchstein
5	0,52	0,58	0,64	3,14	2,70	2,70	4,15	3,61	3,50
10	0,64	0,71	0,79	5,48	4,70	4,65	7,10	6,15	5,97
15	0,77	0,85	0,95	7,44	6,35	6,33	9,44	8,16	7,96
20	0,89	0,99	1,10	9,24	7,82	7,89	11,54	9,89	9,75
25	1,02	1,13	1,26	10,88	9,17	9,27	13,38	11,43	11,30
30	1,14	1,26	1,41	12,43	10,50	10,67	15,10	12,93	12,85
35	1,27	1,41	1,57	13,96	11,70	11,97	16,76	14,23	14,25
40	1,39	—	—	15,44	—	—	18,37	—	—
45	1,52	—	—	16,86	—	—	19,87	—	—
50	1,64	—	—	18,28	—	—	21,38	—	—
55	1,77	—	—	19,65	—	—	22,81	—	—
60	1,89	—	—	21,04	—	—	24,26	—	—



Mit Hilfe der aus dieser Tabelle in jedem bestimmt vorliegenden Falle zu entnehmenden Pressung  $p$  kann man durch die Gleichung (7) die Stärke  $d$  des Gewölbes im Scheitel ermitteln. Wenn man diese Stärke auch für alle übrigen Punkte des Gewölbes beibehalten wollte, so würde offenbar die spezifische Pressung des Materials von dem Scheitel nach den Rämpfern hin in derselben Weise wachsen wie der Stützdruck zunimmt. Um eine möglichst gleichmäßige Anstrengung des Materials zu erreichen, ist es daher gerathen, die Stärke des Gewölbes nach den Widerlagern hin entsprechend zu vergrößern. Das Gesetz für diese Verstärkung ist leicht zu erkennen. Es sei  $AFB$ , Fig. 86, die Hälfte eines symmetrischen Gewölbes, welches mit Rücksicht auf den Horizontaldruck  $H$  eine Scheitelfstärke  $A_1 A_2 = d$  erhalten

Fig. 86.



hat, und  $F_1 F_2$  sei irgend eine Gewölbfuge, welche in  $F$  senkrecht zu dem daselbst wirkenden resultirenden Drucke  $W$  angeordnet ist, also mit der Verticalen denselben Winkel  $\alpha = AMF$  bildet, unter welchem die Stützkraft  $W$  gegen den Horizont geneigt ist. Wegen des überall gleichen Horizontaldruckes hat man dann

$$W \cos \alpha = H$$

oder

$$W = \frac{H}{\cos \alpha},$$

und daher hätte man die Stärke  $F_1 F_2$  des Gewölbes in  $F$  ebenfalls zu

$$d_1 = \frac{d}{\cos \alpha} \quad \dots \quad (8)$$

zu wählen, wenn die spezifische Pressung in  $F$  denselben Werth  $\frac{H}{d} = p$  wie im Scheitel haben soll. Da diese Betrachtung für jede Fuge  $F$  gilt, so folgt hieraus das Gesetz, daß man behufs gleichmäßiger Pressung des Gewölbesmaterials die Gewölbfstärke derartig vom Scheitel nach den Rämpfern hin vergrößern muß, daß sämtliche Lagerfugen wie  $F_1 F_2$  dieselbe mit der Scheitelfuge  $A_1 A_2 = d$  gleiche Verticalprojection  $F_1 F_0 = d_1 \cos \alpha = d$  haben, entsprechend dem für alle Fugen gleichen Horizontaldrucke. In dieser Weise pflegt man vielfach die Verstärkung des Gewölbes vom Scheitel nach den Widerlagern hin vorzunehmen, doch ist leicht einzusehen, daß dies nur bis zu einer gewissen Größe von  $\alpha$  praktisch ausführbar sein wird, denn schon für  $\alpha = 60^\circ$  erhält man

$$d_1 = \frac{d}{\frac{1}{2}} = 2d,$$

und bei weiterer Zunahme von  $\alpha$  würde  $d_1$  sehr schnell wachsen. Man wird aber sowohl aus Schönheitsrücksichten, wie aus Gründen der Ausführung die Stärke  $d_1$  an den Widerlagern niemals größer als höchstens  $2d$  machen, und pflegt dann wohl, um das Material des Gewölbbogens daselbst nicht zu sehr anzustrengen, die in den Bogenzwickeln aufgeführte Hintermauerung  $BEE'$  durch geeignete Anordnung der Fugen zur Aufnahme eines Theils des Gewölbdrukkes zu befähigen.

Ueber die für Gewölbe zu wählende Stärke sind auch vielfach empirische, durch die Erfahrung bewährte Regeln, wie z. B. von der Form

$$d = \alpha + \beta r$$

angegeben, worin  $r$  der Halbmesser, und  $\alpha$  und  $\beta$  gewisse, von dem Materiale und der Belastung der Gewölbe abhängige Constante sind. Auch ist es deutlich, daß bei der Verwendung von Ziegelsteinen zu Gewölben in Gebäuden die Stärken mit Rücksicht auf das übliche Ziegelformat gewählt werden müssen, und daß man dabei mit der Stärke nie unter ein gewisses Maß, etwa die Breite eines Ziegels, herabgehen darf. Hinsichtlich derartiger Vorschriften muß auf die betreffenden Bauhandbücher verwiesen werden.

Beispiel. Wie groß hat man die Gewölbfstärke einer Eisenbahnbrücke aus Gausstein zu machen, deren innere Wölbung nach einem Kreissegment von  $h = 6$  m Pfeilhöhe und  $2l = 25$  m Spannweite ausgeführt ist, wenn das spezifische Gewicht des Gewölbematerials  $\gamma = 2400$  kg ist, und die durch die Fahrbahn und Verkehrslast dargestellte Scheitelbelastung einer Höhe von  $h_0 = 1,5$  m entspricht.

Man findet hier den Halbmesser  $r_1$  der inneren Wölbung aus

$$l^2 = h(2r_1 - h)$$

zu

$$r_1 = \frac{l^2 + h^2}{2h} = \frac{12,5^2 + 36}{2 \cdot 6} = 16,02 \text{ m}$$

und kann demnach der obigen Tabelle zufolge

$$\frac{p}{10000} = 9,44 + \frac{1,02}{5} (11,54 - 9,44) = 9,87,$$

also  $p = 98700$  kg pro Quadratmeter annehmen; demnach hat man

$$\frac{p}{\gamma} - r_1 - \frac{h_0}{2} = \frac{98700}{2400} - 16,02 - 0,75 = 24,35$$

und nach (7) die Scheitelfstärke

$$d = 24,35 - \sqrt{24,35^2 - 2 \cdot 16,02 \cdot 1,5} = 24,35 - 23,34 = 1 \text{ m}.$$

Die Fuge am Rämpfer ist gegen die Verticale unter einem Winkel  $\alpha$  geneigt, für welchen

$$\cos \alpha = \frac{r - h}{r} = \frac{16,02 - 6}{16,02} = 0,667$$

ist, woraus  $\alpha = 48^\circ 10'$  folgt. Soll daher die spezifische Pressung in dieser Fuge gleich der im Scheitel sein, so hat man daselbst die Gewölbdicke gleich

$$d_1 = \frac{d}{\cos \alpha} = \frac{d}{0,667} = 1,5 = 1,5 \text{ m}$$

zu machen.

§. 28. Die Widerlager. Das in den vorhergehenden Paragrafen besprochene Verhalten der Gewölbe findet nur dann statt, wenn die Gewölbe mit ihren Anfängen sich beiderseits gegen feste, nicht nachgiebige Widerlager stemmen, welche unter dem Einflusse der in den Kämpfern zur Wirkung kommenden Druckkräfte nicht zur Seite gedrängt werden. Nur in seltenen Fällen werden solche Festpunkte, wie etwa durch Felsen gebildet, von vornherein gegeben sein, im Allgemeinen wird man die Widerlager durch Ausführung hinreichend massiger Mauerkörper herstellen müssen. Die Stabilität eines solchen Widerlagkörpers ist nur durch ein genügend großes Eigengewicht desselben zu erzielen, welches, mit dem Gewölbschub  $W$  gegen die Kämpferfuge zusammen eine Mittelkraft giebt, die nirgends aus dem Widerlager heraustritt, und welche für keine Lagerfuge von deren Normalen um einen Winkel abweicht, der den Betrag des zugehörigen Reibungswinkels daselbst erreicht. Es gelten somit für die Stabilität der Widerlager dieselben Regeln, welche im ersten Capitel für Futtermauern aufgestellt sind, von welchen letzteren hinsichtlich der Wirkung der Kräfte die Widerlager sich nur insofern unterscheiden, als der auf dieselben seitwärts ausgeübte Gewölbschub in der Kämpferfuge concentrirt ist, während die Futtermauern durch den auf eine größere Fläche vertheilten Erddruck seitlich angegriffen werden. Nach dem über die Futtermauern Gesagten ist daher die Prüfung der Widerstandsfähigkeit der Widerlager unschwer zu bewirken, und es muß bei ihnen wie bei den Futtermauern nicht nur eine genügende Sicherheit gegen das Umranken sowie gegen das Verschieben vorhanden sein, sondern das Material darf auch nicht über einen gewissen Betrag auf Druck beansprucht werden.

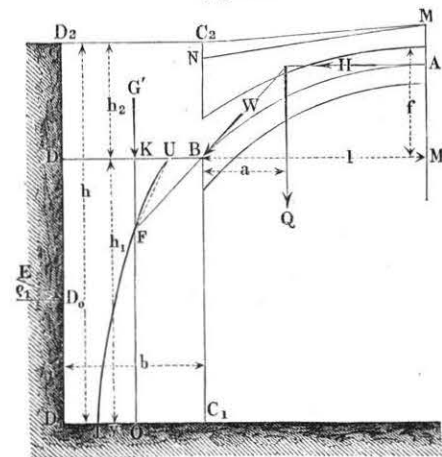
Um die Stabilität eines Widerlagers durch Rechnung zu prüfen, bezw. seine Dimensionen zu ermitteln, sei  $AB$ , Fig. 87, die Stütze eines halben Tonnengewölbes von der halben Spannweite  $BM_0 = l$ , dessen Belastungslinie durch  $MN$  gegeben sei. Die Pfeilhöhe  $M_0A$  der Stütze sei durch  $f$  bezeichnet, und der Angriffspunkt  $B$  im Kämpfer liege um  $BC_1 = h_1$  über der als unwandelbar anzunehmenden Grundfläche  $D_1C_1$  des Widerlagers, welches als ein parallelepipedischer Mauerblock von der Breite  $DB = b$  bis zu einer Höhe  $BC_2 = h_2$  über dem Kämpferangriff  $B$  aufgeführt sein soll. Das spezifische Gewicht des Widerlagers, welches meist gleich demjenigen des Gewölbmateri- als angenommen werden kann, sei

wieder mit  $\gamma$  bezeichnet, und es soll wie bisher ein Streifen des Widerlagers und Gewölbes von einer Breite gleich 1 m der Betrachtung unterzogen werden. Auf das Widerlager wirkt nun außer seinem in der verticalen Mittellinie anzunehmenden Eigengewichte

$$G = \gamma b (h_1 + h_2) = \gamma b h, \quad (1)$$

die von dem Gewölbe in  $B$  ausgeübte resultirende Kraft  $W$ , deren horizontale Componente  $H$  gleich dem Schub des halben Gewölbes  $AB$  sammt seiner Belastung ist. Außerdem wird gegen die hintere Mauerfläche  $D_1D_2$  die

Fig. 87.



Hinterfüllungserde mit einem unter dem Reibungswinkel  $\varphi_1$  gegen den Horizont gerichteten Drucke  $E$  wirken, dessen Angriffspunkt  $D_0$  nach dem vorhergehenden

Capitel in  $\frac{h}{3}$  über dem

Fußpunkte  $D_1$  anzunehmen ist. Die Größe dieses Erddruckes kann man nach §. 8 allgemein zu

$$E = \gamma_0 k \frac{h^2}{2} \quad (2)$$

setzen, wenn  $\gamma_0$  das spezifische Gewicht der Hinterfüllungserde und  $k$  einen von deren Böschungswinkel  $\varphi$  und der Oberfläche abhängigen Coefficienten bedeutet. Dieser Coefficient kann, wenn eine horizontale Oberfläche vorausgesetzt und von der Reibung der Erde an der Wandfläche  $D$  abgesehen wird, nach §. 8 zu  $\tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2}$  angenommen werden, also ist für diesen Fall  $E$  horizontal und

$$E = \gamma_0 \frac{k^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} \quad (2^a)$$

Sollte nun unter Einfluß dieser Kräfte das Widerlager gerade noch stabil sein, so müßte die Resultirende sämtlicher Kräfte durch die Kante  $D_1$  gehen, d. h. die Momentensumme aller Kräfte in Bezug auf  $D_1$  müßte gleich Null sein, in welchem Falle das Widerlager an der Grenze der Stabilität sich befinden würde. Da man jedoch eine gewisse Sicherheit oder einen Ueberschuß an Stabilität verlangen muß, so kann man entweder die

Bedingung stellen, daß die Resultirende durch einen mehr nach dem Innern der Mauer etwa in  $J$  gelegenen Punkt hindurchgehe, oder, was auf dasselbe Resultat hinauskommt, daß erst die  $\sigma$ fache Schubkraft  $H$  des Gewölbes im Stande sein soll, den Grenzzustand der Stabilität herbeizuführen. Die Zahl  $\sigma$  ist dann wieder der Stabilitätscoefficient, für welchen man meistens einen zwischen 2 und 3 liegenden Werth anzunehmen pflegt\*). Mit Rücksicht hierauf lautet nun die betreffende Gleichgewichtsgleichung, wenn noch mit  $a$  der Abstand des Punktes  $B$  von der Schwerlinie des Gewichtes  $Q$  der Brückenhälfte bezeichnet wird:

$$\sigma H(f + h_1) = Q(a + b) + G \frac{b}{2} + E \cos \varphi_1 \frac{h}{3} \quad (3)$$

oder mit Rücksicht auf (1) und (2<sup>a</sup>), wenn man  $Q = 0$  setzt:

$$\sigma H(f + h_1) = Q(a + b) + \gamma \frac{h}{2} b^2 + \gamma_0 \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} \frac{h^3}{6} \quad (3^a)$$

Diese Gleichung, welche direct zur Ermittlung des Stabilitätscoefficienten  $\sigma$  für eine gegebene Widerlagerstärke  $b$  dienen kann, schreibt sich behufs Bestimmung der erforderlichen Stärke  $b$  des Widerlagers:

$$b^2 + 2 \frac{Q}{\gamma h} b = \frac{2}{\gamma h} \left[ \sigma H(f + h_1) - Qa - \gamma_0 \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} \frac{h^3}{6} \right]$$

woraus die erforderliche Stärke

$$b = - \frac{Q}{\gamma h} + \sqrt{\frac{2}{\gamma h} \left[ \sigma H(f + h_1) - Qa - \gamma_0 \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} \frac{h^3}{6} \right] + \frac{Q^2}{\gamma^2 h^2}} \quad (4)$$

folgt. Es läßt sich hierbei bemerken, daß mit zunehmender Belastung  $Q$  die Stärke  $b$  des Widerlagers nur bis zu einem gewissen Maximalwerthe zunimmt, von welchem aus bei weiterer Vergrößerung der Belastung  $b$  wieder abnimmt. Dies ist aus Gleichung (3) ersichtlich, denn wenn auch durch eine größere Belastung  $Q$  der Horizontalschub  $H$  und also das umstürzende Moment  $H(f + h_1)$  gleichfalls vergrößert auftritt, so wird doch auch das Moment  $Q(a + b)$  auf der rechten Seite der Gleichung (3) damit vergrößert, und es giebt in jedem Falle eine gewisse Belastung  $Q$  des Gewölbes, welcher die größte Widerlagsstärke  $b_{\max}$  entspricht, ein Umstand, der insbesondere bei hohen Belastungen der Gewölbe in Betracht kommt. Wollte

\*) Scheffler findet auf Grund der Untersuchung einer großen Anzahl ausgeführter Brücken, daß für Straßenbahnen genüge,  $\sigma = 2,5$  anzunehmen, dagegen für Eisenbahnbrücken die Annahme von  $\sigma = 3$  rathsam erscheint.

man diesen Grenzfall rechnerisch feststellen, so könnte man in (4) den Horizontalschub  $H$  durch  $Q$  ausdrücken, indem man  $H = Q \frac{a}{f}$  setzt, und denjenigen Werth von  $Q$  ermittelt, welcher der Gleichung

$$\frac{db}{dQ} = 0$$

entspricht, eine Rechnung, die hier nicht weiter ausgeführt werden soll.

Wie aus der Figur ersichtlich ist, hat der Erddruck einen für die Stabilität des Widerlagers günstigen Einfluß, so daß durch denselben, wie auch Gleichung (4) zeigt, die erforderliche Stärke  $b$  verringert wird. Es kann sogar bei hohen Widerlagern dieser Einfluß des Erddruckes überwiegend sein, so daß ein Umkippen des Widerlagers nach innen zu befürchten ist. Man hat in solchen Fällen die Untersuchung ganz ähnlich, wie oben zu führen, mit dem einzigen Unterschiede, daß man für die Innenkante  $C_1$  die Momentengleichung ansetzt, und den  $\sigma$ fachen Erddruck voraussetzt, wenn auch hier ein Stabilitätscoefficient  $\sigma$  zu Grunde gelegt werden soll. Man würde demgemäß für diesen Fall die Gleichung

$$H(f + h_1) = Qa - \frac{\gamma h^2}{2} b + \sigma \gamma_0 \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} \frac{h^3}{6} \quad (3^a)$$

erhalten, woraus wie oben die Stärke  $b$  zu ermitteln wäre. Dieser Fall kommt daher im Wesentlichen auf die Untersuchung einer Futtermauer hinaus, welche auf der dem Erddrucke abgewendeten Seite durch Strebebögen gestützt wird. Auch sonst gelten für die Widerlager die im Capitel I für Futtermauern gefundenen Beziehungen, so namentlich hinsichtlich der Pressungen, welchen das Material in den Lagerfugen ausgesetzt ist. Für diese Pressungen ist bekanntlich der Abstand  $y = OJ$  maßgebend, um welchen der Angriffspunkt  $J$  der Resultirenden aller Kräfte von der Mitte  $O$  der betreffenden Lagerfuge absteht. Man findet diesen Abstand  $y$ , wenn man  $\sigma = 1$  setzt, und die Momentengleichung für den Punkt  $J$  ansetzt, also durch:

$$H(f + h_1) = Q \left( a + \frac{b}{2} + y \right) + \gamma b h y + \gamma_0 \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} \frac{h^3}{6} \quad (3^b)$$

woraus bei einer gewählten Stärke  $b$ , wie sie unter Zugrundelegung eines bestimmten Stabilitätscoefficienten  $\sigma$  festgesetzt worden ist

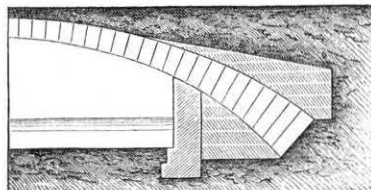
$$y = \frac{H(f + h_1) - Q \left( a + \frac{b}{2} \right) - \gamma_0 \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} \frac{h^3}{6}}{Q + \gamma b h} \quad \text{folgt} \quad (5)$$

Sichtlich der einem bestimmten Werthe von  $y$  entsprechenden Vertheilung der Pressungen gelten ausnahmslos die im §. 14 angeführten Bemerkungen.



Damit ein Ausweichen des Widerlagers durch Gleiten nicht möglich sei, darf die Resultirende für irgend eine Lagerfuge von deren Normalrichtung an keiner Stelle um den Reibungswinkel der Steine daselbst auf einander abweichen, und man erhält hiervon ein deutliches Bild durch die Zeichnung der Stützlinie bzw. der Richtungslinie des Druckes. Man hat es durch geeignete Stellung der Lagerfugen in dem Widerlager immer in der Hand, einem Gleiten wirksam zu begegnen, und man hat zu dem Zwecke vielfach das Widerlager mit solchem Fugenschnitte ausgeführt, daß es, Fig. 88,

Fig. 88.



gewissermaßen eine Fortsetzung des Gewölbes bildet. Diese Ausführung wird aber nur in den seltensten Fällen nötig sein, vielmehr wird auch bei horizontalen Fugen des Widerlagers die gedachte Abweichung der Resultirenden von der Verticalen kleiner sein als der Reibungswinkel  $\varphi$  des Mauerwerks, welchen Winkel man

wegen Ausführung des Mauerwerks im regelrechten Verlande zu  $\varphi = 45^\circ$  annehmen kann, so daß  $\varphi = \tan \varphi = 1$  zu setzen ist.

Die größte Gefahr des Gleitens findet, wie sich leicht ergibt, in dem Horizontalschnitte  $BD$  statt, welcher durch den Anfang  $B$  der Stützlinie, Fig. 87, gedacht wird, da für jede tiefere Fuge die Richtung der Resultirenden steiler ausfällt, indem bei gleichbleibender Horizontalkraft  $H$  die Vertikalkraft mit der Tiefe zunimmt. Um für diesen Querschnitt  $DB$  die Stabilitätsverhältnisse in Bezug auf das Gleiten zu bestimmen, denkt man sich den in  $B$  wirkenden Gewölbeschub  $W$ , dessen verticale und horizontale Componenten bzw.  $Q$  und  $H$  sind, mit dem in der Mitte  $K$  wirkend zu denkenden Gewichte  $G' = \gamma b h_2$  des oberhalb  $BD$  gelegenen Mauerkörpers  $DD_2 C_2 B$  zusammengesetzt. Man erhält dadurch die durch  $F$  gehende Richtung  $FU$  der Stützkraft in  $BD$ , welche gegen die Verticale unter dem Winkel  $KFU = \beta$  geneigt ist, der sich bestimmt aus

$$\tan \beta = \frac{KU}{KF} = \frac{H}{Q + G'} = \frac{H}{Q + \gamma b h_2} \quad (6)$$

Setzt man nun eine  $\sigma'$ -fache Stabilität in Bezug auf das Gleiten voraus, d. h. nimmt man an, daß erst in Folge einer Horizontalkraft  $\sigma' H$  der Winkel  $\beta$  den Reibungswinkel  $\varphi$  erreichen soll, so findet man

$$\tan \varphi = \frac{\sigma' H}{Q + \gamma b h_2} \quad (7)$$

woraus bei gegebener Widerlagsstärke  $b$  die Stabilität zu

$$\sigma' = \frac{Q + \gamma b h_2}{H} \tan \varphi, \quad (8)$$

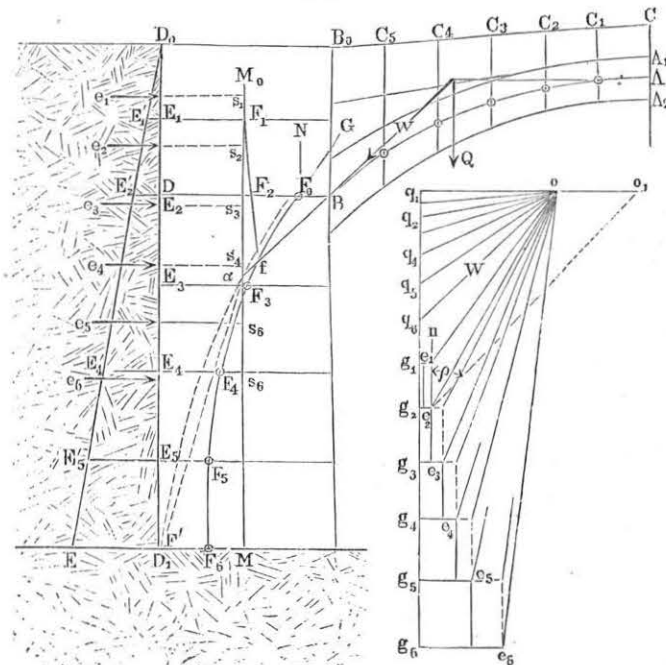
oder für einen gewünschten Stabilitätscoefficienten  $\sigma'$  die erforderliche Stärke

$$b = \frac{1}{\gamma h_2} \left( \frac{\sigma' H}{\tan \varphi} - Q \right) \quad (9)$$

folgt u. s. w. Als Stabilitätscoefficienten  $\sigma'$  gegen Gleiten kann man passend denselben Werth  $\sigma$  gleich 2 bis 3, wie für Umstürzen annehmen.

In Fig. 89 ist die Stützlinie eines Widerlagers  $BD$  gezeichnet, gegen welches in  $B$  ein Gewölbe  $AB$  sich stemmt, während die Rückseite  $D_0 D_1$  dem Drucke der Hinterfüllungs Erde ausgesetzt ist. Es sei das Gewicht  $Q$  der Gewölbhälfte  $A_1 A_2 B$ , deren Belastungslinie  $B_0 C$  sein mag, durch  $q q_6$  im Kräfteplane dargestellt und mit Hilfe der verticalen Theilungsebenen

Fig. 89.



durch  $C_1 C_2 \dots C_5$  die durch  $A$  und  $B$  gehende Stützlinie construirt. Für diese Stützlinie erhält man durch Construction in der bekannten Weise den Horizontalschub  $H$  in der Strecke  $oq$ , und daher ist die resultirende Kraft

$W$ , mit welcher das Gewölbe in  $B$  auf das Widerlager wirkt, durch  $o g_6$  der Größe und Richtung nach gegeben. Man denkt sich ferner das Widerlager durch horizontale Ebenen  $E_1, E_2, E_3 \dots E_5$  in eine beliebige Anzahl Stücke getheilt, und trägt von  $g_6$  aus die Strecken  $g_6 g_1; g_6 g_2, g_6 g_3 \dots$  an, welche dem gewählten Kräftemaßstabe entsprechend die Gewichte der Widerlagkörper zwischen der oberen Begrenzung  $D_0 B_0$  und der betreffenden jedesmaligen Theilebene vorstellen. Um noch den Erddruck  $E$  gegen die verticale Wandfläche  $D_0 D_1$  von der Höhe  $h$  zu bestimmen, wähle man die Gleichung

$$E = \gamma_1 \frac{h^2}{2} \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2}$$

und setze für mittlere Erde

$$\tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} = \frac{1}{4},$$

(entsprechend  $\varphi = 36^\circ 40'$ ), und das specifische Gewicht der Erde  $\gamma_1 = 1600 \text{ kg}$ , während das des Gewölbmauerwerks  $\gamma = 2000 \text{ kg}$  sein mag. Wenn man daher auf der Verticalen  $D_0 D_1$  die horizontale Strecke

$$D_1 E = \frac{\gamma_1}{\gamma} h \tan^2 \frac{90^\circ - \varphi}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} h = \frac{1}{5} D_0 D_1$$

anträgt und  $ED_0$  zieht, so erhält man bekanntlich in dem Dreiecke  $D_0 D_1 E$  den Querschnitt eines Steinprismas von der Länge 1 m, dessen Gewicht die Größe des auf die Wandfläche  $D_0 D_1$  wirkenden Druckes darstellt, welcher im Abstände  $\frac{1}{3} D_0 D_1$  über  $D_1$  angreift. In gleicher Weise erhält man in

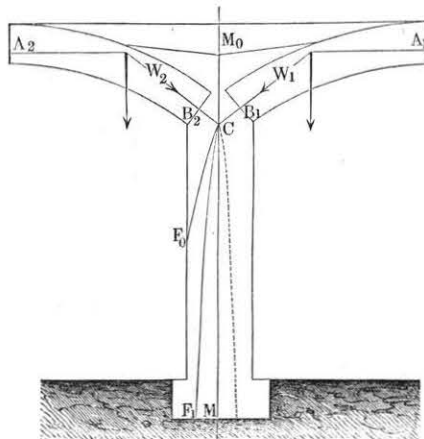
jedem der durch die Ebenen  $E_1, E_2, E_3 \dots$  abgetrennten Dreiecke den Erddruck auf den betreffenden Theil der Wandfläche, z. B. in dem Dreiecke  $D_0 E_4 E_4'$  den Erddruck  $e_4$  auf  $D_0 E_4$ , dessen Angriffspunkt in  $\frac{1}{3} D_0 E_4$  über  $E_4$  gelegen ist. Wenn man daher durch Verwandlung dieser Dreiecke in Rechtecke von einer Grundlinie gleich der dem Kräfteplane zu Grunde gelegten Basis die dem Erddrucke entsprechenden Strecken bestimmt und in  $g_1 e_1, g_2 e_2, g_3 e_3 \dots g_6 e_6$  in den Kräfteplan einträgt, so läßt sich die Stützlinie des Widerlagers in bekannter Weise leicht zeichnen. Man erhält dann zunächst für das über dem Kämpfer  $B$  gelegene Stück  $B D D_0 B_0$  des Widerlagers unter Einfluß des Eigengewichtes und Erddruckes die Stützlinie  $M_0 F_1 F_2$ , indem man nämlich durch den Schnittpunkt  $s_1$  zwischen  $e_1$  und der Schwerlinie  $M_0 M$  eine Parallele zu  $g_6 e_1$ , ferner durch  $s_2$  eine Parallele mit  $g_6 e_2$  zieht. Die Lagerfuge  $DB$  wird daher in  $F_2$  von der Kraft  $g_6 e_2$  und in  $B$  von der Kraft  $o g_6$  angegriffen, und man erhält den Angriffspunkt der Resultante in  $F_0$ , wenn man durch den Durchschnitt  $f$  der beiden in  $F_2$  und  $B$  angreifenden Kräfte eine Parallele zu  $o e_2$  im Kräfteplane legt. In solcher Art zeichnet sich die Stützlinie  $F_0 F_3 F_4 F_5 F_6$  für den unteren Theil des Wider-

lagers, indem man z. B., um den Punkt  $F_5$  der Lagerfuge  $E_5$  zu erhalten, durch den Durchschnitt  $s_5$  des Erddruckes  $e_5$  mit der Schwerlinie  $M_0 M$  eine Parallele zu  $g_6 e_5$  und von dem Schnittpunkte dieser Parallelen mit der Richtung  $B f$  des Gewölbschubes  $W$  eine Parallele mit der Resultirenden  $o e_5$  zieht, welche die Fuge  $E_5$  in dem Punkte  $F_5$  der Stützlinie trifft. Die Stützlinie schneidet die Grundfläche  $B_3 D_3$  in einem Abstände  $M F_6 = y$  von der Mitte, und aus diesem Werthe läßt sich, wie bei den Futtermauern gezeigt, die Vertheilung der Pressung bestimmen. Ebenso würde man die Größe des Stabilitätscoefficienten  $\sigma$  gegen Umstürzen nach außen finden, wenn man diejenige Größe des Horizontalschubes  $H_1$  ermittelt, vermitteltst deren die Stützlinie durch die Kante  $D_1$  geht. Auch erkennt man aus der Figur leicht den Einfluß des Erddruckes auf die Stabilität des Widerlagers. Wenn man nämlich den Erddruck vernachlässigen, also  $g_6 e_6 = 0$  setzen wollte, würde man den Schnittpunkt der Stützlinie mit der Grundfläche in  $F'$  erhalten, wenn man durch den Schnittpunkt  $\alpha$  des Gewölbschubes  $W$  mit der Mittellinie  $M_0 M$  eine Parallele mit  $o g_6$  zöge. Diese in der Figur punktirte Gerade  $\alpha F'$  trifft die Grundfläche in der Nähe der äußeren Kante  $D_1$ , so daß also ohne das Vorhandensein des Erddruckes in dem vorliegenden Falle die Grenze der Stabilität gegen Umstürzen schon nahezu erreicht sein würde. Wie man aus der Figur erkennt, zeigt die Stützlinie in der durch den Kämpferpunkt  $B$  gehenden Lagerfuge eine Stetigkeitsunterbrechung, welche dem Gewichte des oberen Pfeilerstückes  $B_0 D$  die Entstehung verdankt. Würde das Widerlager erst in der Höhe  $B D$  beginnen, so würde auch die Stützlinie  $F$  des Widerlagers an diejenige des Gewölbes in  $B$  sich anschließen. Der Winkel  $G F_0 N = \beta$ , welchen die Mittellinie in  $F_0$  mit der Normalen  $F_0 N$  zur Fuge bildet, läßt das Maß der Stabilität gegen Gleiten erkennen. Hierzu hat man, da dieser Winkel auch im Kräftepolygon als  $n e_2 o = \beta$  wiederkehrt, sobald  $e_2 n$  vertical gezeichnet ist, nur den Reibungswinkel  $\varphi$  gleich  $n e_2 o_1$  anzutragen, um in  $q o_1$  die Horizontalkraft  $H_1$ , also in  $\frac{q o_1}{q o} = \sigma_1$  den Stabilitätscoefficienten gegen Gleiten zu erhalten.

Von den Widerlagern oder Landpfeilern der Brücken, welche, wie im Vorstehenden immer angenommen wurde, nur auf einer Seite dem Drucke eines Gewölbes ausgesetzt sind, unterscheiden sich die Zwischenpfeiler der Brücken mit mehr als einer Oeffnung, welche beiderseits den Druck von Gewölben empfangen. Wenn hierbei die beiden Gewölbe  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$ , Fig. 90, ihrer Form und Belastung nach übereinstimmen, so sind auch die Stützkraften  $W_1$  und  $W_2$  der Kämpfer gleich groß und um denselben Winkel gegen die Verticalen geneigt. Daher schneiden sich diese Kräfte  $W_1$  und  $W_2$  in einem Punkte  $C$  der verticalen Mittellinie  $M_0 M$  des Pfeilers und die Stützlinie fällt von  $C$  aus mit dieser Mittellinie  $CM$  zusammen. Für

diesen Fall ist daher weder ein Bestreben, den Pfeiler umzustürzen, noch ihn zu verschieben, vorhanden. Nur wenn die Gewölbe zu beiden Seiten ungleich belastet sind, wird die Stützklinie des Pfeilers aus dessen Mittellinie heraustreten, und zwar um so mehr, je größer die Verschiedenheit der Belastungen beiderseits ist. Der ungünstigste Umstand wird nun dann stattfinden, wenn

Fig. 90.



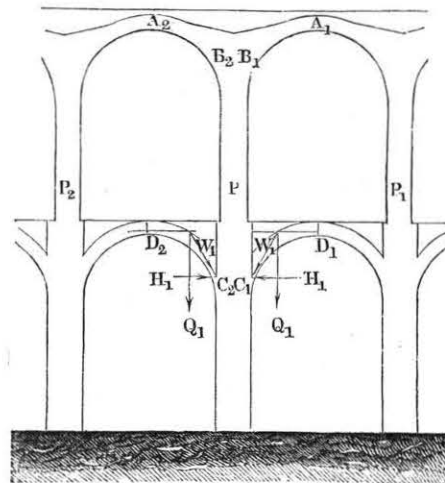
das eine Gewölbe, etwa  $A_2B_2$ , außer durch sein Eigengewicht gar nicht belastet ist, während das andere Gewölbe  $A_1B_1$  über seine ganze Erstreckung der größten zufälligen Belastung unterworfen wird. Für diesen Zustand würde die Stützklinie im Pfeiler etwa durch  $CF_1$  dargestellt sein. Auch diese ungünstigste einseitige Belastung wird jedoch nur eine geringe Stärke des Pfeilers erfordern, insofern die zufällige oder Verkehrsbelastung  $Q$  bei steinernen Brücken immer nur gering ist im Vergleich mit dem Eigengewichte der Gewölbe-

construction, und weil bei einem Zwischenpfeiler auf jeder Seite das Gewicht eines halben Tonnengewölbes lastet, wodurch die Stabilität bedeutend erhöht wird. Aus diesen Gründen kann man die Zwischenpfeiler der Brücken beträchtlich schwächer ausführen, als die Endwiderlager. Denkt man sich aber den Druck von einem der beiden Gewölbe, z. B.  $A_2B_2$ , beseitigt, sei es, daß dasselbe einstürze oder wegen einer Reparatur abgebrochen werden müsse, so erkennt man sofort, daß die Stützklinie, welche nunmehr etwa durch  $B_1CF_0$  dargestellt sein mag, nicht mehr im Innern des schwachen Pfeilers verbleibt, und daß der letztere dann jedenfalls durch den Schub des rechtsseitigen Gewölbes  $A_1B_1$  um die Kante  $F_0$  umgestürzt werden muß. Besteht nun die ganze Brücke aus einer größeren Anzahl von solchen Bögen, wie  $A_1B_1$  und  $A_2B_2$ , deren Zwischenpfeiler sämtlich nur so stark ausgeführt sind, daß sie wie  $B_1B_2M$  nur unter der Voraussetzung beiderseitigen Druckes stabil sind, so erkennt man aus der obigen Betrachtung, daß der Bruch eines einzigen Bogens den Zusammensturz der Brücke zur Folge haben muß. Um diesen Uebelstand zu vermeiden, ist es bei langen Thalüberbrückungen, wie

sie bei Viaducten vorkommen, und wobei eine oft beträchtliche Anzahl von Bögen angeordnet wird, üblich, einzelne Zwischenpfeiler so stark auszuführen, daß sie, ebenso wie die Landpfeiler oder Widerlager einem einseitigen Gewölbedrucke zu widerstehen vermögen. Diese stärkeren Pfeiler heißen Gruppenpfeiler, da sie die ganze Brücke derart in gewisse Abtheilungen oder Bogengruppen theilen, daß bei einem etwaigen Einsturz eines Bogens das Zusammenbrechen auf die Gruppe beschränkt bleibt, welcher dieser Bogen angehört. Ueber die Anzahl solcher Gruppenpfeiler wird in jedem besonderen Falle die Entscheidung durch lokale Verhältnisse und die Rücksichten auf eine ökonomische Herstellung bedingt werden.

Wenn die Pfeiler einer Brücke sehr bedeutende Höhen (über 30 m etwa) annehmen, wie dies bei den Wegüberführungen über tiefe Thäler vorkommt, so pflegt man die Pfeiler unter sich außer in dem eigentlichen Gewölbe der Brückenbahn, noch durch tiefer liegende Zwischengewölbe ein- oder mehrmal zu verspannen. Hierbei werden zuweilen auch diese Zwischengewölbe zur Herstellung der Communication zwischen beiden Ufern verwendet, indem man

Fig. 91.



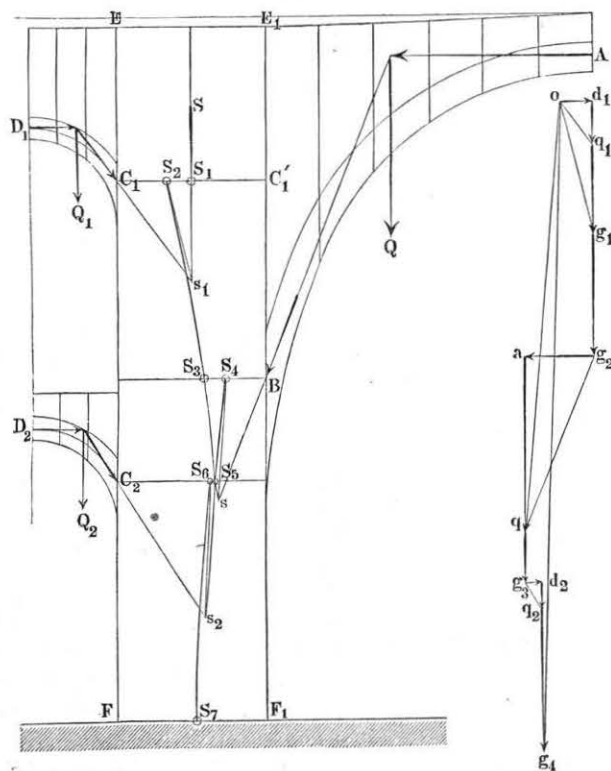
in diesem Falle die Pfeiler mit entsprechenden Öffnungen in der Höhe der Zwischengewölbe versieht. Je nach der Anzahl solcher Zwischengewölbe unterscheidet man derartige Brücken in ein- zwei- und mehrstöckige. Von der Wirkung einer solchen Verspannung der Pfeiler unter einander kann man sich nach dem Vorhergehenden leicht Rechenschaft geben. Es seien  $P, P_1$  und  $P_2$ , Fig. 91, Zwischenpfeiler eines Viaducts, welche den Bögen



$AB$  der Brückenbahn als Widerlager dienen. Wenn nun in den gleich hoch gelegenen Punkten  $C_1$  und  $C_2$  des Pfeilers  $P$  sich die Spannungsgewölbe  $C_1D_1$  und  $C_2D_2$  anschließen, deren Hälften je das Gewicht  $Q_1$  haben, und deren Horizontalschub  $H_1$  sein möge, so vereinigen sich die in  $C_1$  und  $C_2$  angreifenden Stützkkräfte  $W_1$  der Spannungsgewölbe zu einer in der Pfeilermitte wirkenden Verticalkraft  $2Q_1$ , indem die beiden Horizontalschübe  $H_1$  sich aufheben. Es ist also für die Stabilität des Pfeilers  $P$  durch die Spannungsgewölbe dasselbe Resultat erzielt, welches durch eine Beschwerung des Pfeilers in seiner Ase mit dem Gewichte zweier Hälften der Spannungsgewölbe  $CD$  erreicht werden würde.

In welcher Weise die Pfeiler in Anspruch genommen werden, welche in dieser oder ähnlicher Art mehreren Gewölben zum Widerlager dienen, wird man immer am schnellsten und sichersten durch die Verzeichnung der Stütz-

Fig. 92.



linie erkennen, deren Construction mit Hilfe des zugehörigen Kräfteplanes nach dem Vorhergegangenen keine Schwierigkeiten bieten dürfte. Als Beispiel hierzu ist noch in Fig. 92 die Stützlinie für den oberen Theil eines mittleren Zwischenpfeilers entworfen, wie derselbe bei dem Göltschthalviaducte (s. §. 16) zur Ausführung gekommen ist. Hier ist  $AB$  die Hälfte des mittleren Gewölbes von 30,87 m Spannweite und mehr als 70 m Höhe des Scheitels über der Thalsohle. An den Pfeiler, von welchem hier nur der Theil  $FE$  zwischen der zweiten und vierten Etage gezeichnet wurde, schließen sich bei  $C_1$  und  $C_2$  die halbkreisförmigen Bogen  $D_1C_1$  und  $D_2C_2$  an. Zeichnet man in bekannter Weise die Stützlinien mit Hilfe der Kräftepläne  $od_1q_1$  für  $D_1C_1$ ,  $g_2aq$  für den Hauptbogen  $AB$  und  $g_3d_2g_2$  für  $D_2C_2$ , und stellt man das Gewicht des Pfeilerstückes  $EE_1C_1C_2$  durch  $q_1g_1$ , dasjenige von  $C_1B$  durch  $g_1g_2$ , ferner das von  $B C_2$  durch  $q_2g_3$  und des unteren Stückes  $C_2F_1$  durch  $g_2g_4$  dar, so erhält man in  $od_1q_1g_1g_2aqg_3d_2g_2g_4$  das Kräftepolygon, welches in der mehrbesprochenen Art die Stützlinie des Pfeilers  $SS_1S_2S_3S_4S_5S_6S_7$  liefert. Daß diese Stützlinie in jeder Lagerfuge durch einen der Kämpfer  $C_1, B$  und  $C_2$  eine Stetigkeitsunterbrechung zeigen muß, wurde schon im Vorhergehenden gelegentlich der Fig. 89 besprochen. So ist z. B. auch hier der Punkt  $S_4$  der Angriffspunkt für die Mittellkraft aus der in  $B$  wirkenden Gewölbreaction  $g_2q$  und der in  $S_3$  angreifenden Resultirenden  $og_2$ , und man erhält diesen Punkt  $S_4$ , wenn man durch den Schnittpunkt  $s$  jener in  $B$  und  $S_3$  wirkenden Kräfte eine Parallele zur resultirenden Strecke  $og$  im Kräftepolygon zieht, u. s. w.

Anmerkung. Zuweilen ist man durch lokale oder andere Rücksichten gehindert, den Widerlagern eines Gewölbes die zur Stabilität erforderliche Dicke zu geben und hilft sich dann wohl durch Einlegung eines eisernen Ankers, wodurch man die beiderseitigen Widerlager verbindet. Dieser horizontale Anker wird durch den Gewölbeschub auf Zug in Anspruch genommen, und man hat, um die Stabilitätsverhältnisse der Construction zu untersuchen, ganz in der vorstehenden Art zu verfahren, nur daß man außer den bisher in Betracht gezogenen Kräften  $Q, G$  und  $H$  noch die dem Gewölbeschube  $H$  entgegengesetzt gerichtete Zugkraft  $Z$  des Ankers in die Rechnung, bezw. in die Construction einführt. Ist nun die Dicke, welche man dem Widerlager geben kann, bekannt, so findet man für einen gleichfalls anzunehmenden Stabilitätscoefficienten  $\sigma$  die Größe der von dem Anker auszuübenden Zugkraft  $Z$  und hieraus nach den aus dem folgenden Capitel sich ergebenden Regeln den Querschnitt des eisernen Ankers.

**Kreuz- und Kloostergewölbe.** Denkt man sich einen im Grundrisse §. 29. rechteckigen Raum  $ABCD$ , Fig. 93 (a. f. S.), dessen Seiten  $a$  und  $b$  sein mögen, durch ein Tonnengewölbe von der Spannweite  $AB = b$  und der Pfeilhöhe  $ME = f$  überspannt, und schneidet dieses Gewölbe durch zwei Vertical-

Stücke  $K$  und  $L$ , von denen je zwei gegenüberliegende wie  $K_1$  und  $K_2$  oder  $L_1$  und  $L_2$  zu einander symmetrisch sind. Man denke sich ferner von diesen zwei Paaren  $K$  und  $L$  das eine, etwa  $L$ , entfernt und nach Fig. 94 ersetzt durch zwei andere cylindrische Stücke  $K_3$  und  $K_4$ , welche dadurch entstanden

Fig. 93.

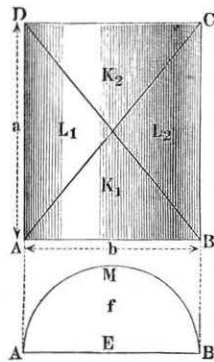
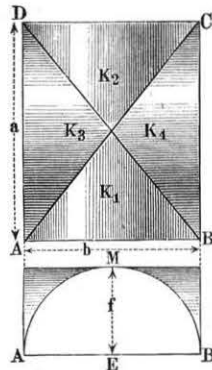


Fig. 94.



wird, welche gleiche Pfeilhöhe  $f$  und gleich hoch gelegene Kämpferfugen haben, und deren Spannweiten bezw.  $a$  und  $b$  sind.

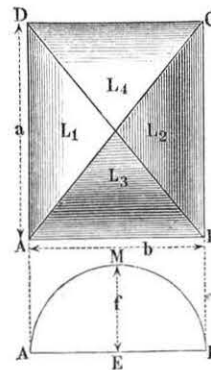
Es ist leicht zu erkennen, daß, wenn das eine Gewölbe  $K_1 K_2$  nach einem Kreisbogen, etwa nach einem Halbkreise  $AMB$  gebildet ist, das andere Gewölbe  $K_3 K_4$  in dem Falle durch denselben Kreisbogen begrenzt sein wird, in welchem  $a = b$ , d. h. wenn der überdeckte Raum quadratisch ist. Ist dagegen  $b$  von anderer Größe als  $a$ , so muß der Querschnitt des Gewölbes  $K_3 K_4$  durch einen Ellipsenbogen von der Sehne  $b$  und Pfeilhöhe  $f$  dargestellt werden, welcher in eine Halbellipse übergeht, sobald  $AMB$  ein Halbkreis ist. Ein solches Gewölbe nennt man ein Kreuzgewölbe, die vier einzelnen Stücke  $K$  heißen Kappen und die diagonalen Vereinigungslinien  $AC$  und  $BD$  nennt man die Grate, man spricht daher von Grathbögen, wenn nach der Richtung dieser Schnittlinien besondere Bögen ausgeführt worden sind, gegen welche sich die Kappen lehnen. Oft läßt man die Grathbögen aber auch fort, indem alsdann die Kappen sich direct gegen einander stemmen. Es ist aus dem Vorstehenden sogleich zu erkennen, daß, während das Tonnengewölbe, Fig. 93, sich gegen zwei Seitenmauern  $AD$  und  $BC$  als Widerlager stützt, bei dem Kreuzgewölbe, Fig. 94, die Stützkkräfte lediglich durch die vier Ecken  $ABC$  und  $D$  ausgeübt werden müssen, in welchen Ecken daher entsprechend starke Pfeiler aufzuführen sind. Man hat sich diese Pfeiler als die Widerlager der beiden Grathbögen vorzustellen,

gedacht werden können, daß man eine horizontale, mit  $AB$  parallele Erzeugungsgerade so bewegt, daß sie mit jeder der beiden elliptischen Schnittlinien  $AC$  und  $BD$  einen Punkt gemein hat und dabei stets mit  $AB$  parallel bleibt. Auf diese Weise entsteht über dem Räume  $AC$  eine Decke, die durch zwei sich rechtwinklig durchschneidende horizontale Tonnengewölbe gebildet

auf welchen letzteren die Kappen gewissermaßen lasten. Aus diesem Grunde wendet man Kreuzgewölbe hauptsächlich da an, wo es sich darum handelt, die Last der Decke auf einzelne Säulen oder Pfeiler zu übertragen, z. B. in Kirchen, Kellern etc.

Anstatt in dem Tonnengewölbe Fig. 93, die beiden Stücke  $L_1$  und  $L_2$ , welche die Kämpferfugen in sich aufnehmen, durch andere zu ersetzen, kann man aber auch die Stücke  $K_1$  und  $K_2$ , welche die Gewölbstirnen enthalten, beseitigen, und durch solche cylindrische Stücke  $L_3$  und  $L_4$ , Fig. 95, ersetzt

Fig. 95.



denken, welche in derselben schon angegebenen Weise durch Bewegung einer mit  $AB$  parallel bleibenden erzeugenden Geraden entstehen, die auf den beiden Grathlinien  $AC$  und  $BD$  entlang geführt wird. Auf diese Weise erhält man über dem Räume eine Decke, welche gleichfalls aus zwei sich rechtwinklig kreuzenden Tonnengewölben von der gemeinsamen Pfeilhöhe  $f$  und den Spannweiten  $a$  bezw.  $b$  sich zusammensetzt. Man ersieht aus der Figur, daß bei diesem Gewölbe, welches den Namen Klostergewölbe führt, sämtliche vier Umfassungsmauern als Widerlager auftreten, weshalb derartige Gewölbe hauptsächlich zum Ueberdecken einzelner von allen Seiten abgeschlossener Räume sich eignen.

Aus dem Vorstehenden ist auch ersichtlich, daß die Untersuchung der Stabilitätsverhältnisse der Kreuz- und Klostergewölbe sich ebenfalls auf diejenige der Tonnengewölbe zurückführen läßt, aus welchem sie bestehen. Es sei  $ABCD$ , Fig. 96 (a. f. S.), ein der Einfachheit wegen quadratisch vorausgesetzter Grundriß eines Kreuzgewölbes, für welches besondere Grathbögen  $AC$  und  $BD$  ausgeführt sein sollen. Ebenso werde vorausgesetzt, daß zwischen die Pfeiler in den umfassenden Verticalebenen die Gurtbögen  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  und  $DA$  von der Breite  $d$  gespannt seien.

Bezeichnet zunächst  $Q$  das Gewicht eines halben Grathbogens  $AM$  sammt der direct auf dem Grathbogen ruhenden Belastung, und ist  $a$  der Abstand dieses Gewichtes, welches im Schwerpunkte  $T$  wirken möge, von der Innenseite  $A_0$  des Pfeilers, so hat man den Horizontalschub  $H$  jedes Grathbogens gegen einen Pfeiler wie bei einem Tonnengewölbe zu

$$H = \frac{Qa}{f},$$

wenn  $f$  die Höhe bedeutet, um welche der Scheitel der Stützlinie in  $M$  über

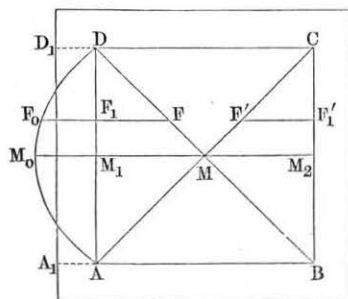




woraus man nach Feststellung der Verhältnisse der Bogen und Kappen die Größe des Querschnitts  $F$  d. h. die Stärken  $d$  und  $e$  ermitteln kann. Eine weitere Ausführung der betreffenden Rechnung soll hier unterbleiben, dieselbe dürfte in jedem speciellen Falle ohne besondere Schwierigkeiten durchführbar sein.

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Untersuchung des Klostergewölbes über dem rechteckigen Raume  $ABCD$ , Fig. 97, auf diejenige der Tonnengewölbe zurückführen. Denkt man sich auch hier die einzelnen Kappen in

Fig. 97.



Streifen durch verticale Ebenen wie  $M_1MM_2$ , und  $F_1F$  zerlegt, so erkennt man, daß der mittlere Gewölbestreifen  $M_1MM_2$  mit einem Tonnengewölbe von der Spannweite  $AB$  und der Pfeilhöhe  $f$  übereinstimmt, daher auch für diesen Streifen die Gewölbestärke nach den oben für Tonnengewölbe angegebenen Regeln zu bestimmen ist. Diese Gewölbestärke pflegt man meistens für die Kappen in allen übrigen Punkten beizubehalten. Irgend ein Strei-

fen einer Kappe wie  $F_1F$  stützt sich in  $F_1$  mit seiner Stützlast

$$W = \sqrt{Q^2 + H^2}$$

auf die Widerlagsmauer, der Grat  $MD$  dagegen erhält in  $F$  keine Belastung durch den Streifen  $F_1F$ , da dessen Wirkung sich durch die Kappe  $DMC$  auf den gegenüberliegenden Streifen  $F'F_1'$  der Kappe  $CMB$  fortsetzt, und daher die Horizontalschübe von  $FF_1$  und  $F'F_1'$  sich aufheben. Daher pflegt man bei den Klostergewölben auch in der Regel das Einwölben besonderer Gratabögen zu unterlassen.

Als Widerlager treten, wie schon oben angeführt wurde, bei den Klostergewölben alle vier Umfassungsmauern auf. Um deren Stärke zu bestimmen, denke man sich für jeden Gewölbestreifen wie z. B.  $FF_1$  entsprechend dessen Spannweite und Belastung die erforderliche Dicke  $F_1F_0$  des Widerlagers ermittelt. Offenbar erhält man alsdann in der Mitte  $M$ , wo die Spannweite  $M_1M_1'$  den größten Werth hat, auch die größte Stärke  $M_1M_0$  der Widerlagsmauer, während diese Stärke aus der Rechnung für die Ecken  $A$  und  $D$  gleich Null hervorgeht. Die Theorie würde daher eine Widerlagsmauer von der segmentförmigen Grundrißgestalt  $AM_0D$  ergeben. In der Ausführung wählt man hierfür meistens eine Mauer von dem rechteckigen

Querschnitte  $ADD_1A_1$  und solcher Dicke, daß das Stabilitätsmoment für beide Mauern in Bezug auf  $AD$  als Drehkante gleich groß ist. Auch kann man, wenn man sich mit dieser Annäherung nicht begnügen will, das resultierende Umstürzmoment aller einzelnen Streifen wie  $FF_1$  von  $A$  bis  $D$  bilden und danach die Querdimensionen der Mauer bestimmen.

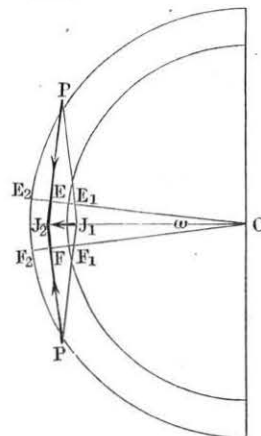
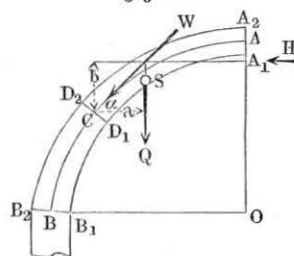
**Kuppelgewölbe.** Die zur Ueberdeckung von Räumen kreisförmigen §. 30.

Grundrisses dienenden Kuppelgewölbe sind dadurch gekennzeichnet, daß die beiden Leibungen durch zwei Rotationsflächen dargestellt sind, deren gemeinsame Axe im Mittelpunkte des kreisförmigen Grundrisses senkrecht steht. Die Erzeugungs- oder Meridianlinien dieser Rotationsflächen sind häufig Kreisbögen, so daß die Wölbflächen kugelförmig ausfallen, doch kommen auch anders gestaltete Meridianlinien vor. Ein solches Kuppelgewölbe ist entweder ein geschlossenes, d. h. bis zum Scheitelpunkte fortgesetztes, oder ein offenes im Scheitel durch eine kreisförmige Oeffnung unterbrochenes. Die letztere Anordnung findet sich häufig aus dem Grunde, um die centrale

Oeffnung behufs der Beleuchtung als Oberlicht (Laterne) wirken zu lassen.

Die Belastung der Kuppeln besteht fast immer nur in ihrem Eigengewichte, bezw. ihrer Bekleidung, und zwar ist diese Belastung in allen Fällen als ganz gleichförmig um die Axe herum vertheilt anzunehmen, wenigstens soll auf eine einseitige Belastung, wie sie z. B. durch Schneeeindruck herbeigeführt werden kann, im Folgenden nicht Rücksicht genommen werden. Um die Stabilitätsverhältnisse dieser Gewölbe zu prüfen, denke man sich durch Fig. 98 ein halbes Kuppelgewölbe dargestellt, für welches  $AO$  die Axe und  $ACB$  die Mittellinie der Meridianfläche sein mag. Denkt man sich aus diesem Gewölbe durch zwei verticale Axenebenen  $OE$  und  $OF$ , welche unter einem kleinen Winkel  $EOF = \omega$  gegen einander geneigt sind, ein streifenförmiges Element herausgeschnitten, dessen Mittelebene durch  $A_1A_2B_2B_1$  dargestellt ist, so kann man in Bezug auf dieses Element ganz ähnliche Be-

Fig. 98.



trachtungen anstellen, wie bei den Tonnengewölben. Zieht man nämlich in dem Meridiananschnitte  $AB$  durch einen beliebigen Punkt  $C$  der Mittellinie  $ACB$  eine auf der letzteren senkrechte Gerade  $D_1 D_2$ , so kann man den Kegelmantel, dessen Axe  $AO$  ist, und dessen Seite durch diese Gerade  $D_1 D_2$  gebildet wird, als die Lagerfuge für alle die unendlich vielen elementaren Streifen ansehen, in welche sich der oberhalb  $D_1 D_2$  befindliche Theil der Kuppel zerlegen läßt. Für jedes derartige Element, wie  $A_1 A_2 D_2 D_1$ , gilt nun wieder die allgemeine Bedingung, daß das Gleichgewicht nur möglich ist, wenn die Resultirende aller auf das Element wirkenden äußeren Kräfte die Lagerfuge innerhalb des Gewölbmaterials  $D_1 D_2$  trifft und von der Normalen zu  $D_1 D_2$  um weniger als den betreffenden Reibungswinkel abweicht. Als äußere, auf das Element wirkende Kraft hat man zunächst das Gewicht  $Q$  des Elementes und seiner etwaigen Belastung anzusehen, welches in dem bezüglichen Schwerpunkte  $S$  wirksam zu denken ist. Außerdem wirken noch auf die beiden verticalen Seitenflächen des Elementes, welche in den Meridianebenen  $OE$  und  $OF$  enthalten sind, gewisse Reactionen oder Pressungen  $P$ , die von den benachbarten Elementen ausgeübt werden. Aus der vorausgesetzten in Bezug auf die Axe  $AO$  gleichförmigen Gestalt und Belastung ergibt sich fogleich, daß diese Pressungen nur einmal zu den verticalen Meridianebenen  $OE$  und  $OF$  gerichtet sein können, denn würde die Pressung einer solchen Ebene eine in diese Ebene hineinfallende tangential Componente haben, welche etwa nach auswärts von  $O$  nach  $E$  gerichtet wäre, so würde von den beiden in der betreffenden Meridianebene zusammenstoßenden Gewölbelementen das eine durch diese Componente nach außen und das andere durch die gleich große und entgegengesetzte Reaction nach innen gedrückt werden, was mit der Annahme der vollkommenen Gleichmäßigkeit aller Verhältnisse rings um die Axe  $AO$  nicht zu vereinigen wäre. Aus dieser Gleichförmigkeit folgt ebenso auch die Gleichheit der beiden auf die Seitenebenen  $OE$  und  $OF$  des Elementes wirkenden Pressungen, welche jede mit  $P$  bezeichnet werde. Diese unter dem kleinen Winkel  $\omega$  gegen einander wirkenden horizontalen Pressungen  $P$  setzen sich nun nach dem Parallelogramm der Kräfte zu einer Mittelkraft  $J_1 J_2$  zusammen, deren Größe wegen der Kleinheit von  $\omega$  durch

$$J_1 J_2 = 2 P \sin \frac{\omega}{2} = P \omega = H. \quad (1)$$

gegeben ist, und welche in der mittleren Meridianebene des Elementes horizontal von innen nach außen wirkt. Setzt man diese horizontale Kraft  $H$ , welcher das betrachtete Element durch die Pressungen seiner beiden benachbarten Elemente ausgesetzt ist, mit dem Gewichte  $Q$  zu einer Mittelkraft  $W$  zusammen, so muß diese Resultirende den oben angegebenen Bedingungen

entsprechen, gerade so wie die Stützkraft  $W$  bei den bisher betrachteten Tonnengewölben. Die Analogie mit den letzteren fällt überhaupt ins Auge, und der wesentliche Unterschied besteht nur darin, daß, während bei den Tonnengewölben der Horizontalschub  $H$  in der Scheitelfuge durch die Reaction der benachbarten Gewölbhälfte ausgeübt wird, bei dem Kuppelgewölbe dieser Horizontalschub  $H$  unterhalb des Scheitels gelegen ist. Dies geht daraus hervor, daß hier der Horizontalschub als die Resultirende aus den Wirkungen angesehen werden muß, welche die beiderseits benachbarten Gewölbtheile auf die Meridianflächen ausüben, in denen sie mit dem betrachteten Elemente in Berührung sind. Wenn nun die durch Zusammenfügung von  $Q$  und  $H$  sich ergebende Stützkraft  $W$  durch irgend einen Punkt etwa  $C$  der Lagerfuge  $D_1 D_2$  geht, so hat man für diesen Punkt  $C$  als Mittelpunkt der Momente die Gleichung

$$Qa = Hb \quad (2)$$

unter  $a$  und  $b$  die Abstände des Stützpunktes  $C$  von dem Gewichte  $Q$ , bzw. von der Horizontalkraft  $H$  verstanden. Ebenso ist die Stützkraft in  $C$  wie bei den Tonnengewölben durch

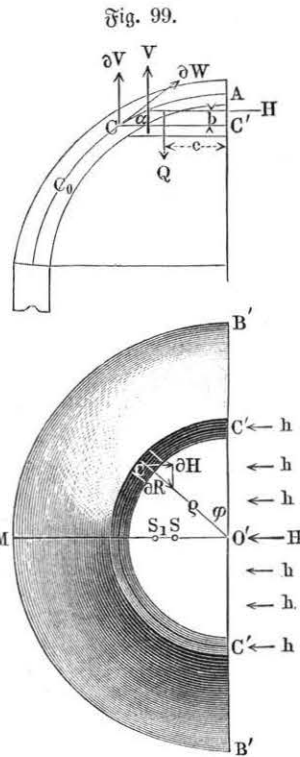
$$W = \sqrt{Q^2 + H^2} \quad (3)$$

gegeben.

Denkt man sich diese hier für die beliebige Lagerfuge  $D_1 D_2$  angestellte Betrachtung für alle möglichen Fugen zwischen dem Scheitel  $A$  und der Basis oder dem Kämpfer  $B$  angestellt, so gelangt man auch hier, wie bei dem Tonnengewölbe, zum Begriffe der Stützlinie oder Mittellinie des Druckes, wenn man alle diejenigen Punkte mit einander durch eine stetige Linie verbunden denkt, in welcher die einzelnen Fugen von den zugehörigen Mittelkräften getroffen werden, und es lassen sich offenbar hinsichtlich der allgemeinen Eigenschaften dieser Stützlinien, und hinsichtlich der Anzahl der möglichen und der Unbestimmtheit der wirklichen Stützlinien die für Tonnengewölbe gemachten Bemerkungen leicht auf Kuppelgewölbe übertragen. Die Horizontalkraft  $H$  ist hier nicht wie bei den Tonnengewölben für alle Fugen constant, sondern dieselbe nimmt, da sie aus den Reactionen auf die Seitenflächen des Streifens entsteht, allmähig nach unten hin zu. Um für die Größe dieses Horizontalschubes  $H$  einen allgemeinen Ausdruck zu erhalten, sei der von Föppl\*) eingeschlagene Weg befolgt, indem zunächst die Kuppel durch eine Meridianebene  $B' O' B'$ , Fig. 99 (a. f. S.), in zwei gleiche Theile zerlegt wird. Betrachtet man von einer solchen Hälfte diejenige halbe Calotte, welche zwischen dem Scheitel  $A$  und der kegelförmigen Fuge  $C' C C'$  enthalten ist, so wirkt auf dieses Stück außer dessen Eigengewicht  $Q$  die Summe

\*) A. Föppl, Theorie der Gewölbe. Leipzig 1880.

aller in dem Halbkreise  $C'CC'$  gleichmäßig vertheilten Stützkkräfte  $w$  und außerdem die Summe aller der nach dem Vorstehenden horizontalen Reactionen  $h$ , mit welchen die weggeschnitten gedachte Hälfte gegen den Meridianschnitt  $C'O'C'$  wirkt. Diese letzteren Reactionen liefern eine horizontale Mittelkraft  $H$ , welche in der  $C'CC'$  senkrechten Symmetrieebene  $O'M$  des Kuppelstückes wirkt, und zwar in einer noch unbekannten Höhe  $b$  über dem mittleren Kreise  $CC'$  der Lagerfuge.



Wegen der symmetrischen Form und Belastung der Kuppel wird die Stützreaction  $w$  der Lagerfuge in derselben nach allen Meridianebenen gleichförmig vertheilt sein, und es ist aus demselben Grunde auch klar, daß diese Reaction für irgend welchen Punkt der Lagerfuge in der Meridianebene desselben liegen, und für alle Punkte unter demselben Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont geneigt sein muß. Wenn also diese Reaction  $w$  in irgend einem Meridianschnitte in dem Punkte  $C$  vom Halbmesser  $O'C = \rho$  angreift, so kann man sich den gesamten Widerstand der Lagerfuge in der Kreislinie  $C'CC'$  vom Halbmesser  $O'C = \rho$  wirksam denken. Bezeichnet man daher mit  $w$  den mittleren Stützdruck auf die Längeneinheit dieser Kreislinie, so erhält man für irgend ein Element  $\partial L$  derselben den Stützdruck

$$\partial W = w \partial L.$$

Zerlegt man den elementaren Stützdruck  $\partial W$  in irgend welchem Punkte  $C$  in seine verticale Componente  $\partial V$  und die horizontale, also radial gerichtete Componente  $\partial R$ , so hat man

$$\partial V = \partial W \sin \alpha = w \sin \alpha \partial L \quad (4)$$

Offenbar ist die Summe aller verticalen Componenten gleich dem Gewichte  $Q$  des betrachteten Kuppelstückes, so daß man hat

$$V = Q = w \sin \alpha L = w \sin \alpha \pi \rho \quad (5)$$

Die radiale Componente dagegen findet man zu

$$\partial R = \partial W \cos \alpha = w \cos \alpha \partial L \quad (6)$$

Wenn man dieselbe wiederum zerlegt in eine Componente senkrecht und eine parallel zur Begrenzungsebene  $C'O'C'$  des betrachteten Kuppelstückes, so erhält man die erstere zu

$$\partial H = \partial R \sin \varphi = w \cos \alpha \partial L \sin \varphi \quad (7)$$

wenn  $\varphi$  den Winkel  $CO'C'$  bedeutet, welchen die Meridianebene von  $C$  mit der Grenzebene  $C'O'C'$  bildet. Summirt man auch diese Componenten für alle Werthe von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \pi$ , so erhält man, da  $\partial L \sin \varphi$  gleich der Projection des Kreisbogenelementes  $\partial L$  auf den Durchmesser  $C'C'$  ist, die gesammte Horizontalkraft

$$H = w \cos \alpha 2 \rho \quad (8)$$

und durch Division in (5):

$$\tan \alpha = \frac{2}{\pi} \frac{Q}{H} \quad (9)$$

Die andere Componente von  $\partial R$ , welche parallel mit der Begrenzungsebene  $C'C'$  und durch

$$\partial R \cos \varphi$$

gegeben ist, liefert bei der Summierung ein Resultat gleich Null, da diese Componenten für je zwei zu  $O'M$  symmetrisch gelegene Elemente gleich und entgegengesetzt sind.

Die verticale Resultirende  $V$  hat man sich in dem Schwerpunkte  $S_1$  der als materiell gedachten halben Kreislinie  $C'CC'$  angreifend zu denken, welcher Schwerpunkt von der Ebene  $C'C'$  bekanntlich den Abstand  $OS_1 = \frac{2}{\pi} \rho$  hat, während die Schwerkraft  $Q$  der halben Kuppelschale in dem Schwerpunkte  $S$  wirkt, dessen Abstand von  $C'O'C'$  durch  $c$  ausgedrückt sein mag. Bezeichnet man noch den verticalen Abstand der Horizontalkraft  $H$  von dem Kreise  $CC'$  mit  $b$ , so hat man zur Bestimmung von  $b$  die Momentengleichung

$$Q \cdot SS_1 = Q \left( \frac{2}{\pi} \rho - c \right) = Hb \quad (10)$$

welche, wenn man darin aus (9)

$$H = \frac{2Q}{\pi \tan \alpha} \quad (11)$$

einführt,

$$b = \left( \rho - \frac{\pi}{2} c \right) \tan \alpha \quad (12)$$

liefert.



Aus der Gleichung (11):

$$H = \frac{2}{\pi} Q \cotg \alpha$$

erkennt man leicht, daß der Horizontalschub  $H$  des Kuppelgewölbes für einen gewissen Winkel  $\alpha$ , d. h. für eine gewisse Stelle der Kuppel einen größten Werth annimmt. Man findet hierfür die Bedingung durch

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0,$$

welche, mit Rücksicht darauf, daß das Gewicht  $Q$  von  $\alpha$  abhängt, die Gleichung liefert:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{2}{\pi} \left( \cotg \alpha \frac{\partial Q}{\partial \alpha} - \frac{Q}{\sin^2 \alpha} \right) = 0,$$

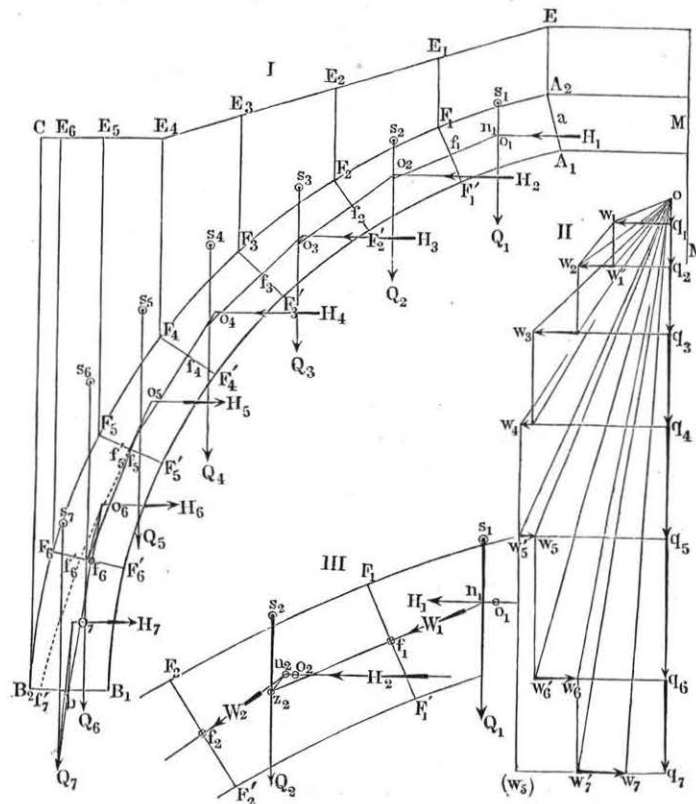
oder

$$\frac{\partial Q}{Q} = 2 \frac{\partial \alpha}{\sin 2\alpha} \dots \dots \dots (13)$$

Sei etwa  $C_0$  der Punkt des Meridianschnittes, für welchen diese Bedingung (13) erfüllt ist, für welchen also der Horizontalschub  $H$  den größten Werth annimmt, so wird für alle tiefer liegenden Punkte der Kuppel der Horizontalschub  $H$ , d. h. also die Pressung in dem Meridianschnitte  $B'O'B'$  kleiner. Dies könnte nur dadurch möglich werden, daß in dem Meridianschnitte unterhalb dieses Punktes  $C_0$  nicht mehr rückwirkende Pressungen, sondern absolute Spannungen stattfänden. Da man aber annehmen muß, daß der Mörtel in den Fugen Zugspannungen nicht zu übertragen vermag, so wird unterhalb des gedachten Punktes  $C_0$  in den Meridianschnitten überhaupt keine Reactionswirkung ausgeübt werden, indem man sich zu denken hat, daß sämtliche verticale Stoßfugen von dem durch  $C_0$  gelegten Horizontalschnitte aus nach unten hin sich öffnen. Der Horizontalschub hat daher für alle Punkte des Kuppelgewölbes unterhalb  $C_0$  einen constanten Werth gleich dem dem Punkte  $C_0$  zukommenden Maximum von  $H$ . Es ist daraus auch ersichtlich, daß unterhalb dieses Punktes  $C_0$  die Stütze infolge des Horizontaldruckes  $H_{max}$  mehr nach außen gedrängt wird, als es der Fall sein würde, wenn der Mörtel in den einzelnen Steinkränzen Zugspannungen ausüben vermöchte, weil in Folge einer solchen Eigenschaft der Horizontalschub um so mehr sich verringern müßte, je mehr das betreffende Kuppelstück unterhalb des durch  $C_0$  gedachten Ringes herabreicht.

In der That hat man vielfach bei Kuppeln den einzelnen Steinkränzen im unteren Theile die Fähigkeit, Zugspannungen aufzunehmen, dadurch ertheilt, daß man die Kuppeln direct über dem Auflager mit eisernen Ringen umgürtete, wie dies z. B. bei der berühmten Kuppel der St. Peterskirche

in Rom nachträglich geschehen ist. In welcher Weise die Anordnung eines solchen Ringes, der durch seine Zugspannung den Horizontalschub für den unteren Theil der Kuppel von dem größten Werthe  $H_{max}$  wieder herabzieht, und dadurch die Stütze entsprechend nach innen drängt, zu treffen, und wie der Einfluß desselben auf die Stabilität des Kuppelgewölbes und ins-  
Fig. 100.



besondere der Widerlagsmauer zu beurtheilen ist, dürfte nach dem Vorhergegangenen deutlich sein.

Auch bei den Kuppelgewölben wird man sich am bequemsten einer graphischen Methode zur Ermittlung des Horizontaldruckes und der Pressung in jedem Querschnitte bedienen, um danach die erforderliche Stärke des Gewölbes und Widerlagers zu bestimmen. Dies kann in folgender Weise geschehen. Es sei  $A_1 A_2 B_2 B_1$ , Fig. 100, der Meridianschnitt eines Kuppel-

gewölbes, welches in der Mitte mit einer Lichtöffnung  $MA_1A_2$  versehen sein mag, und dessen Belastung in bekannter Weise durch die Belastungslinie  $CE$  dargestellt sein soll. Man theile dann den Gewölbequerschnitt durch Ebenen wie  $F_1F_1', F_2F_2' \dots$  nach der Richtung der Lagerfugen in eine beliebige Anzahl von Theilen, welche als Gewölbesteine aufgefaßt werden können, und ziehe durch die oberen Kanten  $F_1F_2 \dots$  dieser Fugen die Verticalen  $FE$  bis zur Belastungslinie. Betrachtet man jetzt ein streifenförmiges Element, dessen Mittelebene der gezeichnete Meridianschnitt  $A_1ECB_2B_1$  ist, und dessen Mittelpunktswinkel etwa den  $n$ ten Theil einer ganzen Umdrehung  $2\pi$  beträgt, so kann man die Gewichte  $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$  der einzelnen Stücke leicht ermitteln, in welche dieser Streifen durch die Flächen  $FE$  zerlegt ist. Wird z. B. mit  $f_3$  die Querschnittsfläche eines solchen Theiles wie  $F_2'E_2E_3F_3'$  bezeichnet, und hat der Schwerpunkt  $s_3$  dieses Querschnittes den Abstand  $q_3$  von der Axe  $MM$  der Kuppel, so würde der Inhalt von dem zugehörigen Stücke des betrachteten Streifens zu  $\frac{2\pi q_3 f_3}{n}$  sich bestimmen und daher verhalten sich die Gewichte  $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$

der einzelnen Elemente des Streifens, wie die Producte  $f_1 Q_1, f_2 Q_2, f_3 Q_3 \dots$ , welche Producte nach Annahme einer gewissen Basis für den Kräftemaßstab in der mehrfach angegebenen Art leicht durch Strecken dargestellt werden können. Es mögen diese Strecken auf der Verticalenlinie  $oq$  im Kräfteplane aufgetragen werden, so daß  $oq_1 = Q_1, q_1 q_2 = Q_2, q_2 q_3 = Q_3 \dots$  gemacht ist, und es mögen  $s_1, s_2, s_3 \dots$  die Angriffspunkte der Gewichte  $Q$ , d. h. die Schwerpunkte der betrachteten Stücke sein. Man wird in den meisten Fällen bei genügender Kleinheit der Theile für die Schwerpunkte dieser Theile die Schwerpunkte der Querschnittsflächen  $f_1, f_2, f_3 \dots$  annehmen können, wobei der Fehler um so geringer ausfällt, je größer der Abstands  $q$  dieses Schwerpunktes im Vergleiche zu der horizontalen Dimension der Querschnittsflächen  $f_1, f_2, f_3 \dots$  ist, d. h. je größer die Anzahl  $n$  der Theile ist, in welche die Kuppel zerlegt wurde. Auf die einzelnen Wölbesteine wirken nun nach dem Vorstehenden gewisse horizontale Kräfte  $H_1, H_2, H_3 \dots$ , welche als die Resultanten der auf die beiden Seitenflächen eines solchen Steines, d. h. in den Stoßfugen, von den benachbarten Steinen ausgeübten Reactionen angesehen werden müssen. Für den Angriffspunkt dieser Horizontalkräfte nimmt Schöffler entsprechend dem Princip des kleinsten Widerstandes die oberste Kante jedes Wölbesteines an, also  $A_2$  für die Horizontalkraft  $H_1$  des obersten Steines  $A_2F_1', F_1$  für die Horizontalkraft  $H_2$  des folgenden Steines  $F_1F_2'$  u. s. w., wogegen Andere \*) den Schwerpunkt der Querschnittsfläche eines Wölbesteines als Angriffspunkt

\*) S. Föppel, Theorie der Gewölbe.

der Horizontalkraft annehmen. Diese letztere Annahme soll auch hier gemacht und daher vorausgesetzt werden, daß  $H_1$  im Schwerpunkte  $o_1$  von  $A_2F_1', H_2$  im Schwerpunkte  $o_2$  von  $F_1F_2'$  angreife u. s. f.

Um nun die Horizontalkräfte selbst zu bestimmen, muß in Bezug der zugehörigen Stütze eine entsprechende Annahme gemacht werden. Es ist nämlich hier wie bei den Tonnengewölben leicht ersichtlich, daß es in einem stabilen Kuppelgewölbe eine unendlich große Anzahl von möglichen Stützegeben wird, welche sich von einander durch die Größe des Horizontaldruckes unterscheiden. Welche von diesen möglichen Stützegeben die wirkliche ist, wird, wie schon bei den Tonnengewölben angeführt wurde, sich nur angeben lassen, wenn die Elasticitätsverhältnisse der Gewölbe genügend untersucht sein werden. Man wird daher auch hier die Untersuchung derartig führen können, daß man prüft, ob innerhalb des Kerns eine Stützegeben möglich ist, und wird ebenso, wie bei den Tonnengewölben gezeigt wurde, die möglich größte Sicherheit erlangen, wenn das Gewölbe so geformt und belastet ist, daß die Mittellinie des Gewölbes eine mögliche Stützegeben wird, womit auch hier wiederum von vornherein noch nicht gesagt ist, daß diese mögliche Stützegeben auch unter allen Umständen die wirkliche sei. Mit Rücksicht hierauf soll denn untersucht werden, unter welchen Verhältnissen diejenige Linie  $a f_1 f_2 f_3 \dots b$  zu einer Stützegeben des Gewölbes wird, welche die Mitten der Lagerfugen enthält.

Nunmehr ist die Aufgabe leicht zu lösen, denn da die Stützegeben  $W_1$  für die Fuge  $F_1F_1'$  durch deren Mitte  $f_1$  gehen soll, und die beiden Componenten derselben  $Q_1$  und  $H_1$  sich in  $n_1$  schneiden, so giebt  $n_1 f_1$  die Richtung von  $W_1$  an, und man erhält im Kräftepolygone, wenn man durch  $o$  eine Parallele  $ow_1$  mit  $n_1 f_1$  zieht, in  $ow_1$  die Stützegeben  $W_1$  für die erste Fuge  $F_1$  und in  $q_1 w_1$  die den obersten Stein  $A_1F_1$  in  $o_1$  ergreifende Horizontalkraft  $H_1$ . Die in  $f_1$  angreifende Stützegeben  $W_1 = ow_1$  muß nun mit  $Q_2 = q_1 q_2$  und der noch unbekannten Horizontalkraft  $H_2$ , welche in  $o_2$  angreift, zusammen eine Resultirende ergeben, welche durch den Mittelpunkt  $f_2$  von  $F_2F_2'$  geht. Um aus dieser Bedingung die gesuchte Horizontalkraft  $H_2$  zu finden, setzt man zunächst  $W_1$  mit  $Q_2$  zu einer Mittelkraft zusammen, welche die Richtung  $ow_1'$  im Kräfteplane hat, und durch den Punkt  $s_2$  hindurchgeht, in welchem die Kraft  $Q_2$  von der Richtung  $n_1 f_1$  der Stützegeben  $W_1$  geschnitten wird (s. auch die in größerem Maßstabe gezeichnete Figur III). Legt man daher durch diesen Schnittpunkt  $s_2$  eine Parallele zu  $ow_1'$ , so erhält man in deren Schnittpunkte  $n_2$  mit der Richtung von  $H_2$  einen Punkt, durch welchen die Stützegeben  $W_2$  geht, welche die Fuge  $F_2$  in deren Mitte  $f_2$  treffen soll. Man hat daher nur noch  $n_2 f_2$  zu ziehen und damit eine Parallele durch  $o$  im Kräfteplane zu zeichnen, welche in  $ow_2$  die Stützegeben  $W_2$  und in  $q_2 w_2$  die Summe  $H_1 + H_2$ , also in

$w_1'w_2$  die Horizontalkraft  $H_2$  liefert. Führt man in dieser Weise in der Construction fort, indem man jede gefundene Stützkraft  $W$  zunächst mit dem Gewichte  $Q$  des folgenden Gewölbsteines zu einer Mittellkraft und diese mit der Horizontalkraft dieses Steines zu einer Resultirenden zusammensetzt, welche die Mitte der nächsten Fuge trifft, so erhält man, der Stützlinie  $a f_1 f_2 f_3 \dots b$  entsprechend, den Kräfteplan  $o w_1 w_2 w_3 \dots w_7 q_7$ , in welchem die von  $o$  aus nach den Eckpunkten  $w$  gezogenen Strahlen die betreffenden Stützkkräfte für die Fugen der Richtung und Größe nach darstellen. Desgleichen giebt der horizontale Abstand  $wq$  irgend eines Punktes  $w$  von der durch  $o$  gehenden Verticallinie die gesamte Horizontalkraft  $H$  an, welche auf den oberhalb der zugehörigen Fuge gelegenen Theil des Gewölbes wirkt. Man ersieht hieraus, daß die Horizontalkraft für den Punkt  $w_4$  entsprechend der Fuge  $F_4$  ein Maximum ist, und daß daher, wenn die Stützlinie den hier vorausgesetzten Verlauf  $f_4 f_5 f_6 b$  wirklich annehmen soll, auf die unterhalb  $F_4 F_4'$  gelegenen Gewölbtheile negative, d. h. nach innen gerichtete Horizontalkräfte wirken müssen. Hiernach müßte auf den Gewölbtheil  $F_4 F_5'$  eine Kraft  $H_5 = w_5'w_5$ , auf den Theil  $F_5 F_6'$  eine Kraft  $H_6 = w_6'w_6$  und auf den untersten Theil  $F_6 B_1$  eine Kraft  $H_7 = w_7'w_7$  wirksam sein. Dieses Verhalten stimmt mit dem oben durch die Rechnung gefundenen überein, und man erkennt, daß, um die Stützlinie wirklich auch unterhalb  $f_4$  in die Mittellinie zu bringen, die betreffenden negativen Pressungen  $H_5, H_6, H_7$  durch die Zugspannungen eines eisernen Ringes oder mehrerer solcher erzeugt werden müßten. Bezeichnet man diese gesammte negative Horizontalkraft  $H_5 + H_6 + H_7 = (w_5)w_7$  mit  $H_0$ , so ergibt sich die absolute Spannung  $P$  im Umfange des Ringes nach Gleichung (1) durch

$$P = \frac{H_0}{\omega},$$

wenn  $\omega = \frac{2\pi}{n}$  den kleinen Mittelpunktswinkel des der Construction zu Grunde gelegten Gewölbstreifens bedeutet. Aus  $P$  würde man den erforderlichen Querschnitt  $F$  dieses Ringes einfach durch  $F = \frac{P}{s}$  erhalten, wenn  $s$  die zulässige Materialspannung des Schmiedeeisens pro Quadratinheit bedeutet.

Wenn die Anwendung eines eisernen Ringes nicht stattfinden soll, so muß man, da der Mörtel Zugspannungen nicht aufnehmen kann, voraussetzen, daß der Horizontaldruck von der Fuge  $F_4$ , in welcher  $H$  seinen größten Werth  $q_4 w_4$  erreicht, diesen größten Werth auch unterhalb  $F_4$  überall beibehält, indem die Stoßfugen unterhalb  $F_4$  sich öffnen. Man erhält dann mit Hülfe des Kräfteplans  $o w_1 w_2 w_3 w_4 (w_5)$  die Stützlinie  $a f_1 f_2 f_3 f_4 f_5' f_6' f_7'$ ,

welche sich bei  $f_4$  von der Mittellinie nach außen entfernt, und man hat zu prüfen, ob dieser Zweig der Stützlinie überall noch innerhalb des Kerns verbleibt. Sollte dies nicht der Fall sein, die Stützlinie vielmehr über  $B_2$  die äußere Kerngrenze des Gewölbes durchsetzen, so könnte man eine neue Stützlinie zeichnen, indem man den Angriffspunkt in der obersten Fuge  $F_1$  so tief senkt, daß daselbst die Stützlinie bis in die innere Kerngrenze hineinrückt. Dieser neuen Stützlinie entspricht, wie aus der dann steileren Richtung von  $n_1 f_1$  ersichtlich ist, ein geringerer Horizontalschub, demzufolge der untere Theil der Stützlinie bei  $B_2$  mehr nach innen gerückt wird. Sollte daselbst die Stützlinie trotzdem noch die äußere Kerngrenze schneiden, so gäbe es überhaupt für die Kuppel keine Stabilität und man hätte die Form und Gewölbstärke bezw. die Belastung zu ändern.

Was die Prüfung der Kuppel gegen Gleiten anbetrifft, so hat man nur zu bemerken, daß die Strahlen  $ow$  des Kräfteplans die Richtungen der resultirenden Stützkkräfte angeben, so daß man sich in einfacher Art überzeugen kann, wie groß die Winkel dieser Strahlen gegen die Normalen der Fugen sind, und man würde nöthigenfalls durch geänderte Fugenrichtung einem zu befürchtenden Gleiten vorbeugen können.

Die Strahlen  $ow$  geben durch ihre Längen, welche die Größe der Stützkkräfte darstellen, ebenfalls für jede Lagerfuge  $FF'$  ein Maß für die Pressung, wenn man die Kraft  $W$  durch den Flächeninhalt der bezüglichen Lagerfuge dividirt. Hierbei muß aber noch bemerkt werden, daß, während in den unterhalb  $F_4$  gelegenen Fugen die aus der Stützkraft  $W$  hervorgehende Pressung die einzige Anstrengung des Materials ist, in den darüber gelegenen Gewölbtheilen noch die zu den Stoßfugen normale Pressung  $P$  hinzukommt. Diese Pressung wird besonders nach dem Scheitel der Kuppel hin groß ausfallen und hat z. B. für den Wölbstein  $A_1 A_2 F_1 F_1'$  nach Gleichung (1) für jede Seitenfläche den Werth

$$P_1 = \frac{H_1}{\omega},$$

worin  $H_1 = q_1 w_1$  den Horizontaldruck dieses Steines und  $\omega = \frac{2\pi}{n}$  den Mittelpunktswinkel desselben bedeutet. Bei der Bestimmung der mit Rücksicht auf die Festigkeit erforderlichen Gewölbstärke ist hierauf besondere Rücksicht zu nehmen.

In welcher Weise der weitere Verlauf der Stützlinie unterhalb der Kämpferfuge  $B_1 B_2$  im Widerlager bestimmt werden kann, ist aus dem Früheren deutlich und bedarf hier keiner Wiederholung.

**Schiefe Gewölbe.** Bei den bisher betrachteten cylindrischen oder §. 31. Tonnengewölben war immer stillschweigend vorausgesetzt, daß die Stirn-



flächen senkrecht zu der Ase und den mit der Ase parallelen Widerlagern des Gewölbes stehen, und daß die Ase selbst eine horizontale Lage habe. Solche Gewölbe heißen gerade oder senkrechte Gewölbe. Es kommen nun in der Ausführung zuweilen Abweichungen hiervon vor, sei es nämlich, daß die Gewölbare und die Widerlager gegen den Horizont geneigt sind, wie dies z. B. bei den Unterwölbungen von Treppen und bei den Decken von ansteigenden Rauchcanälen der Fall ist, oder sei es, daß die Ase zwar horizontal aber gegen die Gewölbstirnen schräg gerichtet ist. Der letztere Fall ist von besonderer Wichtigkeit für die Eisenbahnbrücken, bei denen gar häufig die Richtung der Bahn unter schiefen Winkeln die Richtung eines Flußlaufes oder einer anderen darunter befindlichen Bahn oder Straße kreuzen muß. Die hierzu dienenden Gewölbe nennt man schiefe Gewölbe. Es ist zunächst ersichtlich, daß es in Betreff der in einem Gewölbe vorkommenden Kräfte einen Unterschied nicht begründet, ob das Gewölbe ein gerades oder schiefes ist. Insbesondere erkennt man, daß bei jedem Gewölbe die Stützlinie für irgend welche Stelle immer in einer verticalen Ebene liegen muß, welche Ebene bei den bisher betrachteten geraden Gewölben zur Ase senkrecht steht, während sie gegen die Ase schiefer Gewölbe geneigt ist. Für diese Stützlinien schiefer Gewölbe müssen auch genau dieselben Bemerkungen gelten, welche im Vorstehenden hinsichtlich der geraden Tonnengewölbe gemacht werden konnten. Der Unterschied zwischen beiden Gewölbarten beruht vielmehr nur in der Ausführung bezw. in der Form, welche man den einzelnen Wölbsteinen zu geben hat, damit dieselben die auf sie wirkenden Kräfte in geeigneter Art aufnehmen können. Um diesen Unterschied klar zu machen, seien, Fig. 101 und Fig. 102,  $AA_1$  die horizontalen Azen, sowie  $BB_1$  und  $CC_1$  die gleichfalls horizontalen Widerlager zweier Tonnen-

Fig. 101.

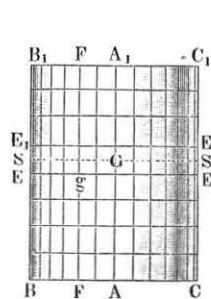
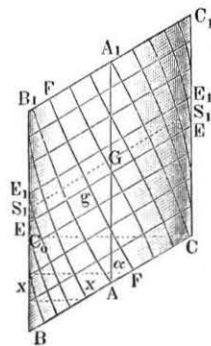


Fig. 102.



gewölbe, deren Stirnflächen  $BC$  und  $B_1C_1$  in Fig. 101 senkrecht zur Ase, dagegen in Fig. 102 unter einem schiefen Winkel  $A_1AC = \alpha$  gegen die

Ase geneigt sein sollen. Denkt man sich für jedes der beiden Gewölbe durch irgend einen Punkt  $G$  des Scheitels eine Stützlinie gezeichnet, so liegt dieselbe in einer durch  $G$  gelegten Verticalebene  $SS_1$ , welche mit den Stirnflächen parallel ist, also die Ase  $AA_1$  in Fig. 101 ebenfalls senkrecht, dagegen in Fig. 102 unter dem Winkel  $\alpha$  schneidet. Wenn daher das Gewölbe, wie es in der Praxis immer geschieht, aus einzelnen Bögen wie  $EE_1$  gebildet wird, so werden die Trennungsfächen  $EE$  und  $E_1E_1$  dieser Bögen oder die sogenannten Stoßfugenflächen ebenfalls den Stirnen parallel sein müssen, denn es ist leicht zu erkennen, daß man in Fig. 102 die einzelnen Bögen nicht senkrecht zu den Widerlagern  $BB_1$  und  $CC_1$  anordnen kann, da alsdann die in  $BC_0$  sich ansetzenden Bögen wie  $xx$  auf der anderen Seite  $C$  kein Widerlager finden würden.

Die einzelnen Steine eines jeden solchen bogenförmigen Gewölbtheiles wie  $EE_1$  hat man nun mit solchen Flächen, den sogenannten Lagerflächen gegen einander zu stützen, daß sie den Druckkräften in geeigneter Weise widerstehen, und es ist in dem Vorstehenden mehrfach darauf hingewiesen, daß diese Flächen von der Richtung der auf sie wirkenden Mittelkraft an keiner Stelle um den Reibungswinkel abweichen dürfen. Am vorteilhaftesten wäre es für die Uebertragung der Druckkräfte, wenn die Lagerflächen überall senkrecht auf der Richtung der Stützkräfte stehen könnten. Mit Rücksicht auf die bequemere Darstellung der Gewölbe pflegt man aber die Wölbsteine thünlichst mit rechtwinkligen Kanten zu versehen. Zu dem Ende führt man die Lagerflächen der Steine, d. h. diejenigen Flächen, welche den Stützdruck  $W$  aufzunehmen haben, so aus, daß sie überall senkrecht auf denjenigen Linien stehen, in welchen die innere Wölbfläche von den verticalen Ebenen der Stützlinien geschnitten wird. Denkt man sich dementsprechend sämtliche Stoßfugen  $EE$  des Gewölbes, d. h. die Schnittlinien, in welchen die innere Wölbfläche von den Begrenzungsflächen der einzelnen Gewölbringungen getroffen wird, und zeichnet zu diesen Stoßfugen ein System von ebenfalls in der inneren Wölbfläche liegenden Transversalen  $FF$ , welche die Stoßfugen überall rechtwinklig schneiden (sogenannte orthogonale Trajectorien), so bilden diese Linien  $FF$  die Lagerfugen des Gewölbes, d. h. die Schnittlinien, in welchen die Lagerflächen der einzelnen Wölbsteine die innere Leibung treffen. Um die Lagerflächen selbst und damit die Form der Wölbsteine zu bestimmen, kann man sich etwa vorstellen, jede Lagerfläche werde erzeugt durch solche Bewegung einer geraden Erzeugenden, entlang einer der gedachten Lagerfugen  $FF$ , daß sie überall nicht nur auf diesen, sondern auch in jedem Punkte wie  $g$  auf der durch  $g$  gedachten Stoßfuge  $E$  senkrecht steht. Die so gedachten Lagerflächen werden zwar im Allgemeinen nicht genau senkrecht auf den einzelnen Stützlinien des Gewölbes stehen, doch wird die Abweichung von der zu letzteren senkrechten Richtung immer nur

unerheblich sein, da nach dem Vorhergehenden die Stützlinie und auch die mit dieser nahe übereinstimmende Richtung der Stützkraft von der inneren Gewölbbegrenzung nur unwesentlich abweichen wird. Jedenfalls wird die Abweichung der beiden Richtungen immer weit unter dem Reibungswinkel zwischen den Wölbsteinen verbleiben.

Es ist nun leicht ersichtlich, daß unter dieser vorgedachten Voraussetzung die Lagerfugen  $F$  bei einem geraden Gewölbe, Fig. 101, horizontale und zur Aze parallele gerade Linien werden müssen, wenn sie auf allen Stoßfugen  $EE$  senkrecht sein sollen, während bei dem schiefen Gewölbe, Fig. 102, die Stoßfugen  $FF$  gekrümmte, in der Wölbfläche, also nicht in einer Horizontalebene, liegende Curven sind.

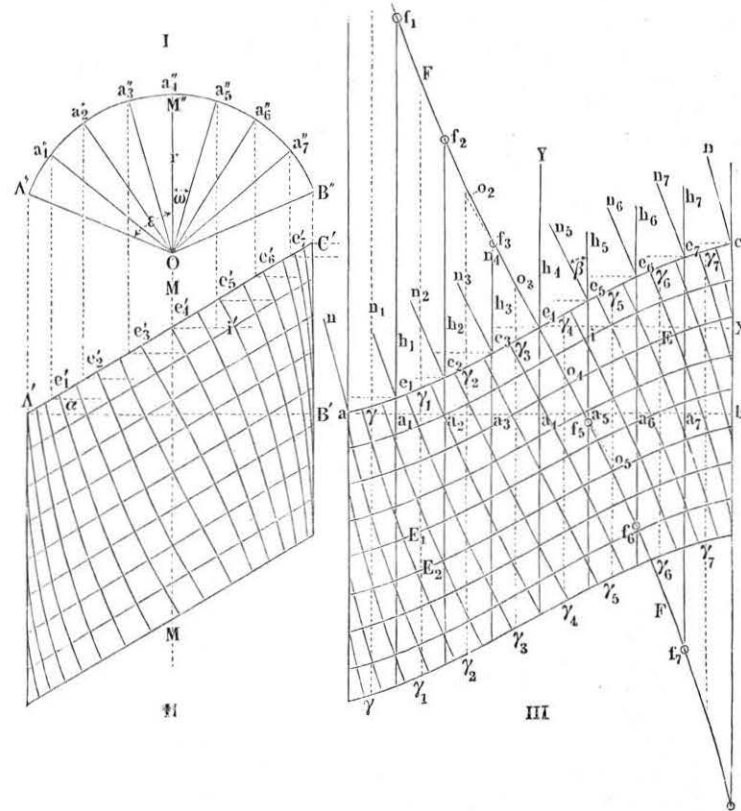
Diese Eigenschaft pflegt man daher auch wohl als das unterscheidende Merkmal zwischen geraden und schiefen Gewölben\*) anzuführen, indem man alle diejenigen Gewölbe zu den geraden rechnet, deren Lagerfugen horizontale gerade oder gekrümmte Linien sind, während alle Gewölbe schiefe genannt werden, welche sich mit horizontalen Lagerfugen nicht ausführen lassen. Danach hat man nicht nur alle Tonnengewölbe mit horizontaler Aze und dazu senkrechten Stirnen, sondern auch alle als Umdrehungskörper mit verticaler Aze (Kuppelgewölbe) ausgeführten Gewölbe zu den geraden zu rechnen, da bei den letzteren die zu den Stoßfugen oder Meridiananschnitten senkrechten Lagerfugen durch horizontale Kreise gegeben sind. Zu den schiefen Gewölben gehören hiernach insbesondere alle Tonnengewölbe, deren Stirnen nicht senkrecht zu der Gewölbaze stehen, also nicht nur die in Fig. 102 dargestellten horizontalen, sondern auch alle steigenden Gewölbe, denn auch bei den letzteren ist, wie leicht zu ersehen ist, keine horizontale Lagerfuge denkbar, welche überall auf den Stoßfugen, d. h. den Schnitten des Gewölbes mit verticalen Querebenen senkrecht ist.

Es kann hier bemerkt werden, daß die Stoßfugen gerader Gewölbe zu den aus der Geometrie bekannten sogenannten Linien des größten Falles gehören, welche sich in der Wölbfläche angeben lassen, da beide Arten von Linien die Eigenschaft gemein haben, in jedem ihrer Punkte senkrecht auf der durch denselben Punkt gehenden horizontalen Tangente der Wölbfläche zu stehen. Mit Rücksicht hierauf kann man auch den Satz aussprechen, daß nur solche Wölbflächen sich zur Herstellung gerader Gewölbe eignen, für welche die Curven größten Falles in verticalen Ebenen liegen.

Um nun für ein gegebenes schiefes Gewölbe die Lagerflächen festzustellen, hat man auf der abgewickelten inneren Wölbbleibung die Lagerfugen zu entwerfen, welche alsdann die Form der Lagerflächen zweifellos feststellen, da

\*) E. Heider, Theorie der schiefen Gewölbe. Wien 1846.

letztere nach dem Vorhergehenden durch Bewegung einer zur inneren Wölbfläche senkrechten Geraden auf diesen Lagerfugen entstanden gedacht werden können. Um die Lagerfugen zu zeichnen, sei  $A''B''$ , Fig. 103, der zur Aze  $MM$  senkrechte Durchschnitt der inneren Leibung eines schiefen Tonnengewölbes, Fig. 103.



gewölbes, dessen Stirnfläche  $A'C'$  mit dem zur Aze  $MM$  senkrechten Querschnitte  $A'B'$  den Winkel  $\alpha$  bilden möge. Um zunächst die innere cylindrische Wölbfläche abzuwickeln, hat man nur nöthig, die krumme Schnittlinie  $A''M''B''$  durch  $a_1''a_2''a_3'' \dots$  in eine nicht zu kleine Anzahl gleicher oder ungleicher Theile zu theilen, deren Bogenlängen man auf  $ab$  (in III.) zu bezw.  $aa_1, a_1a_2, a_2a_3 \dots$  abträgt, so daß  $ab$  gleich der gerade gestreckten Profilinie  $A''M''B''$  wird. Zieht man nun durch die Theilpunkte  $a_1''a_2''a_3'' \dots$  die Verticalen bis zum Durchschnitte mit der Projection

$A'C'$  der Stirnfläche und durch die so erhaltenen Schnittpunkte  $e_1'e_2'e_3' \dots$  horizontale Gerade, so erhält man in bekannter Art in den Durchschnitten der letzteren mit den Verticalen durch  $a_1a_2a_3 \dots$  eine Anzahl von Punkten  $a, e_1, e_2 \dots e$ , durch welche die Form der abgewinkelten Stoßfugen gegeben ist. Man kann daher leicht mit dieser Linie parallel die einzelnen Stoßfugen  $E$  in der Abwicklung zeichnen, indem man den axialen Abstand dieser einzelnen Linien gleich der ebenfalls in der Avenrichtung gemessenen Dimension der einzelnen Bogenringe macht, aus denen das Gewölbe zusammengesetzt ist.

Nunmehr hat man die Lagerfugen so zu zeichnen, daß dieselben überall mit den abgewinkelten Stoßfugen  $E$  sich rechtwinkelig kreuzen. Um dies zu thun, zeichne man zunächst in möglichst vielen Punkten der abgewinkelten Stoßfuge  $a e_1 e_2 e_3 \dots e$  die Normalen  $a n, e_1 n_1, e_2 n_2 \dots e n$ . Mit Hilfe dieser Richtungen ist es dann leicht, irgend eine Lagerfuge, z. B. die durch  $e_4$  gehende  $F$  zu zeichnen. Halbt man zu dem Zwecke nämlich die verticalen Streifen  $a a_1, a_1 a_2, a_2 a_3 \dots$  durch die punktirten Geraden  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \dots$ , zieht dann durch den Durchschnitt  $o_4$  der Normale  $e_4 n_4$  mit  $\gamma_4$  eine Parallele zu  $e_5 n_5$  bis zum Durchschnitte  $o_5$  mit der Halbierungslinie  $\gamma_5$ , so erhält man in dem Durchschnitte dieser Parallelen mit der Verticalen  $e_5 a_5$  einen Punkt  $f_5$  der gesuchten Lagerfuge. Ebenso liefert die durch den Schnitt  $o_3$  der Normalen  $e_4 n_4$  und der Halbierungslinie  $\gamma_3$  mit  $e_3 n_3$  gezogene Parallele  $o_3 o_2$  in dem Durchschnitte  $f_3$  mit  $e_3 a_3$  einen Punkt der Lagerfuge  $F$  auf der anderen Seite von  $E$ . In gleicher Art verfährt man weiter, indem man durch  $o_5$  und  $o_2$  Parallellinien mit  $e_6 n_6$  und bezw.  $e_2 n_2$  legt, um in  $e_6 a_6$  den Punkt  $f_6$  und in  $e_2 a_2$  denjenigen  $f_2$  für die Lagerfuge  $F$  zu erhalten. Die Richtigkeit der Construction folgt leicht aus der Bemerkung, daß eine durch  $f_1 f_2 f_3 \dots$  gelegte Curve in irgend einem Punkte, z. B.  $f_5$  eine Tangente hat, welche parallel zu  $e_5 n_5$ , also senkrecht zu der durch  $f_5$  gehenden Stoßfuge gerichtet ist.

Es ist ohne Weiteres klar, daß alle übrigen Lagerfugen mit der gezeichneten  $f_1 f_2 f_3 \dots$  übereinstimmen und für beliebige Punkte wie  $e_1 e_2 e_3 \dots$  gezeichnet werden können, auch ist eine Uebertragung der Lagerfugen in den Grundriß II leicht nach den bekannten Regeln der beschreibenden Geometrie ausführbar. Der abgewinkelten Zeichnung in III kann man sich bedienen, um für die einzelnen Wölbsteine die richtige Form festzustellen. Man erkennt aus der Figur, daß die verschiedenen zwischen zwei Stoßfugen wie  $E_1 E_2$  gelegenen Wölbsteine sämmtlich in ihrer Form von einander abweichen, während alle in gleicher Höhe liegenden Wölbsteine mit einander übereinstimmen.

Wie sich aus der Figur III ergibt, bilden die in den einzelnen Punkten  $e_1 e_2 e_3 \dots$  auf der Stoßfuge  $E$  senkrechten Richtungen  $e n$  mit den Hori-

zontalen  $eh$  durch diese Punkte verschieden große Winkel  $\beta$ . Während im Scheitel  $e_4$  die Lagerfuge denselben Winkel  $n_4 e_4 h_4 = \alpha$  mit der Horizontalen  $e_4 h_4$  bildet, unter welchem die Stirnfläche  $A'C'$  des Gewölbes gegen dessen senkrechten Querschnitt  $A'B'$  gerichtet ist, so wird der Winkel der Lagerfugen gegen die horizontale Avenrichtung um so kleiner, je näher der Punkt  $e$  nach den Widerlagern  $a$  und  $e$  hin gelegen ist. Dieser Winkel fällt für die Kämpfer gleich Null, die Richtung der Lagerfugen also axial aus, wenn der zur Ase senkrechte Querschnitt  $A''B''$  des Gewölbes bei  $A''$  und  $B''$  verticale Tangenten hat, wenn also etwa dieser Querschnitt ein Halbkreis oder eine halbe Ellipse mit den Scheiteln in  $A''$  und  $B''$  ist. Bezeichnet man allgemein mit  $\beta$  den Winkel, um welchen die Lagerfuge in irgend einem Punkte in der abgewinkelten Figur III von der Avenrichtung abweicht, also z. B. für den Punkt  $e_5$  den Winkel  $n_5 e_5 h_5$ , so läßt sich dieser Winkel durch Rechnung wie folgt bestimmen. Offenbar ist dieser Winkel  $\beta$  für jeden Punkt der Stoßfuge  $a e_1 e_2 \dots e$  gleich dem Winkel, welchen die Tangente der letzteren mit der zur Avenrichtung Senkrechten  $ab$  bildet. Bezieht man nun die abgewinkelte Stoßfuge auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem, dessen  $X$ -Axe die Gewölbaxe  $e_4 h_4$  ist, und dessen Anfangspunkt  $e_4$  sein soll, so läßt sich die Gleichung der Linie  $a e_4 e$  bestimmen, sobald die Gestalt des normalen Gewölbquerschnittes  $A''M''B''$  bekannt ist. Es möge der Einfachheit halber hier der in der Praxis sehr häufige Fall vorausgesetzt werden, daß  $A''M''B''$  ein Kreisbogen vom Halbmesser  $r$  und dem halben Centralkwinkel  $M''OB'' = \varepsilon$  sei, dann hat man nach der Construction in III für irgend einen Punkt wie  $e_5$  der Stoßfuge

$$x = a_4 a_5 = \text{arc } a_4'' a_5'' = r \omega \dots \dots \dots (1)$$

unter  $\omega$  den Bogenabstand des Punktes  $a_5''$  von dem Scheitel  $M''$  verstanden. Ferner hat man für denselben Punkt  $e_5$  nach der Construction:

$$y = e_5 i = e_5' i_1' = r \sin \omega \tan \alpha \dots \dots \dots (2)$$

Aus (1) und (2) folgt durch Differentiation

$$\partial x = r \partial \omega$$

und

$$\partial y = r \tan \alpha \cos \omega \partial \omega,$$

und daher durch Division

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tan \alpha \cos \omega.$$

Da nun aber  $\frac{\partial y}{\partial x}$  die Tangente des Neigungswinkels der Curve in  $e_5$  gegen die  $X$ -Axe ist, und dieser Neigungswinkel nach dem oben Gesagten gleich dem Winkel  $\beta$  sein muß, so hat man auch

$$\tan \beta = \tan \alpha \cos \omega \dots \dots \dots (3)$$



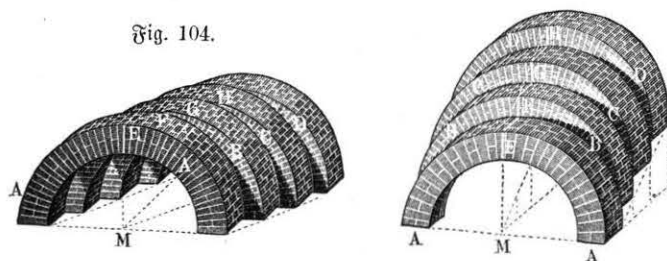
Diese Gleichung kann dazu dienen, die Richtung der Curvennormale für jeden Punkt der abgewinkelten Stoßfuge  $a e_1 e_2 e_3 \dots c$  zu berechnen, wenn die graphische Ermittlung aus der Zeichnung nicht genügende Schärfe ergeben sollte. Die Gleichung (3) zeigt übrigens entsprechend dem oben Angeführten, daß für den Scheitel, also für  $\omega = 0$ ,  $\beta = \alpha$  wird, während für die Kämpfer halbkreisförmig geformter Gewölbe oder für  $\omega = 90^\circ$ ,  $\beta = 0$  wird, d. h. die Lagerfugen laufen daselbst horizontal.

Wenn der normale Querschnitt  $A''M''B''$  des Gewölbes nicht nach einem Kreisbogen, sondern nach dem Bogen einer Ellipse von der horizontalen Halbachse  $a$  und der verticalen Halbachse  $b$  gebildet wäre, so würde die Rechnung in ganz ähnlicher Weise wie oben zu der Gleichung führen

$$\tan \beta = \tan \alpha \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \omega}} \dots \dots \dots (3^a)$$

Wegen der praktischen Schwierigkeiten, welche die Bearbeitung der einzelnen Wölbleine genau nach der hier ermittelten Form darbietet, pflegt man oft in der Ausführung sich mit einer Annäherung zu begnügen, derart nämlich, daß man die Lagerfugen nicht unter variablen Neigungswinkeln, sondern sämmtlich unter einem constanten Neigungswinkel  $\beta_0$  gegen die Ase annimmt. Für diesen Winkel  $\beta_0$  pflegt man dann einen mittleren Werth zwischen der Abweichung  $\beta = \alpha$  im Scheitel und der Abweichung in den Kämpfern zu wählen. Hierbei ist indessen darauf zu achten, daß die hiermit verbundene Abweichung der Stützkraft von der Normalen zur Lagerfläche in keinem Punkte einen mit der Stabilität gegen Gleiten unverträglich hohen Werth annehme. Nach Heider soll man diese Abweichung nicht größer als  $5^\circ$  nach jeder Seite annehmen, und erforderlichenfalls bei sehr großer Veränderlichkeit von  $\beta$ , d. h. bei einem großen Centrivinkel  $2\varepsilon$  des Gewölbes,

Fig. 105.



jede Gewölbehälfte zwischen dem Scheitel und einem Kämpfer in zwei oder mehrere Sectionen zerlegen, von denen jede einzelne mit ihrem besonderen mittleren Abweichungswinkel  $\beta$  für die in diesem Theile constante Fugenrichtung ausgeführt wird.

In Fällen, wo es nicht wesentlich darauf ankommt, daß die Wölbleibungen stetig fortlaufende Flächen seien, kann man schiefe Gewölbe auch aus einer größeren Anzahl von geraden Bögen zusammensetzen, welche derartig gegen einander horizontal, Fig. 104, oder vertical, Fig. 105, versetzt sind, daß die ganze Construction ein horizontales schräges (Fig. 104) oder ein ansteigendes (Fig. 105) Gewölbe ersetzt. Die Ausführung ist dann von derjenigen der gewöhnlichen geraden Gewölbe nicht verschieden. Wenn man ferner zuweilen ansteigende, z. B. die sogenannten Kellerhalsgewölbe oder die unter Treppen befindlichen, so ausführt, daß die einzelnen das Gewölbe zusammensetzenden Ringe senkrecht zur geneigten Ase, also nicht durch verticale Stoßfugenflächen begrenzt sind, so muß man, wie leicht ersichtlich ist, den unter solchen Umständen auftretenden Schub

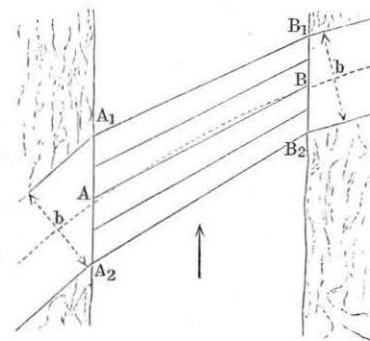
nach der Richtung der Ase durch kräftige Gurt- oder Streb Bögen aufnehmen.

Wenn, wie dies zuweilen bei Eisenbahnüberführungen wohl vorkommt, eine schiefe Brücke  $A_1 B_1 B_2 A_2$ , Fig. 106, in einer Curve der Bahnlinie  $AB$  angeordnet werden muß, so werden die parallelen Widerlager  $A_1 A_2$  und  $B_1 B_2$  bei constanter Normalbreite  $b$  der Bahn verschiedene Länge erhalten, und daher die einzelnen Verticalebenen für die Stütz-

linien oder Stoßfugen  $A_1 B_1$ ,  $A_2 B_2$ ,  $AB \dots$  nicht mehr parallel bleiben. Ein weiteres Eingehen auf diese und ähnliche Fälle würde hier zu weit führen und muß daher auf die Lehrbücher über Brückenbau und Bauconstructionslehre verwiesen werden.

**Gewölbte Brücken.** Die Gewölbe finden ihre vornehmste Anwendung zur Herstellung der Brücken, d. h. zur Ueberführung von Straßen, Eisenbahnen oder Canälen über Flüsse oder andere Straßen. Alle diese Brücken werden in der Regel aus Bögen von der Form der Tonnengewölbe gebildet. Die Spannweite der Bögen ist selbstverständlich je nach den Verhältnissen sehr verschieden. Während die sogenannten Durchlässe unter Eisenbahnen, ihrem Zwecke der Abführung von atmosphärischen Niederschlägen entsprechend, oft nur Spannweiten unter 1 m erhalten, richtet sich die Spannweite der Gewölbe bei den Unter- und Ueberführungen von

Fig. 106.



Wegen beim Eisenbahnbau nach der Breite der zu überbrückenden Straße oder Eisenbahn. Bei den Brücken über Flüsse und Ströme sind außer der zu überbrückenden Länge besonders noch die dem Wasserlaufe eigenthümlichen Verhältnisse zu berücksichtigen. Hat das Wasser eine große Geschwindigkeit und ist es starken Anschwellungen unterworfen, so wendet man Bögen mit großer Spannweite an, um das Wasserbett möglichst wenig zu verengen und dadurch das Austreten des Hochwassers aus dem Bette einzuschränken, sowie die zerstörenden Wirkungen des Hochwassers und der von demselben zu geführten Körper, z. B. Eisschollen, auf die Brückenpfeiler zu schwächen. Fließt hingegen der Fluß langsam und hat derselbe keine bedeutenden Hochwasser, so kann man die Brücke über demselben aus einer größeren Anzahl engerer Bögen zusammensetzen. Die Spannweite der gewöhnlichen Brückenbögen beträgt 15 bis 50 m; am größten ist sie bei der Cabin-John-Brücke bei Washington, wo sie 69,5 m und bei der Grosvenor-Brücke über den Dee bei Chester, wo sie 61 m mißt. Die Brückenhöhe richtet sich ebenfalls nach dem Hochwasser; jedenfalls müssen selbst bei dem höchsten Wasserstande die Scheitel der Brückenbögen noch um eine ansehnliche Höhe über, und die Seiten derselben nicht oder nur wenig unter der Oberfläche des Wassers stehen, damit fremde Körper, welche auf dem Wasser schwimmen, wie z. B. Eisschollen, ungehindert durch die Brücke hindurch gelangen können, und auch die Stauung des Wassers nicht zu groß ausfällt. In vielen Fällen, namentlich bei Eisenbahnen und Canälen, liegen die Punkte, welche durch eine Brücke (Viaduct, Aquaduct) zu verbinden sind, so hoch über der Thalsohle, daß die Brückenbögen schon ohnedies viel über das Hochwasser zu stehen kommen. Die gewöhnlichen Fahrbrücken über Flüsse haben eine Höhe von 10 bis 30 m; die Eisenbahnbrücken und Aquaducte erreichen aber Höhen von 50 m und mehr. So hat z. B. die Gölzschthalbrücke bei der sächsisch-bayerischen Eisenbahn in vier über einander stehenden Bogenreihen eine Höhe von 80,4 m, und der römische Aquaduct zu Nîmes in Frankreich (Pont du Gard) hat bei drei über einander stehenden Bogenreihen eine Höhe von 48,8 m. Die Bogenhöhe der Brücke richtet sich natürlich nach der Spannweite und Höhe der Brücke überhaupt; bei den gewöhnlichen Fahrbrücken beträgt diese Höhe  $\frac{1}{9}$  bis  $\frac{1}{3}$  der Spannweite; bei hohen Eisenbahnbrücken und Wasserleitungen nimmt man diese Höhe  $\frac{1}{2}$  oder gar  $\frac{2}{3}$  der Spannweite. Was die Breite der Brücken anlangt, so beträgt dieselbe bei gewöhnlichen Fahrbrücken 6 bis 12 m; die neue Brücke über die Elbe bei Dresden, welche für Fuhrwerke, Fußgänger und eine Eisenbahn zugleich dient, besitzt sogar eine Breite von nahezu 18 m.

Die Pfeiler und die Widerlager der Brücken müssen nicht nur auf einem ganz festen Grunde stehen, sondern auch eine hinreichende Dike haben, um dem Drucke der darauf ruhenden Bögen sammt ihrer Belastung wider-

stehen zu können. Der Grund besteht entweder aus festem Felsen, oder aus unzusammendrückbarem Sand, oder aus zusammendrückbarer Erde. Um auf Felsen zu gründen, ist nicht allein die Herstellung ebener Flächen zur Aufnahme des Druckes, sondern auch die Entfernung alles verwitterten und losen Gesteines nöthig. Die Gründung auf Sand, Thon und Erde erfordert hingegen die Herstellung eines Kotes oder eines Bettes aus Beton. Der aus einer Reihe Längenschwellen und einer Reihe aufgekämmerter Querschwellen zusammengesetzte Kott ruht entweder unmittelbar auf dem Stein- oder Sandbette, oder er wird von eingerammten Pfählen getragen, und heißt im ersten Falle ein Schwellen-, im letzteren aber ein Pfahlkott. Bei der Gründung im Wasser ist es nöthig, die Baustelle der Pfeiler durch einen Fangdamm vor dem Eindringen des Wassers zu sichern. Ist die Tiefe des Wassers über 1,2 m, so sind sogenannte Kastendämme nöthig, welche aus zwei Reihen Bohlen oder Spundwänden und zwischengestampftem Letten zusammengesetzt werden.

Die Fundamente der Pfeiler werden aus gehauenen Steinen treppenförmig aufgemauert, so daß die untere Breite derselben dem sechsten bis neunten Theile der Spannweite gleichkommt. Um die Brückenpfeiler gegen den Stoß des Eises und anderer schwimmenden Körper zu schützen, und um die auf das Flußbett nachtheilig wirkende wirbelnde Bewegung des Wassers möglichst zu verhindern, werden die Pfeiler stromauf- und stromabwärts mit prismatischen Ansätzen, den sogenannten Pfeilerköpfen versehen, welchen eine halbkreisförmige oder halbelliptische Basis und eine kegelförmige oder sphäroidische Haube zu geben ist. Die Landfesten oder Widerlagspfeiler sind in der Regel noch mit Flügelmauern versehen, welche zur Unterstützung der Auffahrt dienen. Die Stärke der Pfeiler und Widerlager ist nach der vorausgeschickten Theorie unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß diese Stützmauern nicht allein den constanten Gewölbschub, sondern auch die zufällige und bewegliche Belastung aufzunehmen haben.

Diese zufällige Belastung ist gegen das Eigengewicht der gewölbten Brücken bei einer nicht zu geringen Spannweite nur klein. Man kann dafür etwa folgende Angaben hier anführen. Nach Winkler kann man für dichte Ansammlung von Menschen 5 bis 6 Personen à 70 kg Gewicht, also 350 bis 420 kg auf jeden Quadratmeter Grundfläche rechnen. Ferner ist für Straßenbrücken das Gewicht der größten stark beladenen Frachtwagen von 2,5 m Breite und 3,5 m Axenabstand zu 12 Tonnen, also der Druck eines Rades zu 3 Tonnen anzunehmen, doch kann unter Umständen für sehr schwere Gegenstände (wie z. B. Dampfkessel, Maschinen etc.) der Druck eines Rades auf 5 Tonnen steigen. Für Eisenbahnbrücken kann man den Druck eines Rades für

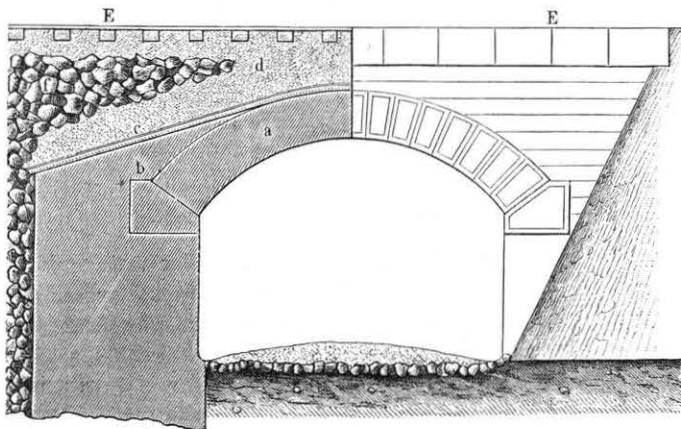
Locomotiven zu 6,5 Tonnen	
Tender „ 4,5 „	
Güterwagen „ 4 „	

in Rechnung bringen, und als ungünstigste Belastung einen Zug von lauter Locomotiven voraussetzen.

Bei Canalbrücken besteht die ganze Belastung immer aus dem Eigengewichte der Construction und des in dem Canale befindlichen Wassers, und es kann an dieser gleichförmigen Vertheilung der Belastung nichts durch die Ueberführung eines Schiffsgesäßes geändert werden, da dasselbe überall ein seinem Gewichte genau gleiches Gewicht Wasser verdrängt. Eine Belastung durch Schnee wird bei gewölbten Brücken gegen die sonstigen Belastungen verschwinden. Die Erschütterungen und Stöße, denen eine Brücke durch passivendes Fuhrwerk ausgesetzt ist, lassen sich nicht gut durch Rechnung feststellen; bei den Ausführungen pflegt man diesen Erschütterungen dadurch Rechnung zu tragen, daß man die zulässige Pressung für das Material des Bauwerkes den jeweiligen Verhältnissen entsprechend geringer annimmt.

In Fig. 107 ist, zur Hälfte im Querschnitt, zur Hälfte in der Ansicht, eine Wegeunterführung von  $5\frac{2}{3}$  m Spannweite dargestellt, wie sie bei der Bremer Bahn zur Ausführung gekommen ist. Das Kreisbogengewölbe *a* ist hier mit der Hintermauerung *b* versehen, welche mit einer Ziegel- und Asphal-

Fig. 107.

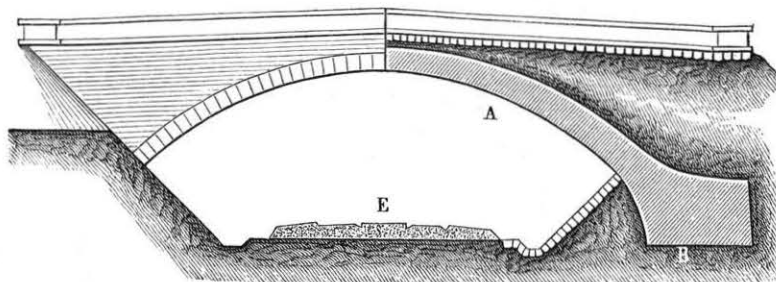


schicht *c* abgedeckt ist. Zum Schutze der letzteren dient zunächst die Kiesel-*d*, auf welcher die Steinpackung *f* ruht. Die Breite der Brücke beträgt, der zweigeleisigen Eisenbahn *EE* entsprechend, 8,1 m.

Gleichfalls im Querschnitt und in der Ansicht zeigt Fig. 108 eine auf französischen Bahnen zur Ausführung gelangte Wegeüberführung über eine zwei-

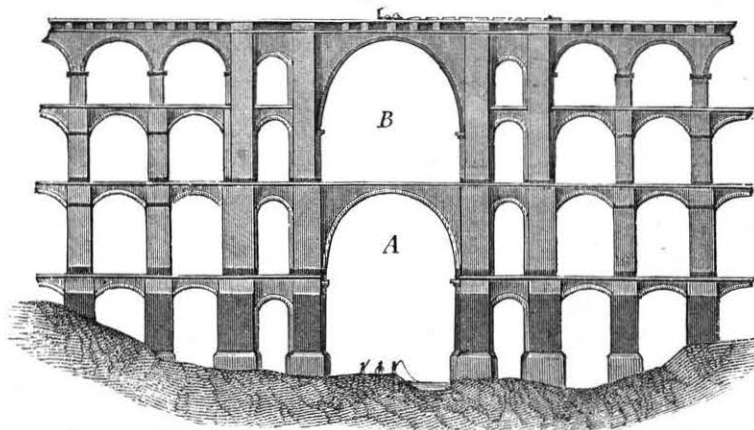
gleisige Eisenbahn *E*. Eine Eigenthümlichkeit hierbei besteht hauptsächlich in der Fortsetzung des Gewölbes *A* bis in das Fundament *B*, welches das Widerlager bildet. Eine besondere Hintermauerung hat das nach den Kämpfern hin verstärkte Gewölbe nicht erhalten.

Fig. 108.



In Fig. 109 ist das Mittelstück der Gölthysthalbrücke abgebildet. Die Länge dieser Brücke beträgt 574 m, die obere Breite 10 m und die untere 22,6 m, die Höhe von der Bachsohle bis zur Schienenoberkante 77,6 m. Von den mittleren großen Bögen hat *A* eine Spannweite von 28,6 m und eine Höhe von 16,2 m, *B* aber eine Spannweite von 30,8 m und eine Höhe von 19,8 m.

Fig. 109.



Nimmt man die Höhe eines Ziegelpfeilers  $h = 75$  m und das Gewicht eines Cubikmeters Ziegelmauerwerk gleich 1800 kg an, so erhält man den größten Druck dieses Pfeilers pro Quadratcentimeter, abgesehen von der zufälligen Belastung und von der Belastung durch die Gewölbbögen,

$$p = 75 \cdot 0,18 = 13,5 \text{ kg.}$$

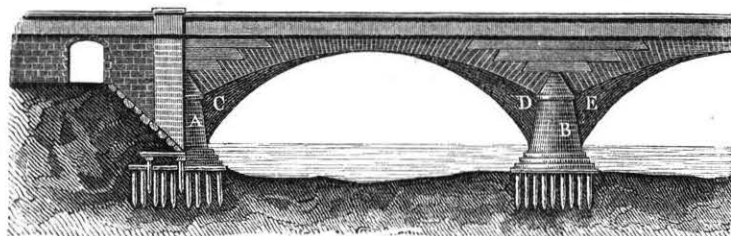
Wäre der Festigkeitsmodul der Ziegel gleich 170 kg anzunehmen, so hätte man für die Pfeiler einen Sicherheitscoefficienten von



$$\frac{170}{13,5} = 12,6.$$

Als ein Beispiel für eine Strombrücke sei in Fig. 110 ein Theil der berühmten von Perronet erbauten Seinebrücke bei Neuilly dargestellt. Dieselbe besteht aus fünf Bögen von 39 m Weite und 13 m Höhe. Die Curve, wonach die Bögen construirt sind, ist eine Korblinie aus 11 Mittelpunkten. Die Schlusssteine der

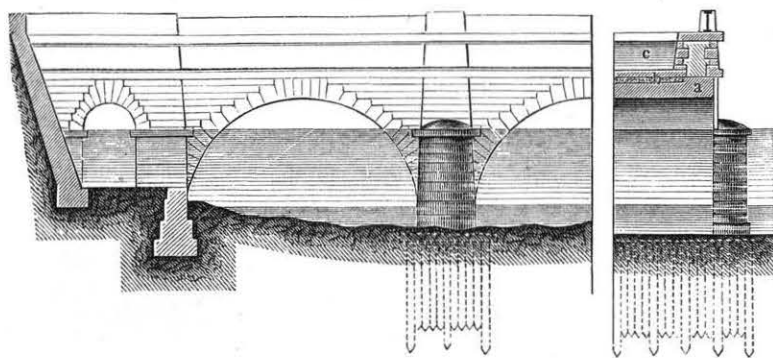
Fig. 110.



Bögen haben hier eine Stärke von 1,62 m erhalten. Die Pfeilerköpfe (A und B) sind halbkreisförmig abgerundet, und die Kanten zwischen den Stirn- und den inneren Wölbflächen der Bögen sind durch trumme Flächen C, D, E, sogenannte Kuhhörner abgestumpft.

In Fig. 111 ist endlich noch die Canalbrücke, welche den Rhein-Marne-Canal über die Mosel bei Liverdun\*) führt, zum Theil in der Ansicht, zum

Fig. 111.



Theil im Querschnitte gezeichnet. Die Länge der Brücke zwischen den Widerlagern beträgt 157,7 m. Von den vorhandenen 12 halbkreisförmig überwölbten Oeffnungen haben die 10 mittleren je 13 m und die beiden äußeren je 3 m. Das aus Quadern 1 m stark ausgeführte Gewölbe a trägt auf einer mit Asphalt überzogenen Betonschicht b das Canalbett c von 2 m Tiefe, 6,5 m oberer und 6 m unterer lichter Weite.

\*) S. Heizerling, Brücken der Gegenw. Abth. II, Heft 2, Thl. 5.

Anmerkung. Ueber die Gewölbe ist die Literatur sehr ausgedehnt, jedoch sind die in verschiedenen Schriften abgehandelten Theorien nicht immer richtig, oder wenigstens nicht immer praktisch genug, weil ihnen nicht die der Praxis entsprechenden Voraussetzungen zu Grunde gelegt sind. Es mögen daher hier nur die vorzüglichsten Schriften angeführt werden. Coulomb legte zuerst den Grund zur Theorie, wie sie im Wesentlichen hier vorgetragen wurde. Man sehe: *Théorie de machines simples*, par Coulomb. Die Theorie weiter ausgebildet findet man in Navier: *Résumé des Leçons sur l'application de la mécanique*, T. I. Eine deutsche Bearbeitung ist hiervon erschienen, unter dem Titel: *Die Mechanik der Baukunst*, von Westphal. Ebenso: *Cours de Stabilité des Constructions etc.* par Persy. Abhandlungen von Audoy, Garidel, Poncelet und Petit finden sich im *Mémorial de l'officier du génie*. Die Petit'sche Abhandlung ist deutsch bearbeitet und unter dem Titel „Theorie der Kreisgewölbe“ besonders im Buchhandel sowie in Crelle's Journal der Baukunst erschienen, von W. Lahmeyer. Tabellen zur Berechnung des Gewölbschubes giebt die Schrift: *Tables des poussées des voûtes en plein cintre*, par Garidel, Paris 1837 u. 1842. Uebrigens findet man die Gewölbe abgehandelt in den Werken über Mechanik von Boissut, Prony, Robinson (*Mechanical Philosophy*), Whewell, Rozeley, Eytelwein, Gerstner u. s. w. Besondere Abhandlungen über Gewölbe sind von Maillard (*Mechanik der Gewölbe*, Pesth 1817), von Knochenhauer (*Statik der Gewölbe*, Berlin 1842), Hagen (*über Form und Stärke gewölbter Bögen*, Berlin 1844), u. s. w. erschienen. Hieran schließt sich die Schrift Ligowski's: „Die Bestimmung der Form und Stärke gewölbter Bögen mit Hilfe der hyperbol. Functionen, aus der Zeitschrift für Bauwesen, 1854“. Ferner über schiefe Gewölbe: Heider, *Theorie der schiefen Gewölbe*, Wien 1846. Hart, *Construction schiefer Gewölbe*, in Romberg's Zeitschrift 1847. Sowie Francis Baffforth, *Praktische Anweisung zur Construction schiefer Gewölbe*, deutsch von Härtel. Ueber steinerne Brücken ist noch zu lesen: Gauthey, *Traité de la construction des ponts*, und Perronet's Werke, die Beschreibung der Entwürfe und der Bauarten der Brücken bei Neuilly, Mantes u. s. w., aus dem Französischen von Dietlein, Halle 1820. Von neueren Werken sind zu empfehlen: Scheffler, „Zur Theorie der Gewölbe“, in Crelle's Journal für die Baukunst, Band 29 und 30, sowie dessen mehrerwähntes Werk: *Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eisernen Brücken*, Braunschweig 1857, I. Tellkampff, „Beiträge zur Gewöltheorie, frei bearbeitet nach Carvallo, Hannover 1855“. Von Villarceau, „Sur l'établissement des Arches de Pont, envisagé au point de vue de la plus grande stabilité. Paris 1853“. Siehe auch „Examen historique et critique des principales théories concernant l'équilibre des voûtes“, par Poncelet, Paris 1852“. Ferner ist zum Studium zu empfehlen: Rankine's Manual of applied Mechanics, sowie dessen Manual of Civil-Engineering. Holzhey, Vorträge über Baumechanik. Heizerling, Die Brücken der Gegenwart, 2. Abth. Der Arbeiten von Schwedler und des Werkes von Föppl ist bereits im Texte gedacht worden.

## Die Theorie der Holz- und Eisenconstruktionen.

§. 33. Holz- und Eisenconstruktionen. Von den in den vorhergehenden Capiteln besprochenen Bauconstruktionen aus Stein unterscheiden sich diejenigen aus Holz und Eisen zunächst wesentlich dadurch, daß diese Materialien ebensowohl Zugkräften wie Druckkräften zu widerstehen vermögen, während bei den Steinconstruktionen auf die absolute Festigkeit des Mörtels nicht gerechnet werden kann. Dieser Beanspruchung durch Zugkräfte gemäß sind die einzelnen Bestandtheile der hier zu betrachtenden Bauwerke unter sich in solcher Weise durch Zapfen, Bolzen, Nieten u. zu vereinigen, daß die Verbindungen ebenfalls Zugspannungen auszuüben vermögen. Die bei weitem häufigste Verwendung finden die Holz- und Eisenconstruktionen bei der Ueberdeckung von Räumen oder Oeffnungen, namentlich bei der Ausführung von Decken und Dächern in Gebäuden und bei der Herstellung von Brücken. Diesen Zwecken sowie der Eigenthümlichkeit des Materials entsprechend haben die Hauptbestandtheile der Holz- und Eisenconstruktionen meistens die Gestalt stabförmiger oder prismatischer Stücke von größerer Länge, als man sie den Werkstücken aus Stein geben kann. Was ferner die Querschnitte dieser einzelnen Theile anbelangt, so ist man bei der Verwendung von Holz nicht nur durch die Stärke der zu benutzenden Baumstämme innerhalb gewisser Grenzen beschränkt, sondern auch fast ausschließlich auf die kreisförmige und rechteckige Querschnittsgestalt angewiesen. Bei der Verwendung von Eisen dagegen kann man leicht gerippte oder sonst geeignete Querschnitte von solcher Form zur Anwendung bringen, daß das Material in möglichst vortheilhafter Weise zur Wirkung kommt. Die Anwendung solcher gerippter Querschnitte empfiehlt sich für hölzerne Construktionstheile aus dem einfachen Grunde nicht, weil dieselben

nur durch Ausarbeitung aus vollen Holzstücken herzustellen wären, womit eine beträchtliche Materialvergeudung verbunden sein würde. Die Haupttheile einer Construktion haben entweder eine horizontale Lage wie die Schwellen, Balken, Träger u., oder sie stehen vertical wie die Pfosten, Stiele und Säulen, oder sie haben, wie die Sparren, eine gegen den Horizont geneigte Stellung, in welchem Falle sie Streben oder Bänder heißen, je nachdem sie einer Zusammendrückung oder einer Ausdehnung zu widerstehen haben. Auch bei den verticalen Stielen oder Säulen, welche zur Unterstützung horizontaler Balken dienen, macht man den Unterschied zwischen Standsäulen, die den Balken von unten stützen, und Hängesäulen, d. h. solchen, welche den unterhalb angehängten Balken zu tragen haben, die also auf Zug beansprucht werden, während die Standsäulen durch die Last der auf ihnen ruhenden Balken zusammengedrückt werden.

Um die Stabilität einer Construktion zu untersuchen, handelt es sich zunächst um die Ermittlung der äußeren Kräfte, welche darauf wirken. Diese Kräfte bestehen der Hauptsache nach immer aus den Gewichten der Construktionstheile selbst und der von ihnen zu tragenden Lasten; in einzelnen Fällen kommen auch noch besondere horizontale Kräfte in Betracht, z. B. bei Dächern und Brücken der Druck des Windes. Das Eigengewicht der einzelnen Construktionstheile ist in jedem Falle aus den Dimensionen und specifischen Gewichten der betreffenden Theile zu bestimmen, während man die außerdem zu tragenden, sogenannten zufälligen Belastungen nach bestimmten Erfahrungsregeln anzunehmen hat, welche weiter unten für die meist vorkommenden Fälle angegeben sind. Während das Eigengewicht der Construktion eine stets vorhandene constante Belastung darstellt, ist die zufällige Belastung, z. B. die eines Speichers durch Waaren, einer Brücke durch einen Eisenbahnzug u. s. w. eine veränderliche, welche bald in größerem bald in geringerem Betrage auftritt. Wenn es nun auch selbstredend erforderlich ist, daß das Bauwerk für denjenigen Fall die genügende Stabilität besitze, für welchen die zufällige Last in ihrem größten Betrage vorhanden ist, so findet doch in vielen Fällen die ungünstigste Beanspruchung einzelner Theile bei einer nur theilweisen Belastung statt, und es muß daher immer durch eine besondere Untersuchung der für jeden Theil ungünstigste Belastungszustand ermittelt werden.

Es ist ebenfalls selbstverständlich, daß ebensowohl die Haupttheile, wie auch sämtliche Verbindungen den auf sie einwirkenden Kräften vermöge ihrer Elasticitätswirkungen hinreichenden Widerstand entgegenzusetzen müssen. Damit dies möglich sei, hat man die Materialstärken oder Querdimensionen der einzelnen Bestandtheile den in Thl. I, Abschn. IV entwickelten Regeln der Festigkeitslehre gemäß zu bestimmen. Hierbei kommt es darauf an, diese

Dimensionen so klein als möglich zu wählen, da mit übermäßig großen Stärken nicht nur eine nutzlose Vergendung des Materials sondern auch eine schädliche Belastung durch die Eigengewichte verbunden ist. Zur Erzielung der möglichsten Ersparniß an Material ist es erforderlich, daß dasselbe bei der ungünstigsten Beanspruchung durch die äußeren Kräfte in allen seinen Theilen mit der höchsten zulässigen Spannung reagire, was nur dann erreichbar ist, wenn, wie bei gezogenen oder gedrückten Stäben, die Spannungen sich gleichmäßig über die ganze Querschnittsfläche vertheilen. Dagegen ist dieser ideale Zustand bei der Biegung der Körper niemals zu erreichen, da die einzelnen Elemente eines auf relative Elasticität beanspruchten Körpers bekanntlich Spannungen ausgesetzt sind, deren absolute Größen mit den Abständen von der neutralen Aze des Querschnitts proportional sind. Wenn daher, wie dies von jeder soliden Construction gefordert werden muß, die von der neutralen Aze entferntesten Fibern höchstens mit der für das Material zulässigen Spannung beansprucht werden, so sind alle der Aze näher liegenden Elemente mit geringeren Spannungen wirksam, als sie es zu sein vermöchten, ja die in der neutralen Aze selbst liegenden Elemente tragen gar nichts zum Widerstande bei. Es geht hieraus hervor, daß bei den auf Biegung beanspruchten Constructionstheilen die Wirksamkeit des Materials niemals so vollkommen ausgenutzt werden kann, wie bei den auf Zug oder Druck beanspruchten, und zwar wird die Ausnutzung um so unvollkommener sein, je mehr das Material in der Nähe der neutralen Faserschicht angehäuft ist. Daraus folgt, daß z. B. bei den hölzernen Balken, deren Querschnitt fast immer ein rechteckiger ist, von vornherein nur eine viel weniger vortheilhafte Verwendung des Materials stattfinden kann, als bei eisernen Trägern, bei denen man, etwa durch I förmige Querschnitte, dafür sorgen kann, daß die Hauptmasse des Materials in thunlichst großem Abstände von der neutralen Aze sich befindet. Wenn man nun auch, vermöge geeigneter Querschnittsformen, sich dem idealen Zustande einer gleichmäßigen Anstrengung aller Fasern nähern kann, so ist doch leicht zu erkennen, daß man diesen Zustand selbst bei gebogenen Körpern niemals in so vollkommener Weise wird erreichen können, wie dies bei den einfach gedrückten oder gezogenen der Fall ist. Es ergibt sich daher aus dieser Betrachtung ohne Weiteres das bei allen neueren Ausführungen zur Geltung kommende Princip, wonach die Constructionen so anzuordnen sind, daß die einzelnen Theile möglichst nur durch Zug- oder durch Druckkräfte in Anspruch genommen werden, und daß die einer Biegung ausgesetzten Theile auf das unumgänglich nöthige Maß eingeschränkt werden. Den sogenannten Fachwerksystemen, nach welchen in neuerer Zeit alle größeren Brücken- und Dachconstructionen ausgeführt werden, liegt durchweg dieses Princip zu Grunde.

Bei den folgenden Untersuchungen der Holz- und Eisenconstructionen können die in Thl. I, Abschn. IV entwickelten Gesetze und Regeln der Elasticitätslehre als bekannt vorausgesetzt werden, und es sollen nur diejenigen Verhältnisse einer besonderen Untersuchung unterworfen werden, welche speciell bei den einschlägigen Constructionen in Frage kommen. Bevor die Stabilitätsverhältnisse selbst untersucht werden, möge eine kurze Zusammenstellung der Belastungen angeführt werden, welche erfahrungsmäßig bei den zu betrachtenden Bauwerken in Rechnung zu stellen sind.

**Belastungen.** Wie schon bemerkt worden, besteht die Belastung der §. 34. Bauconstructionen aus ihrem Eigengewichte oder der permanenten und aus der zufälligen Last, welche letztere bei Brücken auch wohl Verkehrslast heißt. Wenn auch das Eigengewicht bei einer vorliegenden Construction immer leicht aus dem Volumen und dem specifischen Gewichte der Bestandtheile ermittelt werden kann, so ist es doch für den Entwurf eines Bauwerkes, dessen Dimensionen erst zu bestimmen sind, bequem, zuvörderst gewisse erfahrungsmäßig ermittelte Durchschnittswerthe für das Gewicht der Construction der Rechnung zu Grunde zu legen, durch welche die Dimensionen der einzelnen Theile festgesetzt werden. Ist letzteres geschehen, so kann das Eigengewicht aus den gefundenen Dimensionen genauer berechnet und, wenn es sich als nöthig herausstellen sollte, auf Grund dieser genauer bestimmten Eigenlast eine Correction der Dimensionen vorgenommen werden. Die Angaben über die Belastung, sowohl durch das Eigengewicht wie auch durch die zufällige oder Nutzlast, werden in der Regel auf eine Quadrateinheit (Quadratmeter) der horizontalen Grundfläche bezogen, welche überdeckt ist. Für Dächer pflegt man die Belastung durch das Eigengewicht, Schnee- und Winddruck auch häufig auf die Quadrateinheit der geneigten Dachfläche zu bestimmen, während man für Brücken von bestimmter Breite, z. B. pro Geleis, auch wohl die Belastung für den laufenden Meter angiebt. Wenn Mauern auf einzelnen Constructionstheilen ruhen, so ist die dadurch hervorgerufene Belastung bei einer gegebenen Mauerstärke mit der Größe der verticalen Ansichtsfläche der Mauer, also pro laufenden Meter mit der Höhe der Mauer proportional. Die in solcher Weise im Folgenden angegebenen Werthe gelten für ruhende Lasten, und man kann den etwa stattfindenden Erschütterungen, wie sie z. B. bei Brücken durch die Bewegung der Wagen und in Fabriken durch den Betrieb von Maschinen auftreten, dadurch Rechnung tragen, daß man in jedem solchen Falle entweder eine entsprechend größere Belastung, oder eine geringere zulässige Anstrengung des Materials voraussetzt, da der Einfluß solcher Erschütterungen sich wohl nur in den seltensten Fällen durch die Rechnung feststellen läßt.

Die folgenden Tabellen über die Belastung von Zwischendecken und



Belastungen pro 1 qm Fläche in Kilogrammen  
für Zwischendecken.

a) in Wohngebäuden oder in Fabriken mit leichten Maschinen  
(Spinnereien u.)

Art der Construction	Eigenlast	Nutzlast	Totallast
Gewölbte Decke, $\frac{1}{4}$ Stein stark, zwischen eisernen Trägern für 1 bis 1,5 m Spannweite, incl. Putz und Fußboden . . . . .	300	200	500
Gewölbte Decke wie oben, $\frac{1}{2}$ Stein stark . . . . .	400	200	600
Gewölbte Decke wie oben, 1 Stein stark, für 2 bis 3 m Spannweite . . . . .	500	200	700
Decke aus Wellblech, Buckelplatten oder Barreneisen mit 13 cm dicker Betonschicht zwischen Trägern . . . . .	250	200	450
Holzbalkendecke mit einfachem Fußboden . . . . .	80	200	280
Holzbalkendecke mit doppeltem Fußboden oder mit einfachem Fußboden und Deckenputz . . . . .	100	200	300
Holzbalkendecke mit halbem Windelboden, Fußboden und Deckenputz . . . . .	300	200	500
Holzbalkendecke mit ganzem Windelboden, Fußboden und Deckenputz . . . . .	400	200	600

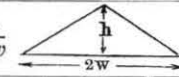
b) in Fabriken mit schweren Maschinen, in Speichern und Tanzlocalen

Holzbalkendecke mit halbem Windelboden, für Tanzlocale, Heu- und Fruchtböden . . . . .	350	350	700
Holzbalkenlage mit Bohlenbelag in Salzspeichern . . . . .	200	600	800
Holzbalkenlage mit Bohlenbelag in Kaufmannsspeichern . . . . .	250	750	1000
Gewölbte Decke, $\frac{1}{2}$ Stein stark, zwischen eisernen Trägern, 1 bis 1,5 m Spannweite, in Fabriken oder Lagerräumen . . . . .	450	500	950
Gewölbte Decke, 1 Stein stark, für 2 bis 3 m Spannweite, sonst wie vor. . . . .	650	500	1150
Decke aus Wellblech, Buckelplatten oder Barreneisen mit 20 cm dicker Betonschicht, sonst wie vor. . . . .	350	500	850

Das Gewicht von Mauern beträgt pro 1 qm Ansichtsfläche und 1 Stein (0,25 m) Stärke für Mauern aus:

Ziegelsteinen	Poröfen oder Hohlziegeln	Kalkstein oder Granit	Sandstein
220 kg	135 kg	330—350 kg	280—300 kg

Belastungen incl. Schnee und Winddruck für 1 qm Grundrißfläche in Kilogrammen für Dächer.

Art der Construction	Neigungsverhältniß $\frac{h}{2w}$ 							
	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
Einfaches Ziegeldach . . . . .	—	—	—	—	—	—	220	230
Doppel- und Kronziegeldach . . . . .	—	—	—	—	—	—	240	260
Gewöhnliches Schieferdach . . . . .	—	—	—	—	180	190	210	240
Dorn'sches Dach . . . . .	—	175	175	180	190	210	240	—
Asphaltdach mit Lehmunterlage (mit Fliesenunterlage 10 Proc. mehr) . . . . .	—	175	175	180	190	210	240	—
Stroh- und Rohrdach . . . . .	—	—	—	—	—	200	230	—
Dach aus Zink- oder Eisenblech . . . . .	—	135	140	150	160	170	200	—
Theerpappdach . . . . .	—	135	140	150	160	170	200	—
Holzementdach auf Holzbalkenlage . . . . .	350	—	—	—	—	—	—	—
Holzementdach auf leichten Rappen oder Wellblech u. zwischen eisernen Trägern . . . . .	450	—	—	—	—	—	—	—

Dächern sind einem Werke von D. Inge\*) entnommen und bedürfen keiner näheren Erläuterung.

Hinsichtlich des Schneedrucks kann bemerkt werden, daß die größte Höhe der Schneeschicht in Deutschland zu etwa 0,6 m angenommen werden kann, so daß man, unter Annahme einer Dichte des Schnees von  $\frac{1}{8} = 0,125$  von der des Wassers, den Schneedruck für jeden Quadratmeter der Horizontalprojection einer Fläche zu  $0,125 \cdot 0,6 \cdot 1000 = 75$  kg veranschlagen kann.

Die Belastung der Dachflächen durch den Winddruck läßt sich nach den in Thl. I, Abschn. VII über den Stoß der Flüssigkeiten angegebenen Regeln bestimmen. Danach wird der Druck  $W$ , den eine mit der Geschwindigkeit  $c$  bewegte Flüssigkeit von der Dichte  $\gamma$  normal zu einer Fläche  $f$  ausübt,

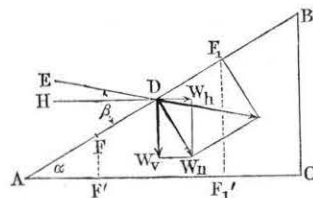
\*) Tabellen und Beispiele für die rationelle Verwendung des Eisens von D. Inge, 1878; s. auch Müller, Festigkeitslehre.

welche unter dem Winkel  $\beta$  gegen die Richtung des Luftstroms geneigt ist, ausgedrückt durch

$$W = Q \gamma \frac{c}{g} \sin \beta = f \gamma \frac{c^2}{g} \sin^2 \beta,$$

worin  $Q = f c \sin \beta$  das in jeder Secunde gegen die Fläche  $f$  treffende Luftvolumen ist. Der herrschende Wind hat nun meistens gegen den Horizont eine Neigung von  $EDH = 10^\circ$ , Fig. 112, und daher bestimmt sich der Neigungswinkel  $\beta$ , unter welchem die unter  $\alpha$  geneigte Dachfläche  $BAC$  getroffen wird, zu

Fig. 112.



$$\beta = EDA = \alpha + 10^\circ.$$

Mit diesem Werthe erhält man daher den auf eine beliebig große Fläche  $FF_1 = f$  normalen Winddruck zu

$$W_n = f \gamma \frac{c^2}{g} \sin^2 (\alpha + 10^\circ),$$

also folgt für die Flächeneinheit (1 qm) der spezifische Winddruck senkrecht zur Dachfläche zu

$$w_n = \frac{W_n}{f} = \gamma \frac{c^2}{g} \sin^2 (\alpha + 10^\circ).$$

Ebenso groß ist auch der verticale Druck für jede Flächeneinheit der Horizontalprojection, sowie auch der horizontale spezifische Druck für die Verticalprojection, denn eine Zerlegung des normal zur Fläche  $FF_1$  wirkenden Winddruckes  $W_n$  giebt die verticale Componente

$$W_v = W_n \cos \alpha,$$

und da dieselbe auf eine Fläche  $F'F_1' = f \cos \alpha$  sich vertheilt, so wird der lothrechte Winddruck für jede Einheit der horizontalen Projection ebenfalls durch

$$w_v = \frac{W_v \cos \alpha}{f \cos \alpha} = \frac{W_v}{f} = \gamma \frac{c^2}{g} \sin^2 (\alpha + 10^\circ) = w_n$$

ausgedrückt. Dasselbe gilt für den Druck des Windes gegen die Verticalprojection  $BC$  der Dachfläche.

Setzt man zur Bestimmung des Winddruckes das spezifische Gewicht der Luft  $\gamma = 1,25$  kg und die größte vorkommende Geschwindigkeit des Windes  $c = 25$  m, so erhält man den normalen Windstoß pro 1 qm Fläche zu

$$w = 1,25 \frac{25^2}{9,81} \sin^2 (\alpha + 10^\circ) = 80 \sin^2 (\alpha + 10^\circ).$$

Man würde z. B. für ein Dach, dessen Höhe gleich der halben Weite ist, also mit  $\alpha = 45^\circ$ , den Winddruck zu

$$w = 80 \sin^2 (45^\circ + 10^\circ) = 53,6 \text{ kg};$$

dagegen für eine Neigung von  $1/3$ , oder  $\alpha = 18^\circ 30'$  einen Werth

$$w = 80 \sin^2 (28^\circ 30') = 18,2 \text{ kg}$$

erhalten.

Nun wird zwar der hier vorausgesetzte ungünstigste Winddruck immer nur auf die eine, der Windrichtung zugekehrte Dachfläche wirken, während die dem Winde abgewendete gar nicht oder doch viel weniger gedrückt wird, in dessen pflegt man der Sicherheit wegen bei der Construction in der Regel anzunehmen, daß die ganze Dachfläche einem gleichmäßig vertheilten verticalen Winddrucke ausgesetzt sei, und zwar soll man nach Brandt für jeden Quadratmeter der Horizontalfläche eine durch Schnee und Wind erzeugte Verticalbelastung zwischen 100 und 125 kg annehmen, eine Angabe, welche mit den oben gefundenen Werthen ( $75 + 53,6 = 128,6$  und  $75 + 18,2 = 93,2$ ) annähernd übereinstimmt.

Dem horizontalen Winddrucke, welcher eine Verschiebung bezw. ein Umskippen des Daches anstrebt, wird man durch entsprechende Befestigung des Daches, sowie durch einen geeigneten Quer- und Längsverband begegnen müssen. Die oben für den Winddruck angegebenen Formeln gelten auch für die verticalen Flächen von Mauern, Brückenträgern zc., wenn man  $\alpha = 90^\circ$  darin einsetzt.

Die Belastung der Brücken durch ihr Eigengewicht setzt sich zusammen aus dem Gewichte der Fahrbahn mit Einschluß der dieselbe unterstützenden Querträger, Schwellen zc., und dem Gewichte der Hauptträger. Das Gewicht der Fahrbahn für Straßenbrücken kann man pro 1 qm zu

$$250 \text{ kg bei einer Schotterdecke von } 0,1 \text{ bis } 0,15 \text{ m Dicke,}$$

$$360 \text{ kg für Steinpflaster von } 0,15 \text{ m Dicke,}$$

$$100 \text{ kg für die zugehörige Sandunterlage von } 0,06 \text{ m Dicke}$$

annehmen \*).

In Betreff der eisernen Straßenbrücken von der Spannweite  $l$  und einer Breite der Fahrbahn von 7,5 m incl. der beiden je 1 m breiten Banketts, kann man pro 1 qm Grundrißfläche für vorläufige Ueberschlagsrechnungen das Eigengewicht zu

$$p = (42 l + 3600) \text{ kg}$$

bei Anwendung einer 0,2 m dicken Beschotterung, und zu

$$p = (28 l + 1300) \text{ kg}$$

\*) Siehe E. Holzhey, Vorträge über Baumechanik.

bei doppelter eiserner Bedienung annehmen. Nach Winkler berechnet sich ferner für eiserne Straßenbrücken, deren Spannweite  $l$  und Breite  $b$  Meter beträgt, für jeden laufenden Meter der Länge  $l$  das gesammte Brückengewicht, einschließlich der Hauptträger, zu

$$p = \frac{120 + 300 b + 3,3 b l}{1 - 0,0038 l} \text{ kg.}$$

Für Eisenbahnbrücken (eingleisige) beträgt nach Schwedler das totale Gewicht für den laufenden Meter der Spannweite  $l$  in Kilogrammen

$$p = 30 l + 800$$

für Brücken schwerster Construction von 10 bis 100 m Spannweite. Das Gewicht der Fahrbahn kann durchschnittlich zu 750 kg pro laufenden Meter veranschlagt werden.

Für das Gewicht der Hauptträger hölzerner Brücken giebt Winkler die folgende Tabelle an:

Gewicht (kg) der Hauptträger hölzerner Brücken von  $l$  Meter Spannweite.

Unterstützung durch:	Straßenbrücken pro 1 qm Fahrbahn	Eisenbahnbrücken (ein Geleise)	
		a) provisorische pro laufenden Meter	b) definitive pro laufenden Meter
Einfache Balken . . . . .	11 $l$	67 $l$	84 $l$
Einfache durch Sattelholzer verstärkte Balken . . . .	10 $l$	62 $l$	79 $l$
Verdübelte Balken . . . .	10 $l$	55 $l$	70 $l$
Gitterbalken . . . . .	8,3 $l$	45 $l$	51 $l$

Wie schon oben bemerkt, können die vorstehend angeführten Zahlen nur als ungefähre Ueberschlagswerthe bei der Projectirung gelten, und man hat in jedem Falle nachträglich das genaue Eigengewicht der Construction aus den für die Bestandtheile festgesetzten Dimensionen zu ermitteln.

Für die zufällige oder Verkehrsbelastung der Brücken sind nach dem Deutschen Bauhandbuche die folgenden Angaben zu Grunde zu legen:

### Zufällige Belastung von Straßenbrücken, Fußsteigen und Aquäducten.

Brücken	Art der Belastung	Belastung in Kilogrammen pro 1 qm Fahrbahn	kg
Straßen- und Pferdeeisenbahn brücken	Menschen- gedränge	1) Annahme in Amerika . . . . .	150
		2) Annahme in Frankreich . . . . .	200
		3) Annahme in Deutschland . . . . .	280
		4) Genügende Annahme . . . . .	400
Fußsteige und Ziehwege	Menschen, Thiere und Fuhrwerke	1) Stege für öffentlichen Verkehr . .	400
		2) Stege für Privatverkehr . . . . .	200
		3) Ziehwege in Städten . . . . .	400
		4) Ziehwege für leichtes Fuhrwerk .	150
Aquäducte und Canalbrücken	Wasser und Schiffe	Für jeden Meter Wasserstandshöhe beim Passiren der Schiffe . . . . .	1000

In Betreff der Größe und Vertheilung der Belastung von Straßenbrücken durch Fuhrwerke und Zugthiere können die folgenden Skizzen einen Anhalt geben:

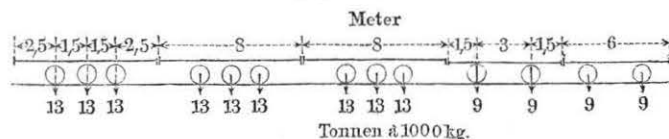
### Gewichte und Gewichtsvertheilung für Fuhrwerke in Kilogrammen und Metern.

1) Schwerstes Fuhrwerk . . .	18 000	<p>Fig. 113. 19m 2 4 2 2 4 4 9000 9000 600 600 600 kg.</p>
Bespannung 6 Pferde . . .	1 800	
2) Schweres Landfuhrwerk . .	10 000	<p>Fig. 114. 14,5m 2 3,5 2 4 1 5000 5000 600 600 kg.</p>
Bespannung 4 Pferde . . .	1 200	



Für Eisenbahnbrücken pflegt man als die der Rechnung zu Grunde zu legende Belastung einen Zug aus mehreren der schwersten, die Bahn befahrenden Locomotiven voranzusetzen, in welcher Hinsicht beispielsweise Mohr einen durch Fig. 115 dargestellten Eisenbahnzug von drei hinter

Fig. 115.



einander stehenden dreiazigen Tenderlocomotiven von je 39 Tonnen mit darauf folgenden zweiazigen Güterwagen von je 18 Tonnen annimmt. Um die Rechnung hierbei zu erleichtern, ist es gebräuchlich, statt der durch einen solchen Zug in einzelnen Punkten ausgeübten concentrirten Lasten eine über die ganze Brücke gleichmäßig vertheilte Belastung einzuführen. Man hat diese Belastung so zu bemessen, daß durch dieselbe eine ebenso große Anstrengung der Constructionstheile hervorgerufen wird, wie dies durch die Reihe concentrirter Lasten geschieht, wenn die letzteren in derjenigen Stellung sich befinden, in welcher sie die größte Anstrengung in den Constructionsgliedern hervorrufen. Dieser ungünstigste Belastungszustand ist nun aber verschieden für die verschiedenen Constructionsglieder des Trägers. Während nämlich die äußeren, den Träger oben und unten einfassenden Längsbänder oder Gurtungen (s. unten) in irgend welchem Querschnitte proportional mit der Größe des biegenden Momentes  $M$  der äußeren Kräfte angestrengt werden, stehen die Spannungen der zwischen den Gurtungen befindlichen Füllungslieder im directen Verhältnisse mit der verticalen Scheerkraft  $V$  des betreffenden Querschnittes. Um daher diejenige gleichförmige Belastung des Trägers zu finden, welche die wirkliche, in einzelnen Punkten concentrirte Belastung durch den Eisenbahnzug ersetzen kann, hat man die Untersuchung ebensowohl für die Gurtungen wie für die Füllungslieder gesondert vorzunehmen. Zu dem Behufe denkt man sich den betreffenden Lastenzug über die Brücke bewegt und diejenige Stellung bestimmt, für welche das Biegemoment  $M_{max}$  an der ungünstigsten Stelle den größten Werth annimmt, und ermittelt diejenige gleichförmige Belastung  $k_g$  pro Längeneinheit, welche denselben Werth von  $M_{max}$  hervorruft. Diese gleichförmige Belastung  $k_g$  legt man dann der Berechnung der Gurtungen zu Grunde. Eine ähnliche Untersuchung hinsichtlich der verticalen Schubkraft  $V_{max}$  giebt in gleicher Weise die für die Berechnung der Füllungslieder zu Grunde zu legende gleichförmige Belastung  $k_f$  pro Längeneinheit. Die Untersuchung führt dazu, daß diese beiden Werthe  $k_g$  und  $k_f$  verschieden

groß ausfallen und außer von der Größe und Vertheilung der concentrirten Lasten des Eisenbahnzuges wesentlich noch von der Spannweite  $l$  der Träger abhängig sind. Hinsichtlich der weiteren Ausführung dieser Untersuchungen muß auf die speciellen Werke über Brückenbau verwiesen werden, hier mögen nur die Näherungsformeln angeführt werden, welche von Winkler\*) in Bezug auf einen Eisenbahnzug aufgestellt sind, welcher sich zusammensetzt aus drei hinter einander folgenden Locomotiven von je 39 Tonnen Gewicht, deren Tender je 27 Tonnen wiegen, und auf welche Lastwaggons von je 16 Tonnen folgen:

Tabelle der gleichförmig vertheilten Belastungen in Tonnen für 1 laufenden Meter eines Geleises.

für $l = 10$ bis 50 m	für $l = 50$ bis 100 m	für $l = 100$ bis 150 m
$k_g = 3,98 + \frac{22}{l}$ Tonn.	$k_g = 3,07 + \frac{67}{l}$ Tonn.	$k_g = 2,67 + \frac{107}{l}$ Tonn.
$k_f = 4,30 + \frac{31}{l}$ Tonn.	$k_f = 3,47 + \frac{72}{l}$ Tonn.	$k_f = 3,27 + \frac{92}{l}$ Tonn.

**Der Balken.** Zu den in der Bautechnik am häufigsten angewendeten §. 35. Constructionstheilen gehört der an zwei Stellen unterstützte oder befestigte horizontale Balken, welcher zum Tragen auf ihm ruhender Lasten bestimmt ist. Durch die letzteren sowie durch sein Eigengewicht wird der Balken auf Biegung in Anspruch genommen, und außerdem werden in allen Punkten im Innern desselben gewisse horizontale und verticale schiebende Kräfte hervorgerufen, denen das Material mit entsprechenden Schubspannungen entgegenwirken muß. Die Größe und Richtung dieser Anstrengungen an verschiedenen Stellen ist außer von der Größe und Vertheilung der Lasten wesentlich von der Art der Unterstützung abhängig, da in jedem Falle von den Festpunkten Reactionen ausgeübt werden müssen, die mit den belastenden Einwirkungen im Gleichgewichte stehen. In Thl. I sind diese Einwirkungen auf den Balken näher untersucht worden, und es genügt daher hier, die verschiedenen in der Praxis vorkommenden Fälle der Uebersichtlichkeit wegen zusammenzustellen. In Bezug auf die Biegunghverhältnisse wurde in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 gefunden, daß in irgend

\*) Winkler, Theorie der Brücken, Heft I, Wien 1873.

einem Querschnitte des Balkens, für welchen das Moment der äußeren Kräfte durch  $M$  ausgedrückt ist, Biegungsspannungen eintreten, welche durch die Beziehung

$$M = s \frac{T}{e} \quad \dots \dots \dots \text{I}$$

gegeben sind, wenn unter  $T$  das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die neutrale Ase desselben und unter  $s$  die Spannung verstanden wird, welcher die äußerste in der Entfernung  $e$  von der neutralen Ase befindliche Faserschicht pro Flächeneinheit ausgesetzt ist. Diese für jeden gebogenen Balken ganz allgemein geltende Gleichung soll auch im Folgenden zu Grunde gelegt werden, und zwar derart, daß unter der größten Spannung  $s$  der für das Material des Balkens höchstens zulässige Betrag der specifischen Faserspannung verstanden wird. Dabei wird zunächst, der Eigenschaft des Holzes und Schmiedeeisens entsprechend, dieser Betrag  $s$  für Druck- und Zugwirkungen als gleich groß vorausgesetzt, indem das hiervon abweichende Verhalten des Gußeisens, welches gegen Druckkräfte größeren Widerstand auszuüben vermag als gegen Zug, besonders besprochen werden soll.

Jede Biegung eines Balkens ist gleichbedeutend mit einer Formänderung der ursprünglichen, zunächst als gerade Linie vorausgesetzten geometrischen Ase des Balkens, welche letztere bei der Biegung in die sogenannte elastische Linie übergeht. In Bezug auf diese Linie wurde in Thl. I, §. 220 das ebenfalls ganz allgemein gültige Gesetz aufgestellt, welches durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{TE}{M} \quad \dots \dots \dots \text{II}$$

ausgedrückt ist, worin  $E$  den Elasticitätsmodul des Materials und  $\varrho$  den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie an der Stelle bedeutet, für welche das Moment der äußeren Kräfte gleich  $M$  ist. Diese Gleichung läßt sich auch für rechtwinkelige Coordinaten  $x, y$  der elastischen Linie, wenn annähernd  $\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  gesetzt wird, durch

$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \dots \dots \dots \text{II}^a$$

wiedergeben.

Was die verticale Schubkraft  $V$  für irgend eine Stelle des Balkens betrifft, so ist dieselbe immer gleich der algebraischen Summe aller der Verticalkräfte, die Stützreactionen inbegriffen, welche auf den Balken von einem Ende bis zu der betrachteten Stelle einwirken, und es wurde früher ebenfalls gefunden, daß diese Kraft für jede Stelle durch die Beziehung

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad \dots \dots \dots \text{III}$$

gegeben ist, vorausgesetzt, daß die horizontale Mittellinie des Balkens als  $X$ -Axe angenommen wird. Man überzeugt sich hiervon auch leicht durch

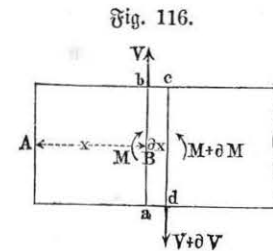


Fig. 116.

Fig. 116, wenn man im Abstände  $AB = x$  von dem Coordinatenanfang ein Balkenelement  $abcd$  herausgeschnitten denkt, dessen Länge  $ad = bc = dx$  ist. Auf dieses Element wirken in den beiden Schnittflächen  $ab$  und  $cd$  die Drehungsmomente  $M$  und  $M + dM$ , sowie die Schubkräfte  $V$  und bezw.  $V + dV$ , und man hat für das Gleichgewicht dieses Elementes daher die Gleichung:

$$M + Vdx = M + dM, \text{ oder } V = \frac{\partial M}{\partial x}.$$

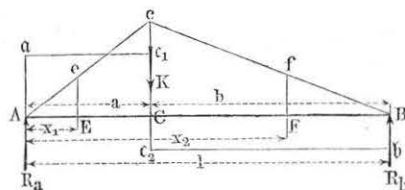
Daraus geht hervor, daß in denjenigen Querschnitten, für welche die Schubkraft  $V$  gleich Null wird, das Moment  $M$  ein Maximum ist, eine Beziehung, welche häufig zur schnellen Ermittlung derjenigen Stelle benutzt werden kann, für welche das Biegemoment seinen größten Werth annimmt.

Die vorstehenden Gleichungen I bis III bilden die Grundlage der folgenden Ermittlungen, welche die Bestimmung der Festigkeit von Balken zc., d. h. die Feststellung der denselben zu gebenden Dimensionen, zum Zwecke haben. Kennt man nämlich für einen Balken aus bestimmtem Materiale, für welches die Größen  $E$  und  $s$  erfahrungsgemäß feststehen, für irgend welche Stelle das Moment  $M$  und die Schubkraft  $V$ , so lassen sich hieraus, wie aus dem Folgenden sich ergeben wird, die erforderlichen Querschnittsdimensionen des Balkens an der betrachteten Stelle ermitteln.

Es ist daher für die folgenden Entwicklungen zunächst von Wichtigkeit, für jeden Punkt eines Balkens, der unter der Einwirkung bekannter Kräfte steht, das Biegemoment  $M$  sowie die verticale Scherkraft  $V$  zu kennen. Hierzu eignet sich der Anschaulichkeit wegen insbesondere die graphische Darstellung dieser Größen durch Diagramme, welche in folgender Weise entworfen werden können. Ueber der ursprünglich geraden Balkenaxe als  $X$ -Axe sollen die Momente  $M$  sowie die Verticalkräfte  $V$  als Ordinaten  $y$  aufgetragen werden, derart, daß die Curve, welche die Endpunkte der Ordinaten verbindet, von der Größe und Veränderlichkeit der Momente bezw. Verticalkräfte ein Bild giebt. Als positive Richtung der  $X$ - und  $Y$ -Axe

sollen, wenn nicht das Gegentheil bemerkt wird, die Richtungen von links nach rechts und von unten nach oben vorausgesetzt werden, und es sollen die aufwärts wirkenden Schubkräfte positive heißen, also von der  $X$ -Axe nach oben angetragen werden. Ebenso sollen Momente als positive betrachtet werden und ihre Ordinaten nach oben hin angetragen werden, wenn sie dem Balken eine positive Krümmung, d. h. eine solche zu ertheilen bestrebt sind, zufolge deren der Krümmungsmittelpunkt in der Richtung der positiven  $Y$ -Axe gelegen ist, der Balken also nach oben hin concav gebogen wird. Einer nach oben concaven Krümmung des Balkens entspricht daher ein negatives Moment, welches durch eine abwärts

Fig. 117.



Ist der Balken von der Länge  $AB = l$  in  $C$ , im Abstande  $a$  von  $A$  und  $b$  von  $B$  durch eine Kraft  $K$  belastet, so sind die Auflagerreaktionen in  $A$  und  $B$  bzw. durch

$$R_a = K \frac{b}{l} \text{ und } R_b = K \frac{a}{l}$$

gegeben, und man hat für das Moment in  $C$  den Werth

$$M_c = R_a a = R_b b = K \frac{ab}{l},$$

während in irgend einem Punkte  $E$  oder  $F$  im Abstande  $x_1$  bzw.  $x_2$  von  $A$  das Moment durch

$$M_e = R_a x_1 = K \frac{b}{l} x_1 \quad \dots \quad (1)$$

und

$$M_f = R_a x_2 - K (x_2 - a) = K \frac{a}{l} (l - x_2) \quad \dots \quad (2)$$

ausgedrückt ist. Ueberall ist das Moment positiv, und wenn man daher nach einem beliebig zu wählenden Maßstabe für die Momente (1 Millimeter =  $\mu$  Meterkilogramm)  $Cc = M_c = K \frac{ab}{l}$  macht, so geben die geraden Linien  $Ac$  und  $Bc$  für jeden Punkt wie  $E$  und  $F$  in den Ordinaten  $Ee$  und  $Ff$  das Moment  $M_e$  bzw.  $M_f$  an.

von der Horizontalen anzutragende Ordinate dargestellt wird.

Die Verzeichnung dieser Diagramme verursacht in dem einfachen Falle eines Balkens auf zwei Stützen  $A$  und  $B$ , Fig. 117, keine Schwierigkeit.

Die Schubkraft in  $A$  ist gleich  $R_a = K \frac{b}{l}$  und bleibt constant für die Strecke  $AC$ , wie auch aus (1) folgt, woraus

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = K \frac{b}{l}$$

sich ergibt. In  $C$  dagegen verändert sich  $V$  plötzlich um die abwärts gerichtete Kraft  $-K$ , folglich ist unmittelbar rechts neben  $C$  die Schubkraft

$$V = R_a - K = K \left( \frac{b}{l} - 1 \right) = -K \frac{a}{l},$$

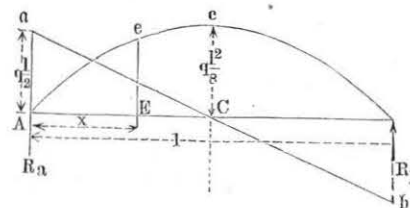
und sie behält diese Größe für die Strecke  $CB$  bei. Macht man daher nach einem gleichfalls beliebigen Maßstabe für die Schubkräfte (1 Millimeter =  $\nu$  Kilogramm)  $Aa = R_a = K \frac{b}{l}$ , zieht  $a c_1$  horizontal, macht ferner  $c_1 c_2 = K$  und zieht  $c_2 b$  horizontal, so erhält man in  $Aa c_1 c_2 b$  das Diagramm für die Schubkräfte.

Denkt man sich den Balkentheil links der Kraft  $K$  fest eingemauert, und das Ende  $B$ , Fig. 118, durch die Kraft  $K$  belastet, so ergibt sich ohne Weiteres das Moment in  $A$  zu

$M_a = Kl$ , während es für den Punkt  $E$  im Abstande  $x$  von  $A$  durch  $M_e = K(l - x)$  gegeben ist. Da hier der Balken concav nach oben gebogen wird, sind die Momente negativ, und man hat daher die Größe  $Aa = M_a$  nach abwärts anzutragen, um in  $aB$  die Begrenzung der Momente zu erhalten.

Die Schubkraft ist hier offenbar für jeden Querschnitt gleich  $K$  und nach oben gerichtet, daher die im Abstande  $Aa = K$  von der Axe gezogene Horizontale  $ab$  das Diagramm für die Schubkräfte ergibt.

Fig. 119.



Wenn dagegen der Balken  $AB$ , von der Länge  $l$ , Fig. 119, eine gleichmäßig über seine Länge verbreitete Last  $Q = ql$  zu tragen hat, so sind die Reaktionen der beiden Stützpunkte

$$R_a = R_b = q \frac{l}{2}$$



und für irgend einen Punkt  $E$  im Abstände  $x$  von  $A$  ist das Moment

$$M_x = q \frac{l}{2} x - q \frac{x^2}{2} = \frac{q}{2} (lx - x^2) \quad . \quad . \quad (3)$$

Man erhält daher die Darstellung der Momente durch die Parabel  $AeB$ , deren Scheitelhöhe in der Mitte  $C$

$$M_c = Cc = q \frac{l^2}{8} \text{ ist.}$$

Die Schubkraft ist in  $A$  gleich  $q \frac{l}{2}$  und in  $B$  gleich  $-q \frac{l}{2}$ , in der Mitte gleich Null, und die Gerade  $aCb$  giebt das Diagramm der Schubkräfte, denn aus (3) erhält man

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{q}{2} (l - 2x)$$

die Gleichung einer geraden Linie vom Neigungscoefficienten  $q$ .

Ebenso erhält man für ein Consol  $AB$ , Fig. 120, welches durch die gleichmäßig vertheilte Last  $Q = ql$  angegriffen wird, in  $E$  das Moment

Fig. 120.

$$M_x = q \frac{(l-x)^2}{2},$$

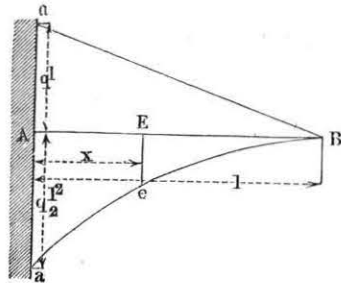
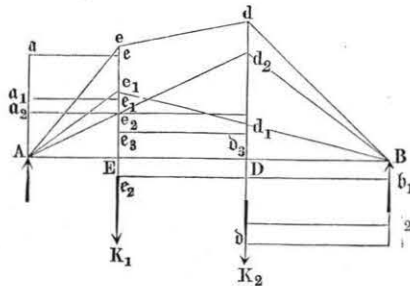


Fig. 121.



so daß man zu der Parabel  $AeB$ , mit dem Scheitel in  $B$  und der Ordinate  $Aa = q \frac{l^2}{2}$  in  $A$  als Diagramm der negativen Momente gelangt. Die Schubkräfte sind wieder durch die Gerade  $aB$  dargestellt.

Wenn ein Balken durch mehrere Belastungen beansprucht wird, so erhält man das Diagramm, wenn man in jedem Punkte die Ordinaten der Diagramme algebraisch addirt, welche den Einzelbelastungen zukommen. So erhält man z. B. für den Balken  $AB$ , Fig. 121, welcher in  $E$  und  $D$  durch die Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  angegriffen wird, die Begrenzung für die Momente in  $AedB$ , wenn man

$Ee = Ee_1 + Ee_2$  und  $Dd = Dd_1 + Dd_2$  macht, während die gebrochene Linie  $Aae_3b_3bb$  das Diagramm für die Schubkräfte ergibt, sobald man  $Aa = Aa_1 + Aa_2$ ,  $Ee_3 = Aa_2 - Ee_2$  und  $Bb = Bb_1 + Bb_2$  macht, und  $ae$ ,  $e_3b_3$  sowie  $bb$  horizontal zieht.

Ebenso erhält man für den Consolträger  $AB$ , Fig. 122, welcher der gleichmäßig vertheilten Belastung  $Q = ql$  und der Kraft  $K$  in  $B$  unter-

Fig. 122.

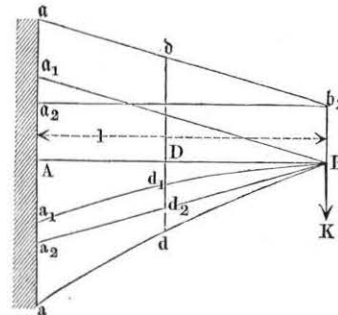


Fig. 123.

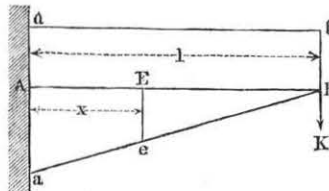
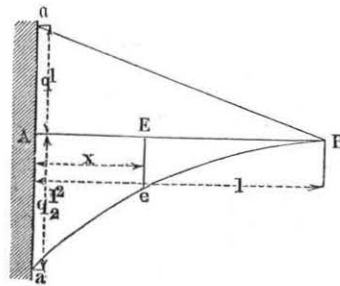


Fig. 124.



worfen ist, in  $adB$  die resultierende Momentencurve, wenn man für jeden Punkt wie  $D$  die Ordinate  $Dd$  gleich der Summe der Ordinaten  $Dd_1$  der Parabel und  $Dd_2$  der geraden Linie  $a_2B$  macht, durch welche bezw. die Momente der Last  $Q$  und der Kraft  $K$  allein dargestellt sind. Ferner hat man durch  $b_2$  eine Parallele  $a_2b_2$  mit  $a_1B$  zu ziehen, um die Größe der Schubkraft für jeden Punkt, z. B.  $D$  in  $Dd$ , zu erhalten.

Der Uebersichtlichkeit wegen sollen im Folgenden die hauptsächlichsten in der Praxis vorkommenden Belastungsarten des einfachen Balkens, wie solche in Thl. I näher besprochen sind, hier zusammengestellt, und die Größen der maximalen Biegemomente  $M_{max}$ , sowie der größten Durchbiegungen  $f$  dafür angegeben werden.

1. Der Balken ist an einem Ende  $A$ , Fig. 123, horizontal und unwandelbar befestigt, am anderen Ende  $B$  durch das Gewicht  $K$  belastet. Man hat für den Bruchquerschnitt bei  $A$

$$M_{max} = Kl,$$

und für die Durchbiegung am freien Ende bei  $B$ :

$$f = \frac{K}{3TE} l^3.$$

2. Derselbe Balken ist durch die gleichmäßig vertheilte Belastung  $Q = ql$ , Fig. 124 (a. v. S.), angegriffen. Der Bruchquerschnitt liegt auch hier an der Befestigungsstelle  $A$ , und hierfür ist

$$M_{max} = \frac{Ql}{2} = \frac{ql^2}{2},$$

während die größte Durchbiegung bei  $B$  sich bestimmt durch

$$f = \frac{Q}{8TE} l^3 = \frac{ql^4}{8TE}.$$

Fig. 125.

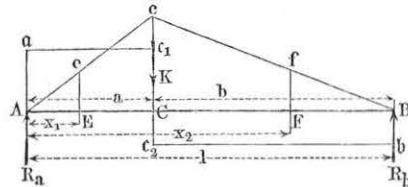


Fig. 126.

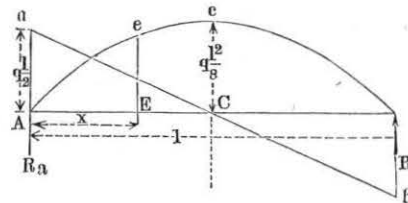
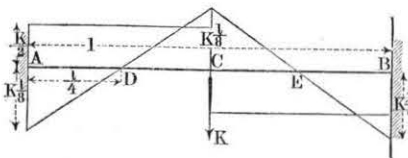


Fig. 127.



und die größte Durchbiegung, ebenfalls in der Mitte:

$$f = \frac{5}{8} \frac{Q}{48TE} l^3 = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{TE}.$$

5. Der Balken ist an beiden Enden  $A$  und  $B$  horizontal eingemauert, Fig. 127, und in der Mitte  $C$  durch ein Gewicht  $K$  belastet. Hier werden

3. Der auf zwei Stützen  $A$  und  $B$ , Fig. 125, frei aufruhende Balken ist in  $C$  in den Abständen  $a$  und  $b$  von den Enden durch  $K$  belastet, man hat dann in  $C$  das größte Moment:

$$M_{max} = K \frac{ab}{l}.$$

Greift die Kraft  $K$  in der Mitte an, ist also  $a = b$ , so erhält man daselbst

$$M_{max} = \frac{Kl}{4},$$

und die Durchbiegung:

$$f = \frac{K}{48TE} l^3.$$

4. Derselbe Balken ist gleichmäßig durch  $Q = ql$  belastet, Fig. 126. Man hat in der Mitte das größte Moment:

$$M_{max} = \frac{Ql}{8} = \frac{ql^2}{8},$$

durch die Einmauerung an den Enden  $A$  und  $B$  negative Momente von gleicher Größe mit dem positiven Maximalmomente in der Mitte  $C$  hervorgerufen, und man hat für jeden der drei Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  die absolute Größe des Biegemomentes:

$$M_{max} = \frac{Kl}{8}.$$

Die größte Durchbiegung tritt in der Mitte im Betrage ein:

$$f = \frac{1}{4} \frac{K}{48TE} l^3 = \frac{1}{192} \frac{K}{TE} l^3.$$

Die Schubkraft ist überall constant gleich  $\pm \frac{K}{2}$ . In  $D$  und  $E$ , in den Abständen  $\frac{l}{4}$  von den Enden ist das Moment gleich Null, also nach Gleichung II der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie unendlich groß, d. h. diese Linie ändert in diesen Punkten (Wendepunkten) ihre Krümmung aus der positiven in die negative.

Wenn hierbei die Kraft  $K$  nicht in der Mitte des Balkens, sondern in den Abständen  $a$  von  $A$  und  $b$  von  $B$  angreift, so sind die Reactionen in  $A$  und  $B$

$$R_a = Kb^2 \frac{b + 3a}{l^3}$$

und

$$R_b = Ka^2 \frac{a + 3b}{l^3};$$

und die negativen Momente daselbst:

$$M_a = K \frac{ab^2}{l^2}$$

und

$$M_b = K \frac{ba^2}{l^2},$$

während im Angriffspunkte  $c$  der Kraft ein positives Moment von der Größe

$$M_c = K \frac{2a^2b^2}{l^3}$$

auftritt. Das absolut größte Biegemoment gehört demjenigen Stützpunkte an, welchem die Kraft  $K$  am nächsten liegt.

6. Der an beiden Enden horizontal befestigte Balken wird durch eine gleichmäßig vertheilte Belastung  $Q = ql$  angegriffen, Fig. 128 (a. f. S.). Für die Mitte  $C$  hat man das Biegemoment:

$$M_c = \frac{Ql}{24} = \frac{ql^2}{24},$$

während an den Enden negative Momente von der doppelten Größe

$$M_a = M_b = \frac{Ql}{12} = \frac{ql^2}{12}$$

auftreten. Die größte Durchsenkung in der Mitte beträgt

$$f = \frac{1}{8} \frac{Q}{48 TE} l^3 = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{TE}.$$

Die Wendepunkte  $D$  und  $E$  stehen von den Endpunkten  $A$  und  $B$  um  $AD = BE = 0,2113 l$  ab.

Fig. 128.

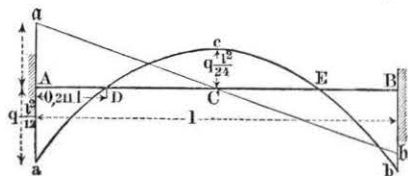
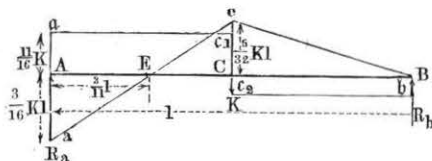


Fig. 129.



7. Der Balken  $AB$ , Fig. 129, ist einerseits in  $A$  horizontal eingeklemmt, andererseits in  $B$  frei unterstützt, und in der Mitte  $C$  durch  $K$  belastet. Hier sind die Reactionen in  $A$  und  $B$ :

$$R_a = \frac{11}{16} K;$$

$$R_b = \frac{5}{16} K.$$

Das größte (negative) Moment findet sich in  $A$  zu

$$M_a = M_{max} = \frac{3}{16} Kl,$$

während das Moment in der Mitte nur

$$M_c = \frac{5}{32} Kl$$

beträgt.

Der Inflexionspunkt  $E$  hat von  $A$  und  $B$  die bezw. Abstände

$$AE = \frac{3}{11} l \text{ und } BE = \frac{8}{11} l,$$

und die Durchsenkung in der Mitte beträgt

$$f = \frac{5}{8} \frac{K}{48 TE} l^3 = \frac{5}{384} \frac{K}{TE} l^3.$$

Sollen die Momente in  $A$  und  $C$  ihrer absoluten Größe nach gleich

werden, so hat man den Stützpunkt  $A$  um die Größe  $\frac{1}{144} \frac{K}{TE} l^3$  unter die Horizontale durch  $B$  zu legen, in welchem Falle

$$M_a = M_c = \frac{1}{6} Kl$$

wird.

Wenn die Last  $K$  nicht in der Mitte, sondern im Abstände  $a$  von  $A$  und  $b$  von  $B$  wirkt, so hat man die Stützreaction in  $B$ :

$$R_b = K \frac{3l - a}{2l^3} a^2$$

und das Biegemoment in der Verticalebene der Kraft:

$$M_c = K \frac{3l - a}{2l^3} a^2 b,$$

während in  $A$  ein negatives Moment

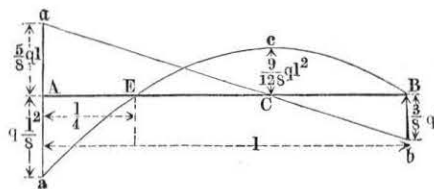
$$M_a = K \frac{2l^2 - 3al + a^2}{2l^2} a$$

zur Wirkung kommt.

8. Derselbe Balken wird durch das gleichmäßig vertheilte Gewicht  $Q = ql$  belastet, Fig. 130. Hier ist die Reaction auf die Stütze  $B$  durch

$$R_b = \frac{3}{8} Q = \frac{3}{8} ql$$

Fig. 130.



und das negative Moment an der Befestigungsstelle durch

$$M_a = \frac{1}{8} Ql = \frac{1}{8} ql^2$$

dargestellt. Der Wendepunkt  $E$  hat von  $A$  einen

Abstand  $AE = \frac{l}{4}$  und

in der Mitte  $C$  von  $BE$  findet sich das größte positive Moment

$$M_c = \frac{9}{128} Ql = \frac{9}{128} ql^2.$$

9. Der auf zwei Stützen  $A$  und  $B$  frei aufliegende Balken wird durch zwei gleiche Kräfte  $K$  in gleichen Abständen  $AC = BD = l_2$  von den Stützen angegriffen, Fig. 131, I und II, a. f. S. Die Reaction jeder Stütze ist hier

$$R_a = R_b = K,$$



das Moment ist zwischen den Stützen, Fig. I, und zwischen den Kraftangriffen, Fig. II, also für das mittlere Stück von der Länge  $l_1 = l - 2l_2$  von der constanten Größe  $K l_2$ , während für jedes Ende  $AC$  und  $BD$  die unter (1.) angegebenen Formeln gelten. Für das mittlere Stück ist wegen des constanten Momentes der Krümmungshalbmesser  $\rho$  überall von gleicher Größe

$$\rho = \frac{TE}{K l_2'}$$

d. h. die elastische Linie dieses Stückes ist ein Kreisbogen, dessen Bogenhöhe in der Mitte durch

$$f = \frac{l_1^2}{8\rho} = \frac{K l_2 l_1^2}{8 TE}$$

ausgedrückt ist.

Um diese Größe  $f$  erhebt sich in Fig. I die Mitte des Balkens über die Horizontale  $AB$ , während in Fig. II eine Senkung der Mitte um

$$f = \frac{K l_2}{TE} \left( \frac{l_1^2}{8} + \frac{l_1 l_2}{2} + \frac{l_2^2}{3} \right)$$

eintritt.

Schubkräfte treten nur in den Schenkeln  $AC$  und  $BD$  von der Größe  $K$  auf, für das mittlere Stück ist die Schubkraft gleich Null.

10. Derselbe Balken ist einer gleichmäßig über seine Länge verbreiteten Last  $Q = q(l_1 + 2l_2) = ql$  ausgesetzt, Fig. 132.

In diesem Falle ist die Reaction jeder Stütze

$$R_a = R_b = \frac{Q}{2} = \frac{ql}{2},$$

und das Moment über einer Stütze

$$M_a = M_b = \frac{ql_2^2}{2},$$

während in der Mitte  $E$  das Moment

$$M_e = q \frac{l_1^2 - 4l_2^2}{8} \text{ ist.}$$

Das Moment  $M_a$  über den Stützen wird gleich demjenigen  $M_e$  für die Mitte, wenn

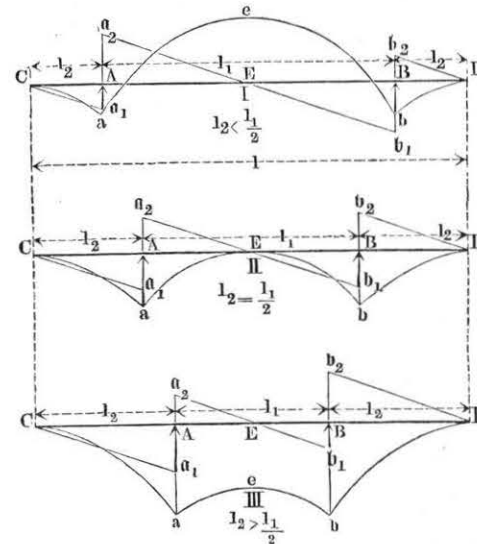
$$l_2 = l_1 \sqrt{\frac{1}{8}} = 0,3536 l_1$$

ist. Die Diagramme I, II und III der Figur 132 entsprechen bezw. den Verhältnissen

$$l_2 \leq \frac{l_1}{2}$$

In Betreff des Elasticitätsmoduls der verschiedenen Baumaterialien muß auf die in Thl. I enthaltenen Angaben verwiesen werden; es möge hier nur

Fig. 132.



bemerkt werden, daß man als höchste zulässige Zugspannung  $s_z$  und Druckspannung  $s_d$  für die verschiedenen hauptsächlich verwendeten Materialien etwa die folgenden Werthe\*) annehmen kann:

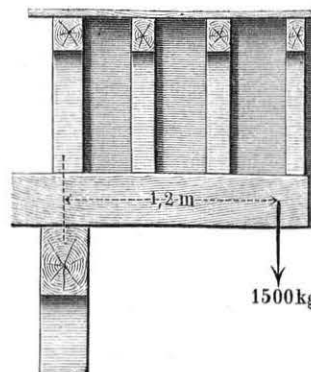
\*) Vergl. Deutsches Bauhandbuch. Berlin 1874, S. 235.

Höchstens zulässige Spannung pro Quadratmillimeter in Kilogrammen.

Baumaterial	Elasticitätsmodul $E$	Construction mit wenig Erschütterungen (Dächer)		Constructionen mit bedeutenden Erschütterungen (Brücken)	
		Zugspannung $s_z$	Druckspannung $s_d$	Zugspannung $s_z$	Druckspannung $s_d$
Schmiedeeisen . . .	20 000	13,4	13,4	6,7	5
Eisenblech . . . . .	18 000	12,0	—	6,0	—
Eisendraht . . . . .	22 000	21,5	—	10,7	—
Gusseisen . . . . .	10 000	4,0	7	2,7	4,8
Eichenholz . . . . .	1 200	1,6	1,4	0,8	0,8
Nadelholz . . . . .	1 300	2,0	1,5	1,0	0,75

Beispiele: Für eine Speicherwinde ist ein hölzerner Auslegerarm anzuordnen, welcher aus der Aufwindeluke, Fig. 133, um 1,2 m herausragt und am freien Ende einer Belastung von  $K = 1500$  kg unterworfen ist. Wie hoch hat

Fig. 133.



man die Höhe  $h$  des rechteckigen Querschnitts dieses Armes zu machen, wenn die Breite  $b$  gleich 180 mm gewählt wird, und die spezifische Faserspannung den Werth 0,8 kg nicht überschreiten soll?

Hier hat man, dem Fall (1) entsprechend:

$M_{max} = Kl = 1500 \cdot 1200$  mmkg, und da für den rechteckigen Querschnitt das Trägheitsmoment

$$T = \frac{b h^3}{12} \text{ und } \frac{T}{e} = \frac{b h^2}{6}$$

ist, so folgt mit  $s = 0,8$  nach der Gleichung I

$$1500 \cdot 1200 = 0,8 \frac{180 h^2}{6},$$

woraus

$$h = \sqrt[3]{\frac{60\,000}{0,8}} = \sqrt[3]{75\,000} = 274,$$

wofür rund 280 mm genommen werden kann. Nimmt man den Elastizitätsmodul des verwendeten Eichenholzes zu  $E = 1200$ , so erhält man die elastische Durchbiegung des Armes an seinem Ende zu

$$f = \frac{K}{3TE} l^3 = \frac{1500}{3 \frac{1}{12} 180 \cdot 280^3 \cdot 1200} = \frac{6000 \cdot 144}{18 \cdot 28^3} = 2,2 \text{ mm.}$$

2. Wie stark sind die hölzernen Stagenbalken für den Boden eines Speichers zu machen, dessen Auflast zu 600 kg und dessen Eigengewicht zu 250 kg pro Quadratmeter anzunehmen ist, wenn die einzelnen Balken 0,8 m von Mitte zu Mitte entfernt sind, und eine freie Länge von 5 m haben?

Die Belastung beträgt hier pro laufenden Meter  $q = 0,8 (250 + 600) = 680$  kg, daher hat man das größte Biegemoment in der Mitte, wenn die Balken an den Enden frei aufliegend angenommen werden:

$$M_{max} = \frac{680 \cdot 5}{8} = 5 \text{ mkg.}$$

Nimmt man eine Breite der Balken  $b = 0,18$  m und eine zulässige Spannung  $s = 1$  kg an, so folgt die erforderliche Balkenhöhe  $h$  in Millimetern aus

$$s \frac{b h^2}{6} = 1 \frac{180}{6} h^2 = \frac{680 \cdot 5}{8} = 5000 \text{ zu } h = 265 \text{ mm.}$$

Die Durchsenkung in der Mitte erhält man unter Zugrundelegung eines Elastizitätsmoduls für Tannenholz von  $E = 1300$  zu

$$f = \frac{5}{8} \frac{Q}{48TE} l^3 = \frac{5}{8} \frac{680 \cdot 5}{48 \frac{1}{12} 180 \cdot 265^3 \cdot 1300} = 15,3 \text{ mm.}$$

3. Die 3 m weite Einfahrt eines Wohnhauses soll durch einen schmiedeeisernen I-Träger überdeckt werden, dessen Dimensionen festzustellen sind. Die auf den Träger pro laufenden Meter entfallende Belastung setzt sich zusammen aus:

- 1) dem darauf ruhenden Mauerwerke von 10 m Höhe und durchschnittlich 2 Stein Stärke gleich  $2 \cdot 10 \cdot 220 = 4400$  kg;
- 2) dem Gewichte von zwei Zwischenböden von je 2,5 m Länge à 300 kg pro Quadratmeter gleich  $2 \cdot 2,5 \cdot 300 = 1500$  kg;
- 3) dem Gewichte der auf den Träger entfallenden Dachfläche mit  $2,5 \cdot 250 = 625$  kg.

Die gesammte Belastung pro Meter beträgt  $q = 6525$  kg oder für den Träger von 3 m Länge

$$Q = 3 \cdot 6525 = 19\,575 = \text{rot } 20\,000 \text{ kg.}$$

Wenn der Balken an seinen Enden wegen der Einmauerung als unwandelnbar befestigt angesehen wird, so erhält man, entsprechend der unter (6) angeführten Belastungsart, das größte Moment an den Einmauerungsstellen:

$$M_{max} = \frac{Ql}{12} = \frac{20\,000 \cdot 3}{12} = 5000 \text{ mkg.}$$

Soll nun der gewalzte Träger eine Höhe  $h = 300$  mm erhalten, und sieht man von der Tragfähigkeit der Mittelrippe ab, so kann man, unter  $b$  die Breite und unter  $d$  die Dicke jedes der beiden Flanschen verstanden,  $\frac{T}{e} = h b d$  setzen (s. weiter unten §. 45), und man erhält mit  $s = 8$  kg aus

$$8 \cdot 300 \cdot b d = 5000 \cdot 1000$$

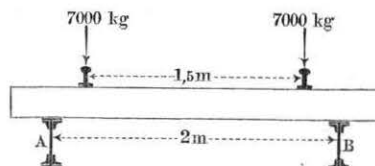
den Flanschenquerschnitt  $b d = 2083$  qmm. Setzt man eine Dicke der Flanschen  $d = 16$  mm voraus, so erhält man daher die erforderliche Breite

$$b = \frac{2083}{16} = 130 \text{ mm}$$

(s. über gewalzte I-Träger auch §. 45).

4. Wenn auf einer Brücke die Eisenbahnschwellen auf sogenannten Schwellenträgern  $A, B$ , Fig. 134, aufliegen, deren Abstand 2 m beträgt, wie stark wird man die 0,25 m breiten eichenen Schwellen zu machen haben, wenn die größte Belastung einer Schwelle durch darüber stehende Triebräder einer Locomotive von je 7000 kg Gewicht ausgeübt wird, und die Entfernung der Schienen von Mitte zu Mitte 1,5 m beträgt? Hier hat man, entsprechend der unter (9) ange-

Fig. 134.



gebenen Belastungsart  $l_1 = 1,5$  und  $l_2 = 0,25$  m, daher

$$M_{\max} = K l_2 = 7000 \cdot 0,25 = 1750 \text{ mkg},$$

somit folgt bei einer zulässigen Spannung  $s = 0,8$  kg die gesuchte Höhe  $h$  aus  $0,8 \frac{1}{6} 250 h^2 = 1750 \cdot 1000$  zu

$$h = \sqrt{\frac{6 \cdot 1750 \cdot 1000}{0,8 \cdot 250}} = \sqrt{52500} = 229 \text{ mm} = \text{rot } 230 \text{ mm}.$$

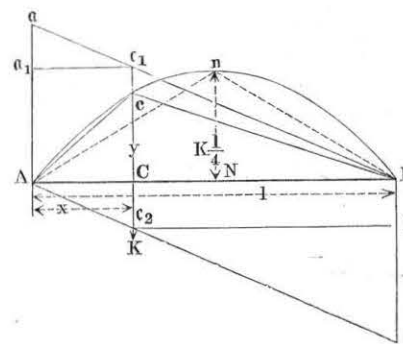
Mit einem Elastizitätsmodul  $E = 1200$  erhält man die Durchbiegung in der Mitte der Schwelle

$$f = \frac{K l_2}{T E} \left( \frac{l_1^2}{8} + \frac{l_1 l_2}{2} + \frac{l_2^2}{3} \right) = \frac{7000 \cdot 250}{\frac{1}{12} 250 \cdot 230^3 \cdot 1200} \left( \frac{1500^2}{8} + \frac{1500 \cdot 250}{2} + \frac{250^2}{3} \right) = \frac{0,07}{23^3} 489580 = 2,8 \text{ mm}.$$

§. 36. **Bewegliche Belastung.** Die vorstehend gemachten Angaben über die Größe der Momente und Schubkräfte von Balken beruhen auf der Annahme einer ruhenden Belastung. Bei sehr vielen Ausführungen, so insbesondere bei allen Brückenträgern, kommt indessen der Fall vor, daß gewisse Belastungen über den Balken in seiner Längsrichtung verschoben werden, und es ist leicht ersichtlich, daß mit einer solchen Verschiebung der Belastung die Größe der Biegemomente sowie der Scherkräfte für jeden Punkt des

Balkens einer Veränderung unterworfen sein muß. Es ist daher, behufs der Herstellung einer stabilen Construction erforderlich, für jeden Querschnitt des Balkens diejenige Laststellung zu kennen, welche für diesen Querschnitt die ungünstigste Beanspruchung, d. h. den größtmöglichen Werth des Momentes  $M$  und der Schubkraft  $V$  hervorruft.

Fig. 135.



Es sei zu dem Ende wieder  $AB$ , Fig. 135, ein auf zwei Stützen  $A$  und  $B$  frei aufliegender Balken, auf welchen in  $C$ , im Abstände  $x$  von  $A$ , die concentrirte Last  $K$  einwirkt. Dieselbe erzeugt in  $C$  das Biegemoment

$$M_c = K \frac{AC \cdot BC}{AB} = K \frac{x(l-x)}{l}, \quad (1)$$

und man erhält, wenn man diese Größe gleich  $Cc$  aufträgt, in dem Dreiecke  $AcB$  die Momentenfläche des Balkens für diese Belastung. Es ist klar, daß für diese Belastung das größte Moment in der Verticalebene durch  $C$  auftritt, in welcher die Kraft wirkt, und da die getroffene Wahl des Kraftangriffes  $C$  beliebig ist, so wird die obige Bemerkung für jede Lage der Kraft  $K$  gelten, d. h. es wird bei einer Verschiebung der Belastung  $K$  das größte zugehörige Biegemoment immer in demjenigen Querschnitte auftreten, in welchem die Kraft angreift. Selbstredend ist der Werth dieses größten Momentes

$$M = K \frac{x(l-x)}{l}$$

mit der Verschiebung der Last veränderlich, und man erkennt aus der vorstehenden Gleichung

$$M = y = Kx - \frac{K}{l} x^2,$$

daß bei der Verschiebung der Last von  $A$  nach  $B$  der Endpunkt  $c$  der das Moment darstellenden Ordinate  $Cc$  eine Parabel  $AcB$  beschreibe, deren Scheitel in der Mitte  $N$  zwischen  $A$  und  $B$ , also für  $x = \frac{l}{2}$  die Ordinate

$$M_n = K \frac{l}{4} \text{ hat.}$$



Zeichnet man diese Parabel  $AnB$ , so erhält man für jeden beliebigen Punkt  $C$  mit der Abscisse  $x$  in der Ordinate  $y$  das Maß für das größtmögliche durch  $K$  in  $C$  hervorgerufene Moment, welches mit  $\max M_x$  bezeichnet sein mag. Es folgt auch, daß in der Mitte  $N$  das absolut größte Moment  $\max M$  eintritt, welches die Last  $K$  überhaupt in dem Balken erzeugt, und zwar bei ihrer mittleren Stellung, bei welcher Stellung jedoch das Biegemoment für jeden anderen Querschnitt kleiner ausfällt, als das diesem Querschnitte eigenthümliche Maximalmoment  $\max M_x$ . Letzteres erkennt man sofort, wenn man das der mittleren Laststellung zugehörige Momentendreieck  $AnB$  zeichnet, welches ganz innerhalb der Parabel gelegen ist.

Wirkt die Last  $K$  in dem Punkte  $C$ , so sind die Auflagerreactionen in  $A$  und  $B$  und daher auch die Verticalkräfte in den Strecken  $AC$  und  $BC$ , bezw. durch

$$R_a = A a_1 = K \frac{l - x}{l} \quad (2)$$

und

$$R_b = B b_2 = K \frac{x}{l} \quad (3)$$

gegeben. Trägt man daher in  $A$  und  $B$  die Strecken  $Aa$  und  $Bb$  nach dem Kräftemaßstabe gleich  $K$  auf, und vervollständigt das Parallelogramm  $AaBb$ , so erhält man für irgend eine Stellung der Kraft  $K$  in  $C$  durch die beiden Abschnitte  $Cc_1$  und  $Cc_2$  der Krafttrichtung zwischen der Axe  $AB$  und den beiden geneigten Parallelogrammseiten die Größen der Schubkräfte für die Balkenstrecken beiderseits von  $K$ , denn es ist alsdann:

$$Cc_1 = K \frac{l - x}{l} = R_a$$

und

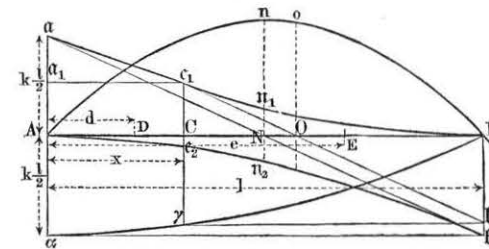
$$-Cc_2 = K \frac{x}{l} = R_b.$$

Die beiden Geraden  $Ab$  und  $Ba$  geben daher über die Schubkraft im Balken für jede beliebige Stellung der Last Aufschluß.

Setzt man ferner voraus, daß die bewegliche Last nicht in einem Punkte concentrirt, sondern der Länge nach gleichmäßig vertheilt und pro Längeneinheit gleich  $k$  sei, wie dies etwa für einen Eisenbahnzug angenommen werden kann, welcher über eine Brücke fährt, so ist leicht zu ersehen, daß das größte Biegemoment für irgend welchen Querschnitt  $C$ , Fig. 136, sich dann einstellt, wenn der Träger seiner ganzen Länge  $l$  nach mit der gleichmäßigen Last bedeckt ist. Denn wo man sich auch ein Belastungselement  $k \partial x$  denken mag, in  $D$  oder  $E$ , immer wird dasselbe, wie jede isolirte Belastung, in dem Querschnitte  $C$  ein positives

Biegemoment hervorrufen, und daher wird das größte Moment in  $C$  sowie in jedem anderen Querschnitte erzeugt werden, sobald sämtliche Balkenelemente belastet sind. Daher ergibt die Parabel  $AnB$  mit der Scheitelordinate  $Nn = k \frac{l^2}{8}$  in der Mitte, welche als Momentenfläche für eine ruhende gleichmäßig vertheilte Last  $kl$  gilt, in allen ihren Ordi-

Fig. 136.



naten auch das Maximum der Momente, die in den zugehörigen Querschnitten durch die bewegliche Belastung  $k$  erzeugt werden können.

Anders verhält es sich mit den größten Werthen der Scheerkraft. Man erkennt nämlich, daß in Betreff irgend eines Punktes, wie  $C$ , jede Belastung eines Elementes zwischen  $C$  und  $B$ , z. B. in  $E$ , einen Zuwachs der Reaction  $R_a$  und somit der Scheerkraft in  $C$  hervorbringt, während die Belastung eines Elementes, wie  $D$ , zwischen  $C$  und  $A$  die Schubkraft in  $C$  vermindert. Durch eine derartige elementare Belastung  $k \partial x$  in  $E$  wird nämlich die Reaction  $R_a$ , also auch die Scheerkraft in  $C$  um

$$k \partial x \frac{l - e}{l},$$

also um eine positive Größe vermehrt, während diese Belastung in  $D$  einen Beitrag zur Scheerkraft in  $C$  von

$$k \partial x \frac{l - d}{l} - k \partial x = -k \partial x \frac{d}{l},$$

also eine negative Größe liefert. Daraus geht hervor, daß man in  $C$  die größte positive Schubkraft  $\max V_c$  erhält, wenn die Strecke  $l - x$  von  $C$  bis  $B$  mit der Last bedeckt ist. Die Größe dieses Maximums ergibt sich dann zu

$$R_a = k (l - x) \frac{l - x}{2l} = \frac{k}{2l} (l - x)^2 \quad (4)$$

Denkt man sich diese Werthe für alle Querschnitte berechnet und nach

dem Kräftemaßstabe als Ordinaten, wie  $Cc_1$ , in  $C$  aufgetragen, so erhält man für die Maxima der positiven Scheerkräfte als Begrenzungslinie die Parabel  $a c_1 B$  mit verticaler Aze, deren Scheitel in  $B$  liegt, und deren Ordinate in  $A$  für  $x = 0$  zu

$$V_a = \frac{k l}{2}$$

sich bestimmt. Die Schubkraft in der Mitte ist

$$N n_1 = \frac{k l}{8}.$$

Wenn in  $C$  die maximale Scheerkraft

$$\max V_c = C c_1 = k \frac{(l-x)^2}{2 l}$$

austritt, d. h. wenn die Strecke  $CB$  mit der Last gleichförmig bedeckt ist, so hat man die Schubkraft in  $B$ :

$$R_b = R_a - k(l-x) = \frac{k}{2l}(l-x)^2 - k(l-x) = \frac{k}{2l}x^2 - \frac{kl}{2}. \quad (5)$$

Wenn man daher diese (negative) Größe in  $B$  abwärts gleich  $B b_1$  anträgt,  $b_1$  mit  $c_1$  durch eine Gerade verbindet, und durch  $c_1$  die Horizontale  $c_1 a_1$  zieht, so erhält man, wie leicht ersichtlich ist, in der Fläche  $A a_1 c_1 O b_1 B$  das Diagramm für die Scheerkräfte des Balkens in dem betrachteten Zustande einer Belastung der Strecke  $BC$ . Der Schnittpunkt  $O$ , in welchem hierbei die Schubkraft gleich Null ist, legt dann den Querschnitt fest, in welchem, gleichfalls bei der gedachten Belastung, das größte Biegemoment auftritt, welches letztere jedoch nach dem Vorstehenden denjenigen Werth  $O o$  noch nicht erreicht hat, den das Biegemoment in  $O$  im ungünstigsten Falle, d. h. bei voller Belastung des Balkens erreichen kann.

Es mag bemerkt werden, daß, wenn man die Größe der Schubkraft in  $B$

$$B b_1 = \frac{k}{2l}x^2 - \frac{kl}{2}$$

in  $C$  abwärts gleich  $C \gamma$  anträgt, und diese Construction für alle Querschnitte ausgeführt denkt, die so erhaltenen Punkte  $\gamma$  eine Parabel  $a \gamma B$  mit verticaler Aze festlegen, deren Scheitel  $\alpha$  um  $\frac{kl}{2}$  unter  $A$  gelegen ist, und welche Parabel dazu dienen kann, das Schubkraftdiagramm für irgend welche Belastung des Balkens zu zeichnen.

Eine ganz analoge Betrachtung, wie sie vorstehend zur Ermittlung der größten positiven, d. h. aufwärts gerichteten Scheerkraft angestellt worden ist, gilt auch hinsichtlich der größten negativen (abwärts wirkenden) Schubkraft, und man erhält dieselbe offenbar für irgend einen Querschnitt  $C$  in

demjenigen Belastungszustande, in welchem die Strecke zwischen  $C$  und  $A$  mit der Belastung  $kx$  bedeckt ist. Es bedarf keines näheren Beweises, daß man durch eine derartige Betrachtung zu einer Parabel  $A n_1 b$  gelangt, welche für jeden Punkt  $C$  in ihrer Ordinate  $C c_2$  das Maximum der negativen Schubkraft des Querschnittes  $C$  ergibt. Diese Parabel, deren Aze ebenfalls vertical ist, hat in  $A$  ihren Scheitel und ihre Ordinate in  $B$  ist gleich  $B b = k \frac{l}{2}$ . Für diese Linie, sowie für die Verzeichnung der Schub-

kraftdiagramme gelten die nämlichen Bemerkungen, welche für die Maxima der positiven Scheerkräfte hinsichtlich der Parabel  $a n_1 B$  gemacht wurden. Es ist auch klar, daß, wenn man für irgend welchen Querschnitt  $C$  einmal die der größten positiven Schubkraft zukommende Belastung der Strecke  $BC$  und ein anderes Mal die der größten negativen Scheerkraft angehörige Belastung der Strecke  $AC$  voraussetzt, und die beiden Diagramme mit einander vereinigt, als Resultat das für die gleichförmig über den ganzen Balken vertheilte ruhende Belastung  $kl$  der Fig. 126 geltende Diagramm erhalten wird.

In Wirklichkeit sind die Brückenträger sowohl einer ruhenden oder permanenten Belastung durch das Eigengewicht der Construction, als auch einer beweglichen oder Verkehrsbelastung ausgesetzt. Es handelt sich daher darum, für jeden Querschnitt die ungünstigste Anstrengung zu ermitteln, welche aus diesen beiden Belastungen resultirt. Hierbei kann man in der Regel die permanente Belastung als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte ansehen, und es möge dieselbe im Folgenden gleich  $p$  Kilogramm per Längeneinheit (1 m) angenommen werden. Die bewegliche Belastung kann entweder eine in einem Punkte concentrirte Last  $K$  sein, wie dies etwa bei einem über eine Brücke fahrenden Frachtwagen angenommen werden darf, dessen Gewicht man in seinem Schwerpunkte concentrirt denkt, oder die bewegliche Last ist ebenfalls als gleichmäßig vertheilt zu denken. Die letztere Annahme, welche z. B. für die Belastung durch ein Menschengebränge zutrifft, wird meistens auch dann zu Grunde gelegt, wenn die Verkehrslast aus einer Reihe auf einander folgender Einzellaften besteht, wie dies beispielsweise bei einem Eisenbahnzuge der Fall ist, dessen einzelne Azen ebenso vielen concentrirten Kräften entsprechen. Für diesen Fall pflegt man meistens mit Rücksicht auf das in §. 34 hierüber Gesagte die wirkliche Belastung durch den Eisenbahnzug durch eine entsprechende gleichmäßig vertheilte Last zu ersetzen, eine Annahme, die um so mehr zulässig ist, je länger der Träger in Bezug auf die Entfernung der Azen von einander ist.

Es sei  $AB$ , Fig. 137 (a. f. S.), ein Träger von der Länge  $l$ , welcher durch das Eigengewicht der Construction mit dem Betrage  $pl$  belastet ist, so stellt nach dem Vorstehenden die Parabel  $A n_1 B$  die Momente und

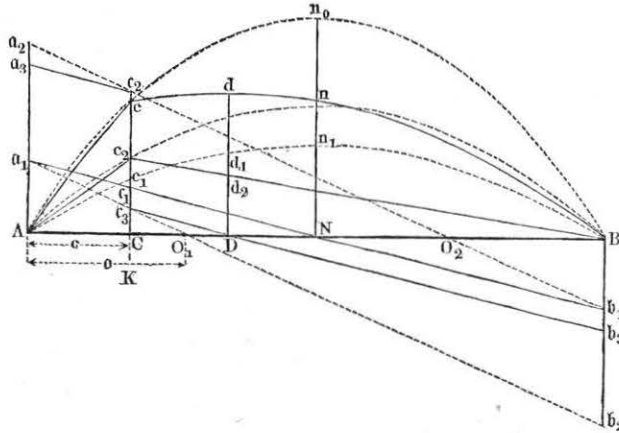
die Gerade  $a_1 b_1$  die Schubkräfte für alle Querschnitte des Trägers vor, wenn

$$N n_1 = p \frac{l^2}{8} \text{ und } A a_1 = B b_1 = p \frac{l}{2}$$

ist. Denkt man sich nun die concentrirte Belastung  $K$  über  $A$  hereintretend, bis  $C$  im Abstände  $AC = c$  von  $A$  bewegt, so erhält man, wenn

$$C c_2 = K \frac{c(l-c)}{l}$$

Fig. 137.



gemacht wird, in dem Dreiecke  $A c_2 B$  das Diagramm für die durch  $K$  hervorgerufenen Momente in jedem Punkte des Trägers. Wenn man nunmehr die beiden Diagramme  $A n_1 B$  und  $A c_2 B$  durch Addition ihrer Ordinaten vereinigt, indem man für jeden Punkt wie  $C$

$$C c = C c_1 + C c_2$$

macht, so liefert die entstehende Curve  $A c n B$  das Diagramm für das resultierende Moment, welches in jedem Punkte durch die vorausgesetzte Belastung  $p l$  und  $K$  in  $C$  erzeugt wird. Es ist leicht, nach dem Vorhergegangenen zu erkennen, daß diesem Belastungszustande auch das größte Moment  $C c$  entspricht, welches bei der Ueberführung der Last in dem Querschnitte  $C$  jemals erzeugt werden kann. Wenn man daher durch  $A$ ,  $c_2$  und  $B$  die Parabel für die Maximalmomente von  $K$  zeichnet, deren Gleichung (1) nach dem Vorstehenden durch

$$y_2 = K \frac{x(l-x)}{l} = K x - \frac{K}{l} x^2$$

gegeben ist, so erhält man durch die Vereinigung der beiden Parabeln  $A n_1 B$  und  $A c_2 B$  eine neue Parabel  $A n_0 B$ , welche für jeden Querschnitt das größtmögliche Moment darstellt, das in demjenigen Augenblicke auftritt, in welchem die bewegliche Last  $K$  diesen Querschnitt erreicht hat. Diese Parabel muß daher auch den Punkt  $c$  in sich aufnehmen. Da die Ordinaten der Parabel  $A n_1 B$  durch

$$y_1 = p \frac{l}{2} x - p \frac{x^2}{2} = \frac{p}{2} (l x - x^2) \quad \dots \quad (6)$$

ausgedrückt sind, so hat man diejenigen der resultirenden Parabel  $A n_0 B$  gleich

$$y = y_1 + y_2 = \left( \frac{p}{2} + \frac{K}{l} \right) (l x - x^2) \quad \dots \quad (7)$$

Man erkennt hieraus, daß man für die Maximalmomente dieselben Werthe erhält, welche sich für einen Träger ergeben würden, welcher einer gleichmäßig vertheilten Belastung von der Größe

$$q = p + 2 \frac{K}{l}$$

pro Längeneinheit ausgesetzt wäre.

Ebenso findet sich die Schubkraft in  $C$  als die algebraische Summe der beiden Schubkraftcomponenten, welche durch die gleichmäßig vertheilte Belastung  $p l$  und durch die Einzelkraft  $K$  erzeugt werden. Diese Componenten sind bekanntlich durch

$$V_1 = p \left( \frac{l}{2} - c \right) \text{ und } V_2 = K \frac{l-c}{l}$$

ausgedrückt. Macht man daher  $A a_1 = B b_1 = p \frac{l}{2}$  und zieht  $a_1 b_1$ , so erhält man in  $C c_1$  das Maß für

$$V_1 = p \left( \frac{l}{2} - c \right).$$

Wenn man ferner  $a_1 a_2 = b_1 b_2 = K$  anträgt, und  $a_2 b_1$  sowie  $a_1 b_2$  zieht, so erhält man in  $c_1 c_2$  die Reaction in  $A$  oder die Schubkraft

$$V_2 = K \frac{l-c}{l},$$

welche durch  $K$  in der Strecke  $AC$  erzeugt wird, so daß  $C c_2 = V$  die ganze Schwerkraft in  $C$  bedeutet.

Offenbar wird auch diese Schwerkraft für  $C$  zu einem Maximum, wenn die Kraft  $K$  in diesem Querschnitte wirkt. Da diese Betrachtung für jeden anderen Querschnitt ebenso gilt, wie für denjenigen durch  $C$ , so kann man



das Viereck  $Aa_2b_1B$  als das Diagramm für die Schubkräfte ansehen, welche bei einer Bewegung der Last  $K$  über den Träger in der links von der Last befindlichen Strecke auftreten. Es ist ebenso zu erkennen, daß die Gerade  $a_1b_2$  in gleicher Art die Schubkraft in dem rechts von  $K$  befindlichen Balkentheile angiebt. Zieht man ferner durch  $c_2$  und  $c_3$  zu  $a_1b_1$  die Parallelen  $c_2a_3$  und  $c_3b_3$ , so erhält man durch  $Aa_3c_2c_3b_3B$  die graphische Darstellung der Schubkräfte in jedem Querschnitte für den Fall, daß die Last  $K$  bis zu dem Punkte  $C$  vorgerückt ist. Man erkennt hieraus, daß in dem Durchschnittspunkte  $D$  dieses Diagramms mit der Axe  $AB$  die Schubkraft gleich Null ist, und daß diesem Querschnitte  $D$  daher das Maximalmoment  $Dd$  zukommt, welches durch die vorausgesetzte Belastung in dem Balken hervorgerufen wird. Eine Betrachtung der Figur lehrt nun ohne Weiteres Folgendes. Wenn die Last  $K$  von links kommend den Stützpunkt  $A$  erreicht, findet sich das größte Biegemoment  $Nn_1$  in der Mitte  $N$  des Balkens. Bei weiterem Vorrücken der Last  $K$  nach rechts geht der Punkt, in welchem das größte Moment sich einstellt, der Last  $K$  entgegen, und ist z. B. nach  $D$  gelangt, sobald  $K$  nach  $C$  getreten ist, bis dieser Punkt mit der Last in  $O_1$  zusammenfällt. Bei weiterer Bewegung der Last nach rechts fällt der Punkt des Maximalmomentes stets mit dem Angriffspunkte von  $K$  zusammen, bis beide durch die Mitte  $N$  hindurch nach dem Punkte  $O_2$  gelangt sind. Wird die Last noch weiter bewegt, so kehrt der Punkt des Maximalmomentes seine Bewegung um und erreicht die Mitte  $N$ , sobald  $K$  den jenseitigen Stützpunkt  $B$  erreicht hat. Die Ähnlichkeit dieses Vorganges mit dem in §. 26 bei der unsymmetrischen Belastung der Gewölbe untersuchten fällt in die Augen. Es ist auch aus der Figur leicht die Entfernung  $AO_1 = o$  des Punktes  $O_1$  zu bestimmen, bis zu welchem die Verschiebung des Maximalmomentes nach jeder Seite der Mitte stattfindet, wenn man die beiden Schubkräfte einander gleichsetzt, die in diesem Punkte durch die gleichmäßig vertheilte Belastung  $pl$  und durch die Einzellast  $K$  in  $O_1$  erzeugt werden. Diese Gleichsetzung liefert:

$$p \left( \frac{l}{2} - o \right) = K \frac{o}{l},$$

woraus

$$o = \frac{1}{2} \frac{pl^2}{K + pl} \quad (8)$$

folgt. Dieses Maximalmoment in  $O$  ist dann

$$M_0 = \frac{p}{2} (lo - o^2) + Ko \frac{l - o}{l} \quad (9)$$

Ebenso findet sich für die Stellung der Kraft  $K$  in  $C$  der Abstand  $AD = d$  für den Querschnitt des Maximalmomentes durch

$$p \left( \frac{l}{2} - d \right) = K \frac{c}{l}$$

zu

$$d = \frac{l}{2} - \frac{K}{pl} c, \quad (10)$$

welche Gleichung nach dem Vorstehenden nur für eine Größe von  $c$  gilt, die kleiner als  $o$  ist. Das Moment an dieser Stelle, im Abstände  $d$  von  $A$ , ist dann ausgedrückt durch

$$M_d = \frac{p}{2} (ld - d^2) + Kc \frac{l - d}{l} \quad (11)$$

Wenn die bewegliche Last ebenfalls als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte von der Größe  $k$  pro Längeneinheit anzusehen ist, so folgt aus dem Vorstehenden ohne Weiteres, daß in jedem Querschnitte des Balkens

das größte Moment eintritt, sobald die bewegliche Last die ganze Trägerlänge bedeckt. Wenn man daher in Fig. 138 die beiden Parabeln  $An_1B$  und  $An_2B$ , deren Pfeilhöhen bezw. durch

$$Nn_1 = \frac{pl^2}{8}$$

und

$$Nn_2 = \frac{kl^2}{8}$$

gegeben sind, vereinigt, so erhält man in der resultirenden Parabel

$AnB$ , deren Pfeilhöhe  $Nn = (p + k) \frac{l^2}{8}$  ist, die Curve für das Maximalmoment in jedem Querschnitte. Die größte Schubkraft in irgend einem Querschnitte  $C$  wird dagegen wieder stattfinden, wenn die Strecke  $BC$  mit der Last  $k(l - c)$  bedeckt ist, und zwar erhält man die Curve  $an_1O_2b_1$  für die größten Schubkräfte durch Vereinigung der Geraden  $a_1b_1$ , welche dem Eigengewichte  $pl$  entspricht, mit der Parabel  $a_2n_1B$ , welche nach dem Vorstehenden die größten durch die bewegliche Last erzeugten Schubkräfte ergiebt, und deren Scheitel in  $B$  liegt, während die Ordinate in  $A$  zu

$A a_2 = k \frac{l}{2}$  gefunden wurde. Die Schubkraft in  $C$  bestimmt sich nach (4) zu

$$V = Cc = Cc_1 + Cc_2 = p \left( \frac{l}{2} - c \right) + k \frac{(l - c)^2}{2l} \quad (12)$$

In gleicher Weise erhält man für die größten negativen Schubkräfte die Curve  $a_1 O_1 n_2 b$  durch Vereinigung der Geraden  $a_1 b_1$  mit der Parabel  $A n_2 b_2$ .

In Betreff der Lage des Maximalmomentes für eine bestimmte Laststellung und in Bezug auf die Verschiebung desselben aus der Mitte um  $NO_1 = NO_2$ , bei einer Ueberführung der Belastung über den Träger gelten ganz ähnliche Betrachtungen, wie sie zuvor für eine Einzellast angeführt worden sind. Die Größe dieser Verschiebung nach jeder Seite  $NO_1 = NO_2 = \frac{l}{2} - o$  bestimmt sich wieder durch Gleichsetzung der betreffenden entgegengesetzten Schubkräfte aus der Gleichung

$$p \left( \frac{l}{2} - o \right) = k \frac{o^2}{2l}$$

oder

$$o^2 + 2l \frac{p}{k} o = l^2 \frac{p}{k}$$

zu

$$o = -l \frac{p}{k} + \sqrt{l^2 \left( \frac{p}{k} \right)^2 + l^2 \frac{p}{k}} = l \left( -n + \sqrt{n^2 + n} \right) \quad (8^a)$$

wenn das Verhältniß  $\frac{p}{k}$  mit  $n$  bezeichnet wird, und man hat für die Größe des Momentes in diesem Punkte  $O$ , wenn die Last bis dahin vorgerückt ist, ähnlich wie oben:

$$M_0 = \frac{p}{2} (lo - o^2) + k \frac{o^2}{2l} (l - o) \dots \dots \dots (9^a)$$

Innerhalb der Strecke  $O_1 O_2$ , in welcher bei der Bewegung der Last das Maximalmoment in der vorgedachten Art sich verschiebt, fällt die verticale Scheerkraft je nach der Stellung der Last bald positiv bald negativ aus, während in den Querschnitten der Strecke  $O_1 A$  stets nur positive (aufwärts gerichtete) und in denjenigen der Strecke  $O_2 B$  stets nur negative (abwärts wirkende) Schubkräfte auf das rechts von der Querschnittsebene gelegene Balkenstück wirken. In welcher Weise diese Eigenschaft auf die Construction des Balkens innerhalb dieser Strecke  $O_1 O_2$  von Einfluß ist, wird sich später aus der Betrachtung der Fachwerksträger ergeben.

Beispiel. Nimmt man für eine eingleisige Eisenbahnbrücke von  $l = 32$  m das Eigengewicht der Brücke nach Schwedler (s. §. 34) zu  $30l + 800 = 1760$  kg, also für jeden Träger 880 oder rund 900 kg pro Meter an, und setzt eine Ver-

kehrslast der Brücke von 5000 kg, also für jeden Träger  $k = 2500$  kg voraus, so erhält man nach dem Vorstehenden folgende Resultate:

Daß absolut größte Moment, welches sich in der Mitte des Trägers bei dessen voller Belastung einstellt, ist

$$M_{max} = (p + k) \frac{l^2}{8} = (0,9 + 2,5) \frac{32^2}{8} = 435,2 \text{ Meter-tonnen,}$$

und die größte Scheerkraft beträgt in diesem Falle über den Stützen

$$V_{max} = \pm (p + k) \frac{l}{2} = 3,4 \cdot 16 = 54,4 \text{ Tonnen.}$$

Die Entfernung  $o$ , bis auf welche sich das Maximalmoment beiderseits den Stützen in Folge der Lastbewegung nähert, beträgt nach (8<sup>a</sup>):

$$o = 32 \left[ -\frac{0,9}{2,5} + \sqrt{\left( \frac{0,9}{2,5} \right)^2 + \frac{0,9}{2,5}} \right] = 10,85 \text{ m.}$$

Die Verschiebung des größten Momentes beträgt daher nach jeder Seite von der Mitte

$$\frac{l}{2} - o = 16 - 10,85 = 5,15 \text{ m.}$$

Ist die Last um die Länge  $o = 10,85$  m über ein Auflager vorgerückt, so hat das Moment in dem Querschnitte an dieser Stelle nach (9<sup>a</sup>) den Werth:

$$M_0 = \frac{p}{2} (lo - o^2) + k \frac{o^2}{2l} (l - o) = 0,45 (32 \cdot 10,85 - 10,85^2) + 2,5 \frac{10,85^2}{64} \cdot 21,15 \\ = 103,275 + 97,237 = 200,5 \text{ Meter-tonnen.}$$

Dieser Werth ist natürlich kleiner als das dem Punkte  $O$  zukommende Maximalmoment bei voller Belastung des Trägers

$$\max M_0 = \frac{p + k}{2} (lo - o^2) = 1,7 (32 \cdot 10,85 - 10,85^2) \\ = 390 \text{ Meter-tonnen.}$$

Die Schubkraft des Trägers in der Mitte, welche bei voller Belastung zu Null wird, nimmt dagegen für den Fall, daß die Last um die Größe  $o$  über eine Stütze vorgerückt ist, den Werth

$$V = \pm k \frac{o^2}{2l} = 2,5 \frac{10,85^2}{64} = 4,6 \text{ Tonnen}$$

an. Die größte Schubkraft dagegen wird in der Mitte eintreten, wenn eine Hälfte der Brücke mit der Last bedeckt ist, und man hat hierfür nach (4):

$$V_{max} = \frac{k l}{8} = 2,5 \cdot 4 = 10 \text{ Tonnen u. s. w.}$$

**Balken auf mehreren Stützen.** Wenn ein Balken auf mehr als §. 37. zwei Stützen ruht, so sind die Auflagerreactionen in den einzelnen Stützpunkten aus den Bedingungen des Gleichgewichtes nicht ohne Weiteres zu ermitteln, denn diese beiden Bedingungen für ein System paralleler Kräfte  $\Sigma P = 0$  und  $\Sigma M = 0$  gestatten nur die Ermittlung von zwei unbekannten Größen, genügen also zur Bestimmung der Auflagerreactionen

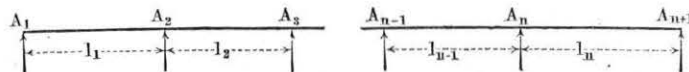
nur bei Balken auf zwei Stützen. Es sind daher bei beliebig vielen, etwa  $n$  Stützen, zu jenen beiden Gleichgewichtsbedingungen noch  $n - 2$  Gleichungen erforderlich, wenn alle Auflagerreactionen und damit die Momente für alle Balkenquerschnitte bestimmt werden sollen. Diese Gleichungen lassen sich nur angeben, wenn man auf die Elasticitätsverhältnisse des Balkens, also auf dessen Biegung Rücksicht nimmt, während es unmöglich sein würde, die Auflagerdrücke für einen vollkommen starren, mehrfach gestützten Balken zu bestimmen. Man bedient sich zur Aufstellung der erforderlichen Bestimmungsgleichungen der von Navier aufgestellten Formel II<sup>a</sup> in §. 35:

$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

indem man durch zweimalige Integration dieser Gleichung für jede der  $n - 2$  Zwischenstützen zu ebenso vielen Bestimmungsgleichungen gelangt, welche mit den beiden allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung der  $n$  unbekannten Reactionen dienen. Diese Rechnung, welche in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 für mehrere Beispiele durchgeführt worden ist, führt zwar in jedem Falle zum Ziele, doch ist sie für mehrere Stützen ziemlich weitaufwendig. Man wendet daher mit Vortheil die von Clapeyron\*) angegebene Methode der Berechnung an, welche eine directe Beziehung zwischen den Momenten über drei auf einander folgenden Stützen ergibt.

Es sei im Folgenden ein auf beliebig vielen Stützen  $A_1, A_2, A_3 \dots$ , Fig. 139, frei aufliegender Balken vorausgesetzt, und es seien mit  $l_1, l_2, l_3 \dots$

Fig. 139.



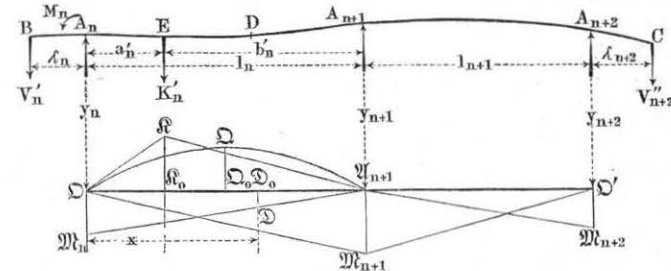
die horizontalen Entfernungen dieser Stützen von einander bezeichnet. Die verticalen Ordinaten dieser zunächst allgemein als in beliebiger Höhe liegend angenommenen Stützpunkte seien, auf eine willkürliche Horizontale bezogen, mit  $y_1, y_2, y_3 \dots$  bezeichnet. Jede der Strecken soll einer gleichmäßig vertheilten Belastung ausgesetzt sein, welche pro Längeneinheit bezw.  $q_1, q_2, q_3 \dots$  betragen möge, so daß also die  $n$ te Strecke zwischen  $A_n$  und  $A_{n+1}$  von der Länge  $l_n$  einer gleichmäßig vertheilten Belastung  $Q_n = q_n l_n$  unterworfen ist. Außerdem möge der Balken noch einer beliebigen Anzahl concentrirter Belastungen  $K$  unterworfen sein, welche mit  $K_1, K_2, K_3 \dots$  u. s. w. bezeichnet werden, so daß z. B. die  $n$ te Strecke durch die Kräfte  $K'_n, K''_n \dots$

\*) S. Comptes rendus, Dec. 1857.

angegriffen werden möge, deren Angriffspunkte bezw. um  $a'_n, a''_n \dots$  von der Stütze  $A_n$  entfernt sind.

Dies vorausgesetzt, sei nun das Stück  $A_n A_{n+1} A_{n+2}$ , Fig. 140, des Balkens ins Auge gefaßt, welches die beiden Strecken  $l_n$  und  $l_{n+1}$  enthält.

Fig. 140.



Durch den Einfluß der links von  $A_n$  befindlichen Balkenstrecken und ihrer Belastungen wird in dem Querschnitte des Balkens, welcher unmittelbar vor der Stütze  $A_n$  in einem verschwindend kleinen Abstände  $\partial l$  gelegen ist, eine zweifache Wirkung hervorgerufen; es wird nämlich daselbst auf das Balkenstück  $A_n$  eine verticale Schubkraft und ein Drehungsmoment ausgeübt, welches etwa in der Richtung des Pfeiles auf das Balkenende  $A_n$  wirken möge. Bezeichnet man dieses Moment, welches wegen der unendlich kleinen Entfernung  $\partial l$  auch mit dem Momente über  $A_n$  übereinstimmt, mit  $M_n$ , und die verticale Schubkraft mit  $V'_n$ , so kann man sich die Schubkraft  $V'_n$  und das Moment  $M_n$  zu einer Resultirenden  $V'_n$  vereinigt denken, welche in  $B$  in solchem Abstände  $\lambda_n$  von  $A_n$  wirkt, daß man

$$V'_n \lambda_n = M_n$$

hat. Es ist daher klar, daß man den links von  $A_n$  befindlichen Theil des Balkens ganz beseitigt denken kann, ohne an dem Gleichgewichtszustande etwas zu ändern, vorausgesetzt nur, daß man den beseitigten Balkentheil durch die betreffende Verticalkraft  $V'_n$  im Abstände  $\lambda_n$  von  $A_n$  ersetzt. Die Größe dieser Kraft  $V'_n$  wird gefunden, wenn man die sämtlichen Belastungen aller beseitigten Balkenstrecken  $l_1, l_2, l_3 \dots l_{n-1}$  addirt und die Summe aller Reactionen davon abzieht, mit welchen die Stützen  $A_1, A_2 \dots A_{n-1}$  gegen den Balken aufwärts wirken. Bezeichnet man diese Reactionen mit  $R_1, R_2, R_3 \dots$ , so hat man also für die Schubkraft  $V'_n$  den Ausdruck:

$$V'_n = l_1 q_1 + \Sigma K_1 + l_2 q_2 + \Sigma K_2 \dots l_{n-1} q_{n-1} + \Sigma K_{n-1} - (R_1 + R_2 \dots R_{n-1}) \dots \dots \dots (1)$$



In derselben Weise kann man auch den rechts von  $A_{n+2}$  gelegenen Balkentheil fortgeschnitten denken, wenn man denselben ersetzt durch die in einem solchen Abstände  $A_{n+2}C = \lambda_{n+2}$  wirkende Schubkraft  $V''_{n+2}$ , daß  $V''_{n+2}\lambda_{n+2} = M_{n+2}$  ist, wenn unter  $M_{n+2}$  das Moment verstanden ist, welches durch den beseitigten Balkentheil in dem Querschnitte durch  $A_{n+2}$  erzeugt wird. Für die Größe der Schubkraft  $V''_{n+2}$  gilt ebenfalls die Gleichung (1), natürlich bezogen auf alle rechts von  $A_{n+2}$  liegenden Strecken des Balkens.

Unter der verticalen Schubkraft  $V$  in irgend einem Querschnitte soll hier immer diejenige Kraft verstanden werden, welche in diesem Querschnitte auf das rechts gelegene Balkenstück ausgeübt wird, und zwar soll wie bisher diese Kraft positiv angenommen werden, wenn sie aufwärts wirkt. Es ist daraus ersichtlich, daß die in einem beliebigen Querschnitte von dem rechts gelegenen Balkentheile auf den links gelegenen ausgeübte Einwirkung durch  $-V$  sich ausdrückt. Wenn daher unmittelbar links neben einer Stütze  $A_n$  die Schubkraft durch  $V'_n$  und unmittelbar rechts davon durch  $V''_n$  ausgedrückt ist, so ergibt sich die Reaction  $R_n$ , mit welcher diese Stütze gegen den Balken wirkt, wegen des Gleichgewichts zwischen den drei Kräften  $V'_n$ ,  $R_n$  und  $-V''_n$  durch die Gleichung

$$R_n + V'_n - V''_n = 0$$

allgemein zu

$$R_n = V''_n - V'_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

in welcher Gleichung für  $V'_n$  und  $V''_n$  in dem oben gedachten Sinne je nach der Richtung der Schubkraft ein positiver oder negativer Werth anzunehmen ist.

Man nehme nun eine Horizontale  $DD'$  als Abscissenaxe für ein rechtwinkeliges Coordinatensystem an, dessen  $Y$ -Axe durch  $A_n$  hindurchgeht, und bezeichne mit  $\alpha$  den Winkel, welchen die elastische Linie des belasteten Balkens in irgend einem Punkte mit dem Horizonte bildet, so hat man für die elastische Linie allgemein:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha = \alpha,$$

oder

$$\partial y = \alpha \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wenn man wegen der Kleinheit dieses Winkels  $\alpha$  für  $\operatorname{tg} \alpha$  setzt. Mit Rücksicht hierauf schreibt sich nun die Navier'sche Gleichung:

$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = TE \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

oder

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{M}{TE} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Gleichung (3) giebt nach der bekannten Methode der theilweisen Integration, wonach

$$\int u \partial v = uv - \int v \partial u \text{ ist,}$$

$$y = \alpha x - \int x \partial \alpha = \alpha x - \int x \frac{\partial \alpha}{\partial x} \partial x,$$

oder mit Rücksicht auf (4)

$$y = \alpha x - \int \frac{M}{TE} x \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Berechnet man diesen Werth zwischen den Grenzen  $x = 0$  in  $A_n$  und  $x = l_n$  in  $A_{n+1}$ , wofür entsprechend der Winkel  $\alpha = \alpha_n$  und  $\alpha = \alpha_{n+1}$  sowie  $y = y_n$  und  $y = y_{n+1}$  ist, so erhält man:

$$y_{n+1} - y_n = \alpha_{n+1} l_n - \int_0^{l_n} \frac{M}{TE} x \partial x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Man denke sich nun ebenfalls für die  $n+1$ te Strecke  $A_{n+1}A_{n+2}$  die  $Y$ -Axe durch  $A_{n+2}$  gelegt, so gilt auch hierfür die allgemeine Gleichung (5) und man hat für  $A_{n+2}$  die Werthe  $x = 0$ ,  $\alpha = \alpha_{n+2}$ , und  $y = y_{n+2}$ , sowie für  $A_{n+1}$  ebenso  $x = l_{n+1}$ ,  $\alpha = -\alpha_{n+1}$  und  $y = y_{n+1}$ ; daher erhält man zwischen diesen Grenzen aus (5):

$$y_{n+1} - y_{n+2} = -\alpha_{n+1} l_{n+1} - \int_0^{l_{n+1}} \frac{M}{TE} x \partial x \quad . \quad . \quad (7)$$

Setzt man das Trägheitsmoment  $T$  für alle Querschnitte des Balkens als constant voraus, so erhält man aus (6) und (7) durch Addition nach vorheriger Reducirung mit  $l_n$  und  $l_{n+1}$ :

$$\begin{aligned} TE \left( \frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}} \right) \\ = -\frac{1}{l_n} \int_0^{l_n} M x \partial x - \frac{1}{l_{n+1}} \int_0^{l_{n+1}} M x \partial x \quad . \quad . \quad . \quad (8) \end{aligned}$$

Die Werthe der beiden Integrale sind nun leicht geometrisch zu deuten. Denkt man sich für jeden beliebigen Punkt des Balkens nämlich das daselbst wirkende Kraftmoment  $M$  ermittelt und in der oben besprochenen Weise nach einem beliebigen Momentenmaßstabe als Ordinate über der Abscissenaxe  $DD'$  aufgetragen, so erhält man, wie früher schon angegeben, die sogenannte Momentenfläche. Es ist dann  $M \partial x$  der Flächeninhalt des unendlich kleinen Streifens von der Breite  $\partial x$ , welchen die beiden Ordinaten im

Abstände  $x$  und  $x + \partial x$  vom Anfangspunkte  $\mathcal{O}$  bzw.  $\mathcal{O}'$ , aus der Momentenfläche herauszuschneiden. Folglich ist  $x M \partial x$  das statische Moment dieses Streifens, bezogen auf den Anfang der Coordinaten und daher drückt

$$\int_0^{l_n} M x \partial x$$

das statische Moment der über der Strecke  $A_n A_{n+1}$  construirten Momentenfläche in Bezug auf  $A_n$  aus, und ebenso stellt

$$\int_0^{l_{n+1}} M x \partial x$$

das statische Moment der Momentenfläche über der Strecke  $A_{n+1} A_{n+2}$  in Bezug auf  $A_{n+2}$  vor. Bezeichnet daher  $F$  den Inhalt einer solchen Momentenfläche und  $f$  den horizontalen Abstand ihres Schwerpunktes von dem betreffenden Stützpunkte  $A_n$  oder  $A_{n+2}$ , so kann man das Product  $Ff$  als den Werth des zugehörigen Integrals in (8) ansehen. Es kommt daher nur darauf an, die Momentenflächen für die beiden Strecken  $l_n$  und  $l_{n+1}$  zu bestimmen, und deren Schwerpunkte zu ermitteln. Das letztere kann ebenfowohl durch Rechnung wie mit Hilfe der Zeichnung geschehen.

Die Bestimmung der Momentenflächen oder des Momentes  $M$  für jeden Balkenquerschnitt ist leicht vorzunehmen, wie die folgende Betrachtung lehrt. Das Moment  $M$  in irgend welchem Punkte  $D$  der Strecke  $A_n A_{n+1}$  entspringt aus drei Wirkungen, nämlich aus denjenigen

- 1) der concentrirten Lasten  $K_n$ ,
- 2) der gleichmäßig vertheilten Last  $Q_n = q_n l_n$  und
- 3) der Momente  $M_n$  und  $M_{n+1}$ , welche in den Stützen  $A_n$  und  $A_{n+1}$  durch die daselbst sich anschließenden Balkentheile hervorgerufen werden. Nach dem Vorstehenden können diese Momente so angesehen werden, als ob sie durch die Schubkraft  $V_n'$  und bzw.  $-V_{n+1}''$  erzeugt werden, welche in den betreffenden Abständen  $\lambda_n$  und  $\lambda_{n+1}$  von  $A_n$  und  $A_{n+1}$  angreifen.

Man hat also die Momentenfläche für die Strecke  $A_n A_{n+1}$  genau so zu bestimmen, wie für einen Balken, der in  $A_n$  und  $A_{n+1}$  frei aufliegt, und durch die Kräfte  $K_n$ ,  $Q_n$ ,  $V_n'$  und  $-V_{n+1}''$  angegriffen wird. Dies geschieht nach dem in §. 35 Gesagten wie folgt:

1. Eine Kraft  $K_n'$  in  $E$  im Abstände  $a_n'$  von  $A_n$  und  $b_n'$  von  $A_{n+1}$  veranlaßt (s. Fig. 125) in  $E$  ein Moment von der Größe

$$\mathcal{R} \mathcal{R}_0 = K_n \frac{a_n' b_n'}{l_n},$$

und das Dreieck  $\mathcal{O} \mathcal{R} A_{n+1}$  stellt danach die Momentenfläche vor. Der Inhalt derselben ist

$$F_n' = \frac{1}{2} \mathcal{O} A_{n+1} \times \mathcal{R} \mathcal{R}_0 = \frac{1}{2} l_n \frac{a_n' b_n'}{l_n} K_n' = \frac{a_n' b_n'}{2} K_n'.$$

Der Schwerpunkt dieser Fläche hat, wie man aus der Figur leicht findet, von  $A_n$  den Abstand

$$f_n' = \frac{l_n}{2} - \frac{1}{3} \left( \frac{l_n}{2} - a_n' \right) = \frac{l_n + a_n'}{3},$$

folglich hat man für diese Momentenfläche das statische Moment in Bezug auf  $A_n$

$$F_n' f_n' = a_n' b_n' \frac{l_n + a_n'}{6} K_n'.$$

Denkt man sich diesen Ausdruck für alle concentrirten Kräfte  $K_n', K_n'' \dots$  der Strecke  $l_n$  gebildet, und dies einfach durch das Summenzeichen  $\Sigma$  angedeutet, so ist

$$\Sigma a_n b_n \frac{l_n + a_n}{6} K_n = \mathcal{R}_n \dots \dots \dots (9)$$

derjenige Theil des Integrals  $\int_0^{l_n} M x \partial x$  der Gleichung (8), welcher von den concentrirten Belastungen der Strecke  $l_n$  herrührt. Ebenso würde

$$\Sigma a_{n+1} b_{n+1} \frac{l_{n+1} + b_{n+1}}{6} K_{n+1} = \mathcal{R}_{n+1} \dots \dots \dots (10)$$

dieselbe Bedeutung für die Strecke  $l_{n+1}$  in Bezug auf den Stützpunkt  $A_{n+2}$ , d. h. für das Integral  $\int_0^{l_{n+1}} M x \partial x$  haben.

2. Der gleichförmig vertheilten Belastung  $Q_n = q_n l_n$  entspricht nach §. 35 und Fig. 126 die Parabelfläche  $\mathcal{O} \mathcal{O} A_{n+1}$ , deren Scheitelordinate  $\mathcal{O} \mathcal{O}_0 = q_n \frac{l_n^2}{8}$  ist. Für diese Fläche hat man

$$F_n = \frac{2}{3} \mathcal{O} A_{n+1} \times \mathcal{O} \mathcal{O}_0 = \frac{2}{3} l_n q_n \frac{l_n^2}{8} = q_n \frac{l_n^3}{12},$$

und da der Schwerpunkt in der Mitte liegt, ist hierfür

$$F f = q_n \frac{l_n^4}{24} = \mathcal{O}_n \dots \dots \dots (11)$$

derjenige Theil des Ausdrucks  $\int_0^{l_n} M x \partial x$ , welcher von der gleichförmig ver-

theilten Belastung der Strecke  $l_n$  herrührt. Für die Strecke  $A_{n+1}A_{n+2}$  hat man ebenso

$$q_{n+1} \frac{l_{n+1}^4}{24} = \mathfrak{D}_{n+1} \dots \dots \dots (12)$$

3. Die Kraft  $V_n'$ , welche als Ersatz des linken Trägetheiles in  $A_n$  ein Moment  $M_n = V_n' l_n = \mathfrak{D} M_n$  erzeugt, ruft in  $D$  im Abstände  $x$  von  $A_n$  ein Moment

$$\mathfrak{D}_0 \mathfrak{D} = \frac{l_n - x}{l_n} \mathfrak{D} M_n = \frac{l_n - x}{l_n} M_n$$

hervor, wie man sich ohne Weiteres überzeugt, wenn man sich  $B A_n A_{n+1}$  als einen doppelarmigen Hebel vorstellt, an welchem die in  $B$  wirkende Kraft  $V_n'$  einen Gegenruck in  $A_{n+1}$  von der Größe

$$\frac{V_n' l_n}{l_n} = \frac{M_n}{l_n}$$

hervorrufft, der in  $D$  ein Moment

$$M_n \frac{l_n - x}{l_n}$$

erzeugt. Die von dem Momente  $M_n$  für die Strecke  $l_n$  veranlaßten Momente sind daher durch das Dreieck  $\mathfrak{D} M_n A_{n+1}$  dargestellt, dessen statisches Moment in Bezug auf  $A_n$  durch

$$M_n'' = \frac{1}{2} \mathfrak{D} M_n \cdot l_n \cdot \frac{1}{3} l_n = \frac{1}{6} M_n l_n^2 \dots \dots \dots (13)$$

ausgedrückt ist. In gleicher Weise stellt das Dreieck  $\mathfrak{D}' A_{n+1} M_{n+2}$  die Momentenfläche dar, welche den Einfluß des in  $A_{n+2}$  durch den rechtsseitigen Balkentheile ausgeübten Momentes  $M_{n+2}$  auf die Strecke  $l_{n+1}$  ergiebt, und man erhält das statische Moment dieser Fläche in Bezug auf  $A_{n+2}$  zu

$$M_{n+2}' = \frac{1}{2} \mathfrak{D}' M_{n+2} \cdot l_{n+1} \cdot \frac{1}{3} l_{n+1} = \frac{1}{6} M_{n+2} \cdot l_{n+1}^2 \dots \dots \dots (14)$$

Wenn man ferner nach dem gewählten Momentenmaßstabe  $A_{n+1} M_{n+1} = M_{n+1}$  macht, so sind die beiden Dreiecke  $\mathfrak{D} A_{n+1} M_{n+1}$  und  $\mathfrak{D}' A_{n+1} M_{n+1}$  die Flächen für diejenigen Momente, welche durch das Moment  $M_{n+1}$  der Stütze  $A_{n+1}$  in den Strecken  $l_n$  und bezw.  $l_{n+1}$  hervorgerufen werden. Nun hat das Dreieck  $\mathfrak{D} A_{n+1} M_{n+1}$  in Bezug auf  $A_n$  das statische Moment

$$M_{n+1}' = \frac{1}{2} M_{n+1} \cdot \frac{2}{3} l_n^2 = \frac{1}{3} M_{n+1} l_n^2 \dots \dots \dots (15)$$

während das Dreieck  $\mathfrak{D}' A_{n+1} M_{n+1}$  in Bezug auf  $A_{n+2}$  das statische Moment

$$M_{n+1}'' = \frac{1}{2} M_{n+1} \cdot \frac{2}{3} l_{n+1}^2 = \frac{1}{3} M_{n+1} l_{n+1}^2 \dots \dots \dots (16)$$

hat. Man erhält daher aus (13) und (15) die Größe

$$U_n = M_n'' + M_{n+1}' = \frac{l_n^2}{6} (M_n + 2 M_{n+1}), \dots \dots \dots (17)$$

welche den von den Momenten in  $A_n$  und  $A_{n+1}$  herrührenden Theil des

Integrals  $\int_0^{l_n} M x \, dx$  vorstellt, wie ebenso die Summe von (14) und (16)

$$U_{n+1} = M_{n+1}'' + M_{n+2}' = \frac{l_{n+1}^2}{6} (2 M_{n+1} + M_{n+2}) \dots \dots \dots (18)$$

den von den Stützmomenten  $M_{n+1}$  und  $M_{n+2}$  herrührenden Theil des

Integrals  $\int_0^{l_{n+1}} M x \, dx$  ergiebt.

Setzt man nunmehr die Werthe aus (9) bis (12), sowie (17) und (18) für die beiden Integrale der Gleichung (8) ein, so geht dieselbe über in:

$$\begin{aligned} TE \left( \frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}} \right) &= - \frac{1}{l_n} (\mathfrak{R}_n + \mathfrak{D}_n + U_n) \\ &- \frac{1}{l_{n+1}} (\mathfrak{R}_{n+1} + \mathfrak{D}_{n+1} + U_{n+1}) = - \left( \Sigma a_n b_n \frac{l_n + a_n}{6 l_n} K_n + q_n \frac{l_n^3}{24} \right. \\ &+ \Sigma a_{n+1} b_{n+1} \frac{l_{n+1} + a_{n+1}}{6 l_{n+1}} K_{n+1} + q_{n+1} \frac{l_{n+1}^3}{24} \Big) \\ &- \frac{l_n}{6} (M_n + 2 M_{n+1}) - \frac{l_{n+1}}{6} (2 M_{n+1} + M_{n+2}); \end{aligned}$$

welche Gleichung sich auch schreiben läßt:

$$\begin{aligned} M_n l_n + 2 M_{n+1} (l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} &= \\ - 6 TE \left( \frac{y_{n+1} - y_n}{l_n} + \frac{y_{n+1} - y_{n+2}}{l_{n+1}} \right) - \Sigma a_n b_n \frac{l_n + a_n}{l_n} K_n \\ - \Sigma a_{n+1} b_{n+1} \frac{l_{n+1} + a_{n+1}}{l_{n+1}} K_{n+1} - q_n \frac{l_n^3}{4} - q_{n+1} \frac{l_{n+1}^3}{4} \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

Wenn man in dieser Gleichung die concentrirten Lasten  $K$  wegläßt und ferner voraussetzt, daß sämtliche Stützpunkte in einer Horizontalen liegen, d. h. daß  $y_n = y_{n+1} = y_{n+2}$  ist, so erhält man die zuerst von Clapeyron aufgestellte Gleichung:

$$M_n l_n + 2 M_{n+1} (l_n + l_{n+1}) + M_{n+2} l_{n+1} = - \frac{q_n l_n^3 + q_{n+1} l_{n+1}^3}{4} \dots \dots \dots (20)$$





Zu demselben Ausdrucke gelangt man auch durch Differentiation der Gleichung (21), wodurch man erhält

$$\frac{\partial M}{\partial x} = R_n + V_n' - q_n x \dots \dots \dots (27)$$

entsprechend der schon früher angegebenen allgemeinen Beziehung:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \dots \dots \dots (28)$$

Betrachtet man, um auch die Schubkraft graphisch darzustellen,  $V$  als die Ordinate, so erkennt man aus der Gleichung (26), welche eine gerade Linie darstellt, daß die Gerade  $egf$ , Fig. 141 II, für jeden Punkt die Größe von  $V$  ergibt, wenn man

$$a_n e = R_n + V_n' = V_n''$$

macht, und die Linie  $ef$  unter einem Winkel  $\gamma$  gegen die Axe  $a_n a_{n+1}$  zieht, für welchen man aus (26) durch Differentiation erhält

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\partial V}{\partial x} = -q_n \dots \dots \dots (29)$$

Der Durchschnitt  $g$ , für welchen die Schubkraft zu Null wird, hat nach dem Vorstehenden (24) die Abscisse

$$x_0 = \frac{l_n}{2} + \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n q_n},$$

welche dem Maximum des Momentes  $[M]$  entspricht.

Noch eine bemerkenswerthe Beziehung ergibt sich, wenn man die Gleichung (28),  $V \partial x = \partial M$  zwischen den Grenzen  $x$  und 0 integrirt; man erhält dann

$$M - M_n = \int_0^x V \partial x \dots \dots \dots (30)$$

Da das Integral die Fläche  $a_n e d d_0$  des Schubkraftdiagramms zwischen  $x = 0$  für  $A_n$  und  $x = A_n D_0$  bedeutet, so folgt hieraus, daß das Stück dieser Fläche zwischen irgend zwei Ordinaten als Maß für die Zunahme des Momentes  $M$  zwischen denselben Ordinaten angesehen werden kann. Es stellt daher beispielsweise das Trapez  $a_n w_0 w e$  nach demselben Maßstabe das Moment  $M_n$  über der Stütze  $A_n$  vor, nach welchem das Moment  $[M]$  in  $G$  durch das Dreieck  $g w_0 w$  oder das ebenso große  $g i_0 i$  ausgedrückt ist, und nach welchem das Trapez  $a_{n+1} i_0 i f$  die Größe des Momentes  $M_{n+1}$  über der Stütze  $A_{n+1}$  ergibt.

Man erkennt aus der Figur auch die plötzliche Veränderung der Schubkraft  $V$  in den Stützpunkten. Während unmittelbar links von der Stütze

$A_n$ , in unmeßbar kleinem Abstände davon, die auf das rechte Balkenstück abwärts gerichtete (negative) Schubkraft durch  $V_n' = a_n k$  dargestellt ist, wird durch die Wirkung der in  $A_n$  vertical aufwärts wirkenden Auflagerreaction  $R_n = k e$  unmittelbar rechts von  $A_n$  eine aufwärts wirkende (positive) Schubkraft auf das Balkenstück rechts ausgeübt von der Größe  $a_n e = R_n + V_n' = V_n''$  [vergl. (2)]. Da also auch über dem Pfeiler die Schubkraft durch Null geht, so muß auch hier das Moment einen Maximalwerth annehmen, wenigstens so lange, als die Stütze  $A_n$  überhaupt einen Druck  $R_n$  auf den Balken ausübt, d. h. so lange der Balken daselbst wirklich aufruhet und nicht etwa durch die Wirkung der übrigen Strecken ein Abheben des Balkens über dieser Stütze stattfindet.

Um endlich die Reaction  $R$  irgend einer Stütze zu finden, hat man aus (22) für die Stütze  $A_n$ :

$$R_n + V_n' = V_n'' = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + q_n \frac{l_n}{2},$$

und ebenso für die Stütze  $A_{n+1}$ :

$$R_{n+1} + V_{n+1}' = V_{n+1}'' = \frac{M_{n+2} - M_{n+1}}{l_{n+1}} + q_{n+1} \frac{l_{n+1}}{2}.$$

Nun ist aber

$$V_{n+1}' = V_n'' - q_n l_n = \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} - q_n \frac{l_n}{2},$$

und daher folgt nach (2):

$$\begin{aligned} R_{n+1} &= V_{n+1}'' - V_{n+1}' \\ &= \frac{M_{n+2} - M_{n+1}}{l_{n+1}} - \frac{M_{n+1} - M_n}{l_n} + \frac{q_n l_n + q_{n+1} l_{n+1}}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

Nach dem Vorstehenden kann man nunmehr auch den Einfluß beurtheilen, welchen concentrirte Belastungen  $K$  auf die Größe des Momentes und der Schubkraft an jeder Stelle ausüben. Es sei etwa in  $L_0$ , Fig. 141, im Abstände  $a$  von  $A_n$  und  $b$  von  $A_{n+1}$  eine Last  $K$  wirkend, so vergrößert dieselbe in  $A_n$  den Stützendruck und also auch die Auflagerreaction  $R_n$  um  $K \frac{b}{l_n}$ . Die Schubkraft  $V_n''$  ist daher um diesen Werth  $K \frac{b}{l} = e e_1$  größer geworden. Da dieselbe Vergrößerung für alle Punkte zwischen  $A_n$  und  $L_0$  gilt, so wird das Diagramm für die Schubkraft durch die Gerade  $e_1 l_1$  dargestellt sein, welche durch  $e_1$  parallel zu  $ef$ , also unter dem Winkel  $\gamma = \operatorname{arc} \operatorname{tg} q_n$ , gegen die Horizontale gelegt wird. In  $L_0$  ändert sich dann die Schubkraft plötzlich um den Betrag  $K = l_1 l_2$ , und wenn man durch  $l_2$  eine Parallele  $l_2 f_2$  mit  $ef$  zieht, so erhält man in deren Ordinaten die Schubkräfte zwischen  $L$  und  $A_{n+1}$ . In dem letztgenannten Punkte ist

die Schubkraft  $V_{n+1}'$  um das (negative) Stück  $f f_2$  größer geworden, welches nach der Construction sich zu

$$l_1 l_2 - e_1 e = K - K \frac{b}{l} = K \frac{a}{l}$$

ergiebt, wie es dem Gesetze des Hebels auch entspricht.

Trägt man ferner in  $L_0$  die Ordinate  $L_0 L = K \frac{a b}{l_n}$  auf, so erhält man in dem Dreiecke  $A_n L A_{n+1}$  bekanntlich die Momentenfläche, welche der Belastung durch  $K$  allein entspricht, und es ist dann leicht, durch algebraische Summierung der Ordinaten der Parabel  $E C F$  und des Dreiecks  $A_n L A_{n+1}$  die resultierende Momentenfläche  $E C_1 F$  zu erhalten. Es ergibt sich aus dem Vorhergegangenen, daß dem Scheitel  $C_1$  dieser resultierenden Curve dieselbe Abscisse  $A_n G_1$  zukommen muß, wie dem Punkte  $g_1$ , in welchem die Axe  $a_n a_{n+1}$  von der Begrenzung  $e_1 l_1 l_2 f_2$  getroffen wird, d. h. in welchem die Schubkraft zu Null wird. Hieraus folgt auch, daß es ganz von der Größe der Kraft  $K$  abhängen wird, ob das Maximalmoment  $[M]$  zwischen den Stützen in dem Angriffspunkte  $L_0$  der Kraft  $K$ , oder zwischen  $L_0$  und  $G$  auftreten wird. Den in der Figur zu Grunde gelegten Verhältnissen gemäß findet sich dieses Maximum von  $M$  in dem Punkte  $g_1$  zwischen  $g$  und  $l_0$ , es ist aber deutlich, daß bei einem vergrößerten  $K$ , welchem etwa das Schubkraftdiagramm  $a_n e' l' l'' f'' a_{n+1}$  entspricht, das größte oder Bruchmoment der Strecke mit dem Angriffspunkte  $L_0$  der concentrirten Last zusammenfällt.

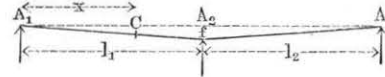
Die Wirkung einer concentrirten Belastung  $K$  veranlaßt also, ebenso wie die Reaction einer Stütze eine plötzliche Veränderung der Scheerkraft, und man kann daher einen durch concentrirte Belastungen angegriffenen Balken auch wie einen Träger auffassen, für welchen diese Belastungen als Stützpunkte betrachtet werden, die den Balken von oben nach unten mit den Reaktionskräften  $K$  angreifen. Man hat dann die allgemeine Formel (19) anzuwenden, indem man für die Reactionen in den Kraftangriffen diese Kräfte  $K$  einführt und die Größen  $y_{n+1} - y_n$  zc. mit Rücksicht auf die erzeugten Durchbiegungen in Rechnung stellt.

Um die Anwendung der vorstehend entwickelten Formeln zu zeigen, sollen in den folgenden Paragraphen einige der am häufigsten vorkommenden Unterstütsarten von Trägern näher untersucht werden.

§. 38. **Balken auf drei Stützen.** Der Balken liege auf den drei Stützen  $A_1, A_2$  und  $A_3$ , Fig. 142, frei auf und sei über der Länge  $A_1 A_2 = l_1$  mit  $q_1$  und über der Länge  $A_2 A_3 = l_2$  mit  $q_2$  pro Längeneinheit belastet. Concentrirte Lasten sollen zunächst nicht angenommen werden, und es möge

vorausgesetzt werden, daß die Endstützen  $A_1$  und  $A_3$  in gleicher Höhe liegen, wie dies in der Praxis wohl fast immer der Fall sein wird. Die mittlere Stütze  $A_2$  jedoch soll der Allgemeinheit wegen um die Größe  $f$  tiefer liegend angenommen werden, als die beiden Endauflager. Es soll ferner von der

Fig. 142.



Breite der Auflagerflächen abgesehen und vorausgesetzt werden, daß der Auflagerdruck sich in einem Punkte, etwa in der Mitte der Auflagerbreite concentrirt, wo-

bei bemerkt werden kann, daß der durch diese Annahme veranlaßte Fehler um so geringer sein wird, je größer die lichten Oeffnungen sind.

Für den hier vorausgesetzten Fall hat man nach den Bezeichnungen des vorhergehenden Paragraphen die Momente über den freien Auflagern in  $A_1$  und  $A_3$

$$M_1 = M_3 = 0,$$

ebenso

$$V_1' = 0 \text{ und } V_3'' = 0.$$

Ferner ist

$$y_2 - y_1 = y_2 - y_3 = -f,$$

und daher findet sich das Moment  $M_2$  über der Zwischenstütze  $A_2$  nach (19) des vorigen Paragraphen aus

$$0 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + 0 = 6 T E \left( \frac{f}{l_1} + \frac{f}{l_2} \right) - q_1 \frac{l_1^3}{4} - q_2 \frac{l_2^3}{4}$$

zu

$$\begin{aligned} M_2 &= -\frac{1}{8} \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{l_1 + l_2} + 3 T E \frac{f}{l_1 + l_2} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) \\ &= -\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 L} + \varepsilon \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

wenn  $l_1 + l_2 = L$  und  $3 T E \frac{f}{l_1 + l_2} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = \varepsilon$  gesetzt wird.

Ferner ist nach (22) des vorigen Paragraphen

$$M_2 = 0 + (R_1 + 0) l_1 - q_1 \frac{l_1^2}{2};$$

folglich erhält man hieraus und aus (1) die Auflagerreaction in  $A_1$  zu

$$R_1 = -\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 l_1 L} + q_1 \frac{l_1}{2} + \frac{\varepsilon}{l_1} \dots \dots (2)$$

und analog durch Vertauschung von  $l_1$  und  $l_2$  für die andere Endstütze  $A_3$ :



$$R_3 = -\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 l_2 L} + q_2 \frac{l_2}{2} + \frac{\varepsilon}{l_2} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und daher den Druck der Mittelstütze:

$$R_2 = q_1 l_1 + q_2 l_2 - (R_1 + R_3) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Das Moment  $M$  für irgend einen Punkt  $C$  der Strecke  $A_1 A_2$  im Abstände  $A_1 C = x$  von  $A_1$  erhält man zu:

$$M = R_1 x - q_1 \frac{x^2}{2} = \left( -\frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 l_1 L} + q_1 \frac{l_1}{2} + \frac{\varepsilon}{l_1} \right) x - q_1 \frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Den größten Werth von  $M$  findet man nach (24) für die Abscisse

$$x_0 = \frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1 q_1} = \frac{l_1}{2} - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 L l_1 q_1} + \frac{\varepsilon}{l_1 q_1} \quad . \quad . \quad (6)$$

und zwar wird dieses Maximum nach (25) gleich

$$[M_1] = \frac{q_1}{2} \left( \frac{l_1}{2} - \frac{q_1 l_1^3 + q_2 l_2^3}{8 L l_1 q_1} + \frac{\varepsilon}{l_1 q_1} \right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Gleichungen (5) bis (7) gelten natürlich auch für die Strecke  $A_3 A_2$ , wenn man darin  $l_1$  mit  $l_2$  und  $q_1$  mit  $q_2$  vertauscht und  $x$  von  $A_3$  nach  $A_2$  hin rechnet.

Für gleiche Weite und Belastungen, also für  $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$  und  $q_1 = q_2 = q$ , und für gleiche Höhenlage aller Stützen, also mit  $f = \varepsilon = 0$ , erhält man die schon in Thl. I angegebenen Werthe:

$$M_2 = -\frac{1}{32} q L^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1^a)$$

$$R_1 = \frac{3}{16} q L = R_3 \quad . \quad . \quad . \quad (2^a)$$

$$R_2 = \frac{5}{8} q L \quad . \quad . \quad . \quad (4^a)$$

$$M = \frac{3}{16} q L x - q \frac{x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (5^a)$$

$$x_0 = \frac{3}{16} L = \frac{3}{8} l \quad . \quad . \quad . \quad (6^a)$$

$$[M] = -\frac{9}{32 \cdot 16} q L^2 = \frac{9}{512} q L^2 \quad . \quad . \quad . \quad (7^a)$$

Diese Belastungsart ist offenbar übereinstimmend mit der in §. 35 unter (8) angegebenen, denn man kann sich denken, der Träger sei hier zur Hälfte

$A_1 A_2$  horizontal eingemauert, man erhält daher die in §. 35 angegebenen Formeln, wenn man hier  $2l$  für  $L$  einsetzt.

Die hier gefundenen Gleichungen können auch für Brückenträger gebraucht werden, welche über zwei Oeffnungen gelegt sind, also auf drei Stützpunkten frei aufrufen, da man die Belastung derselben in der Regel als eine gleichmäßig über die Länge vertheilte ansehen darf.

Nimmt man auch hier, wie es in der Wirklichkeit meistens zutreffen wird, die Oeffnungen von gleicher Weite, also  $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$  an, so erhält man nach (1) das Moment über der Zwischenstütze

$$M_2 = -\frac{q_1 L^3 + q_2 L^3}{8 \cdot 8 L} + \varepsilon = -\frac{L^2}{64} (q_1 + q_2) + \varepsilon \quad . \quad (1^b)$$

und die Auflagerreaction in  $A_1$  nach (2) zu

$$R_1 = \frac{L}{32} (7 q_1 - q_2) + \frac{2 \varepsilon}{L} \quad . \quad . \quad . \quad (2^b)$$

und in  $A_3$  entsprechend

$$R_3 = \frac{L}{32} (7 q_2 - q_1) + \frac{2 \varepsilon}{L} \quad . \quad . \quad . \quad (3^b)$$

Daher ist der Druck der mittleren Stütze gegen den Balken:

$$R_2 = \frac{L}{2} (q_1 + q_2) - R_1 - R_3 = \frac{L}{16} (5 q_1 + 5 q_2) - \frac{4 \varepsilon}{L} \quad (4^b)$$

Das größte Moment zwischen  $A_1$  und  $B_1$  findet sich nach (6) in einem Abstände  $x_0$  von  $A_1$

$$x_0 = \frac{L}{4} + \frac{2 M_2}{L q_1} = \frac{L}{32} \frac{7 q_1 - q_2}{q_1} + \frac{2 \varepsilon}{L q_1} = \frac{L}{32} \left( \frac{7 q_1 - q_2}{q_1} + 2 \frac{32 \varepsilon}{L^2 q_1} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (6^b)$$

und zwar ist dieses Moment nach (7):

$$[M_1] = \frac{q_1}{2} \left[ \frac{L}{32} \left( \frac{7 q_1 - q_2}{q_1} + 2 \frac{32 \varepsilon}{L^2 q_1} \right) \right]^2 = \frac{L^2}{2 \cdot 32 \cdot 32 q_1} \left( 7 q_1 - q_2 + 2 \frac{32 \varepsilon}{L^2} \right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (7^b)$$

Man erkennt aus (1<sup>b</sup>), daß das Moment  $M_2$  über der Zwischenstütze sowohl mit einer Vergrößerung von  $q_1$  wie  $q_2$  an Größe zunimmt, und man erhält daher den größten Werth dieses Momentes, wenn beide Oeffnungen mit der größten Belastung beschwert sind. Die Belastung einer Brücke besteht nun aus deren Eigengewichte  $p$  und der zufälligen oder Verkehrslast  $k$ , und es möge die Summe beider Belastungen pro Längen-

einheit durch  $q = p + k$  ausgedrückt sein. Man erhält alsdann das größte Moment über der Mittelstütze, wenn beide Oeffnungen mit der zufälligen Belastung  $k$  bedeckt sind, also für  $q_1 = q_2 = q$  zu

$$M_{2\max} = -\frac{L^2}{32} q + \varepsilon \dots \dots \dots (8)$$

Das große Moment  $[M_1]$  dagegen zwischen  $A_1$  und  $A_2$  wächst, wie aus (7<sup>b</sup>) folgt, zwar ebenfalls mit  $q_1$ , nimmt aber mit zunehmendem  $q_2$  ab, woraus man schließt, daß  $[M_1]$  seinen Maximalwerth annimmt, wenn die Oeffnung  $A_1 A_2$  mit der möglich größten Belastung  $k + p = q$  und die jenseitige Oeffnung  $A_2 A_3$  mit der thunlich kleinsten Belastung, d. h. nur mit dem Eigengewichte  $p$  beschwert ist. Danach erhält man also

$$[M_1]_{\max} = \frac{L^2}{2 \cdot 32 \cdot 32 q} \left( 7q - p + 2 \frac{32 \varepsilon}{L^2} \right)^2 \dots \dots (9)$$

Vergleicht man diese beiden Werthe von  $M_{2\max}$  und  $[M_1]_{\max}$ , welche den ungünstigsten Belastungen entsprechen, so erkennt man, daß die Größe  $\varepsilon$  also die Senkung  $f$  der mittleren Stütze auf beide Momente in entgegengesetzter Weise wirkt, indem nämlich eine Vergrößerung dieser Senkung  $f$  oder des Werthes

$$\varepsilon = 3 TE \frac{f}{L} \left( \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) = 12 TE \frac{f}{L^2}$$

das (negative) Moment  $M_2$  über der Mittelstütze dem absoluten Werthe nach verringert, dagegen dasjenige  $[M_1]$  in der Oeffnung vergrößert.

Es ist daraus ersichtlich, daß es eine gewisse Senkung  $s$  der mittleren Stütze unterhalb der äußeren Auflager geben wird, bei welcher die beiden Momente  $M_{2\max}$  und  $[M_1]_{\max}$  von gleicher absoluter Größe sind, und eine solche Anordnung wird die vortheilhafteste sein, insofern, als dann das größte vorkommende Moment den kleinstmöglichen Werth annimmt. Um diese Senkung  $s$  zu ermitteln, hat man nur die beiden absoluten Werthe von  $M_{2\max}$  und  $[M_1]_{\max}$  einander gleich zu setzen und erhält also:

$$\frac{L^2}{32} q - \varepsilon = \frac{L^2}{2 \cdot 32 \cdot 32 q} \left( 7q - p + 2 \frac{32 \varepsilon}{L^2} \right)^2.$$

Dividirt man diese Gleichung durch  $\frac{L^2}{32} q$  und setzt der Kürze wegen das Verhältniß der Belastungen

$$\frac{p}{q} = v \text{ und } u = \frac{32 \varepsilon}{L^2 q} = \frac{32 \cdot 12 TE f}{L^4 q} \dots \dots (10)$$

so erhält man

$$1 - u = \frac{1}{64} (7 - v + 2u)^2,$$

woraus

$$u^2 + (23 - v) u = \frac{15 - v^2 + 14 v}{4}$$

oder

$$u = \frac{v - 23 + \sqrt{544 - 32 v}}{2} \dots \dots \dots (11)$$

folgt.

Da  $u = \frac{384 TE}{L^4 q} f$  gesetzt war, so ergibt sich die nöthige Senkung  $f$  der Mittelstütze für den Fall gleicher Momentenmaxima zu

$$f_0 = \frac{L^4 q}{384 TE} u = \frac{L^4 q}{768 TE} (v - 23 + \sqrt{544 - 32 v}), \quad (12)$$

und zwar ist das Moment in diesem Falle sowohl über der Mittelstütze bei ganzer Belastung als in der einen Oeffnung, wenn nur diese belastet ist, nach (8):

$$-M_{2\max} = [M_1]_{\max} = \frac{L^2 q}{32} - \varepsilon = \frac{L^2 q}{32} (1 - u) \dots (13)$$

Da das Maximalmoment  $M_2$  ohne Senkung der Mittelstütze  $\frac{L^2 q}{32}$  ist, so giebt also der Werth  $u$  zugleich an, um welchen Procentsatz das Maximalmoment  $M_2$  durch die Senkung vermindert wird.

Die Größe  $u$  hängt nach (11) wesentlich von dem Verhältnisse  $v = \frac{p}{q}$  der specifischen Belastungen ab, und ist nach (11) die folgende kleine Tabelle berechnet worden.

$v = \frac{p}{q}$	0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,75	1
$u =$	0,162	0,177	0,193	0,208	0,239	0,277	0,314

Der Werth  $u = 0,162$ , entsprechend dem Verhältnisse  $v = 0$ , würde danach für Träger gelten, deren Eigengewicht  $p$  gegen die zufällige Belastung verschwindet, also für kleine Spannweiten, während der Werth von  $u = 0,314$  für  $v = 1$  solchen Trägern zukommt, gegen deren Eigengewicht die zufällige Last unerheblich ist, welche also stets über der ganzen Länge von der gleichen Belastung  $p = q$  angegriffen werden. Diese Zahl stimmt mit der in Thl. I, §. 241 für einen Balken mit gleichmäßig vertheilter Belastung gefundenen überein.

Der Vortheil, welcher mit einer Senkung der Mittelstütze verbunden ist,

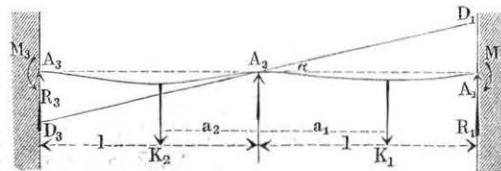
wurde zuerst von Köpcke\*), Grasshof\*\*) und Scheffler\*\*\*) gezeigt, die hier gegebene Darstellung schließt sich wesentlich an die Arbeit von Mohr†) an, welcher zuerst darauf aufmerksam gemacht hat, daß bei der Vergleichung der Maximalmomente  $M_2$  und  $[M_1]$  die denselben zugehörigen ungünstigsten Belastungen des ganzen Trägers und bezw. nur der einen Oeffnung in Betracht kommen müssen.

Eine besondere Betrachtung verdient der bei Hochbauconstruktionen häufiger vorkommende Fall, in welchem ein in der Mitte durch eine Säule unterstützter Träger oder Unterzug an den Enden nicht frei aufliegt, sondern eingemauert ist, so daß man eine horizontale Richtung der elastischen Linie an diesen Enden voraussetzen darf. Wenn hierbei der Balken zu beiden Seiten der Mittelstütze symmetrisch belastet ist, so muß auch über dieser mittleren Stütze die elastische Linie horizontal sein, und es kommt die Belastungsweise auf die in §. 35 unter (5) und (6) besprochene hinaus. Man kann nämlich dann jede Hälfte des Balkens als einen an beiden Enden horizontal eingeklemmten Balken ansehen, und auf jede dieser Hälften die in §. 35 angeführten Formeln anwenden.

Wenn indessen die Belastungen nicht symmetrisch zur Mittelstütze vertheilt sind, wie es z. B. bei den Unterzügen unter Fabrikräumen oft vorkommt, wo die Gewichte der einzelnen Arbeitsmaschinen als isolirte Lasten auftreten, welche nicht nothwendig symmetrisch zur Mittelstütze angebracht sind, so wird über der letzteren die elastische Linie des Balkens auch nicht horizontal bleiben, und es möge dieser Fall einer besonderen Untersuchung unterworfen werden.

Es sei  $A_1 A_3$ ; Fig. 143, ein solcher, bei  $A_1$  und  $A_3$  horizontal eingemauert, Träger von der Länge  $2l$ , welcher in der Mitte auf einer Säule

Fig. 143.



ruht, deren Stützager  $A_2$  in gleicher Höhe mit den Endauflagern  $A_1$  und  $A_3$  angenommen werden soll. Der Träger soll einer gleichmäßig ver-

\*) Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. f. Hannover, Bd. II, 1856.

\*\*) Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1857.

\*\*\*) Theorie der Gewölbe, Futtermauern u. eisernen Brücken. 1857.

†) Zeitschr. des Archit. u. Ing.-Ver. f. Hannover. 1860.

theilten Belastung ausgesetzt sein, welche zwar in der Wirklichkeit meist für beide Strecken von gleichem Betrage pro Längeneinheit sein wird, hier aber der Allgemeinheit wegen mit  $q_1$  und  $q_2$  für jeden Meter Länge angenommen werden soll. Von den isolirten Kräften  $K$  ist in der Figur in jeder Strecke nur eine Kraft  $K_1$  und bezw.  $K_2$  angedeutet, und es soll auch für diese nur die Rechnung geführt werden, wodurch die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt wird, denn bei einer beliebig großen Anzahl concentrirter Belastungen in einer Strecke hat man diese Kräfte sämmtlich in übereinstimmender Art in die Rechnung einzuführen. Die Kräfte  $K_1$  und  $K_2$  mögen die Abstände  $a_1$  und  $a_2$  von dem mittleren Stützpunkte  $A_2$  haben, welcher letztere als der Anfang rechtwinkliger Coordinaten mit der horizontalen X-Axe  $A_1 A_2 A_3$  angesehen wird. Der Unterschied zwischen diesem Falle und dem in Fig. 142 dargestellten eines auf drei Stützen frei aufliegenden Balkens besteht darin, daß die Momente über den Endstützen  $A_1$  und  $A_3$  hier nicht mehr gleich Null sind, sondern gewisse von vornherein noch unbekannte Werthe  $M_1$  und  $M_3$  haben. Es mögen  $R_1$  und  $R_3$  wieder die Auflagerreactionen in  $A_1$  und  $A_3$  sein, so hat man diese und die besagten Momente  $M_1$  und  $M_3$  mit Rücksicht darauf zu ermitteln, daß die elastische Linie in  $A_1$  und  $A_3$  horizontal gerichtet ist, und daß die Stützpunkte  $A_1$  und  $A_3$  mit  $A_2$  in gleicher Höhe liegen.

Bezeichnet man daher mit  $\alpha$  den Winkel, unter welchem die elastische Linie in  $A_2$  gegen den Horizont geneigt ist, so müssen die auf jede Hälfte  $A_2 A_1$  und  $A_2 A_3$  wirkenden Kräfte eine Biegung an den Enden im Winkelbetrage ebenfals von  $\alpha$  hervorbringen, da diese Enden horizontal gerichtet sind. Außerdem müssen aber die Enden aus der Richtung  $D_1 D_3$  der Tangente in  $A_2$  um die Größe  $D_1 A_1 = D_3 A_3 = l\alpha$  gesenkt resp. gehoben werden. Um diese Bedingungen durch Gleichungen auszudrücken, hat man nur zu beachten, daß die Neigung  $\beta$  und die Senkung  $f$  eines Balkens von der Länge  $l$  an seinem Ende bezw. ausgedrückt ist durch:

$$1) TE.\beta = q \frac{l^3}{6} \text{ und } TE.f = q \frac{l^4}{8},$$

bei Vorhandensein einer gleichmäßig vertheilten Belastung  $ql$ ;

$$2) TE.\beta = Ml \text{ und } TE.f = M \frac{l^2}{2},$$

bei Einwirkung eines Kräftepaars vom Momente  $M$ , und

$$3) TE.\beta = K \frac{a^2}{2}, \text{ bezw.}$$

$$TE.f = K \frac{a^3}{3} + K \frac{a^2}{2} (l - a) = Ka^2 \frac{3l - a}{6},$$



bei der Wirkung einer concentrirten Kraft  $K$  am Hebelarme  $a$  (vergl. Thl. I, §. 236 bis §. 239).

Mit Rücksicht hierauf hat man nun für die Hälften  $A_2 A_1$  die beiden Bedingungen:

$$TE.\alpha = q_1 \frac{l^3}{6} + K_1 \frac{a_1^2}{2} + M_1 l - R_1 \frac{l^2}{2} \quad (14)$$

und

$$TE.l\alpha = q_1 \frac{l^4}{8} + K_1 a_1^2 \frac{3l - a_1}{6} + M_1 \frac{l^2}{2} - R_1 \frac{l^3}{3} \quad (15)$$

Wenn man daher die Gleichung (15) nach vorheriger Division durch  $l$  von (14) subtrahirt, wird

$$q_1 \frac{l^3}{24} + K_1 \frac{a_1^3}{6l} + M_1 \frac{l}{2} - R_1 \frac{l^2}{6} = 0,$$

oder

$$R_1 = q_1 \frac{l}{4} + K_1 \frac{a_1^3}{l^3} + 3 \frac{M_1}{l} \quad (16)$$

Ganz in derselben Weise erhält man für die andere Balkenstrecke  $A_2 A_3$ , wenn man  $-\alpha$  für  $\alpha$  einführt:

$$- TE.\alpha = q_2 \frac{l^3}{6} + K_2 \frac{a_2^2}{2} + M_3 l - R_3 \frac{l^2}{2} \quad (14^a)$$

$$- TE.l\alpha = q_2 \frac{l^4}{8} + K_2 a_2^2 \frac{3l - a_2}{6} + M_3 \frac{l^2}{2} - R_3 \frac{l^3}{3} \quad (15^a)$$

$$R_3 = q_2 \frac{l}{4} + K_2 \frac{a_2^3}{l^3} + 3 \frac{M_3}{l} \quad (16^a)$$

Durch Addition von (14) und (14<sup>a</sup>) erhält man nun, wenn man aus (16) und (16<sup>a</sup>) die Werthe von  $R_1$  und  $R_3$  einführt:

$$\frac{q_1 + q_2}{6} l^3 + K_1 \frac{a_1^2}{2} + K_2 \frac{a_2^2}{2} + (M_1 + M_3) l = (R_1 + R_3) \frac{l^2}{2}$$

$$= \frac{q_1 + q_2}{8} l^3 + K_1 \frac{a_1^3}{2l} + K_2 \frac{a_2^3}{2l} + 3 \frac{M_1 + M_3}{2} l,$$

woraus sich

$$M_1 + M_3 = \frac{q_1 + q_2}{12} l^2 + K_1 a_1^2 \frac{l - a_1}{l^2} + K_2 a_2^2 \frac{l - a_2}{l^2} \quad (17)$$

ergiebt.

Eine zweite Beziehung zwischen  $M_1$  und  $M_3$  findet sich aus der allgemeinen Gleichgewichtsbedingung, wonach die Momentensumme aller Kräfte der einen Hälfte in Bezug auf  $A_2$  gleich derjenigen für die andere Balkenhälfte und zwar gleich dem Momente  $M_2$  über der mittleren Stütze sein muß. Demgemäß ist

$$q_1 \frac{l^2}{2} + K_1 a_1 + M_1 - R_1 l = M_2 = q_2 \frac{l^2}{2} + K_2 a_2 + M_3 - R_3 l, \quad (18)$$

woraus man, wenn für  $R_1$  und  $R_3$  die Werthe aus (16) gesetzt werden:

$$q_1 \frac{l^2}{4} + K_1 a_1 \frac{l^2 - a_1^2}{l^2} - 2 M_1 = q_2 \frac{l^2}{4} + K_2 a_2 \frac{l^2 - a_2^2}{l^2} - 2 M_3$$

folgt, so daß man nun erhält:

$$M_1 - M_3 = \frac{q_1 - q_2}{8} l^2 + K_1 a_1 \frac{l^2 - a_1^2}{2l^2} - K_2 a_2 \frac{l^2 - a_2^2}{2l^2} \quad (19)$$

Man erhält dann schließlich aus (17) und (19) durch Addition:

$$M_1 = \frac{5q_1 - q_2}{48} l^2 + K_1 \frac{a_1 l^2 + 2a_1^2 l - 3a_1^3}{4l^2} + K_2 \frac{2a_2^2 l - a_2 l^2 - a_2^3}{4l^2} \quad (20)$$

und durch Subtraction:

$$M_3 = \frac{5q_2 - q_1}{48} l^2 + K_2 \frac{a_2 l^2 + 2a_2^2 l - 3a_2^3}{4l^2} + K_1 \frac{2a_1^2 l - a_1 l^2 - a_1^3}{4l^2} \quad (21)$$

Würde man diese Werthe für  $M_1$  und  $M_3$  in (16), (16<sup>a</sup>) und (18) einsetzen, so erhielte man allgemeine Ausdrücke für die Reactionen  $R_1$  und  $R_3$ , sowie für das Moment  $M_2$  über der Mittelsstütze. Der Auflagerdruck in der Mitte folgt dann einfach zu

$$R_2 = (q_1 + q_2) l + K_1 + K_2 - R_1 - R_3;$$

auch erhält man aus (14) oder (15) die Neigung  $\alpha$  der elastischen Linie in  $A_2$  gegen den Horizont, deren Kenntniß indessen für gewöhnlich nicht von praktischem Interesse ist.

Setzt man in den vorstehenden Formeln  $q_1 = q_2 = q$  und  $K_1 = K_2 = 0$ , so erhält man, entsprechend dem unter (6) in §. 35 angeführten Belastungsfall

$$M_1 = M_3 = M_2 = q \frac{l^2}{12}, \quad R_1 = R_3 = q \frac{l}{2}, \quad \text{und} \quad R_2 = q l.$$

Ebenso erhält man mit  $q_1 = q_2 = 0$  und  $K_1 = K_2 = K$ , sowie  $a_1 = a_2 = \frac{l}{2}$ , d. h. für den in den Mitten der Strecken belasteten Balken, entsprechend §. 35, (5):

$$M_1 = M_3 = M_2 = K \frac{l}{8}, \quad R_1 = R_3 = \frac{K}{2} \quad \text{und} \quad R_2 = K \text{ u. f. w.}$$

Beispiele: 1. Wie groß ist die Senkung der Mittelstütze eines über zwei gleichen Öffnungen liegenden Trägers zu machen, damit die Maximalmomente gleich groß werden, wenn die ganze Länge des Trägers  $L = 40$  m, die Belastung durch sein Eigengewicht pro Meter  $p = 800$  kg und die zufällige Last  $k = 2400$  kg beträgt, und wenn die zulässige Faserelastizität 6 kg pro Quadratmillimeter und der Elastizitätsmodul 18 000 anzunehmen ist?

Man hat hier

$$v = \frac{p}{q} = \frac{800}{2400 + 800} = 0,25,$$

und daher nach (11):

$$u = \frac{0,25 - 23 + \sqrt{544 - 32 \cdot 0,25}}{2} = 0,201,$$

folglich das Maximalmoment für den Fall der gehörigen Senkung der Mittelstütze nach (13):

$$M_{1\max} = \frac{L^2 q}{32} (1 - u) = \frac{40 \cdot 40 \cdot 3200}{32} 0,799 = 127\,840 \text{ mkg.}$$

Nimmt man die Höhe des Trägers zu  $h = 2$  m, also die Entfernung der äußersten Faserelastizität von der neutralen Ase zu  $e = 1$  m an, so erhält man das Tragheitsmoment  $T$ , wenn alle Maße in Metern ausgedrückt werden durch

$$M_{\max} = s \frac{T}{e} \text{ zu}$$

$$T = \frac{1 \cdot 127\,840}{6 \cdot 1000 \cdot 1000} = 0,02131,$$

und daher die erforderliche Senkung der Mittelstütze nach (12):

$$f = \frac{u L^4 q}{384 T \cdot E} = \frac{0,201 \cdot 40^4 \cdot 3200}{384 \cdot 0,02131 \cdot 18\,000 \cdot 1000 \cdot 1000} = 0,0112 \text{ m}$$

oder nur wenig mehr als 11 mm.

2. In einer Spinnerei ist ein 8 m langer, an beiden Enden eingemauerter Unterzug angebracht, welcher in der Mitte, Fig. 144, durch eine Säule gestützt ist. Die Anstrengung dieses Unterzuges soll ermittelt werden, wenn derselbe durch das Gewicht des darauf ruhenden Fußbodens pro Meter Länge mit  $q = 2000$  kg belastet wird, und außerdem durch aufgestellte Maschinen die eine Öffnung eine Last von 800 kg in 2,4 m Entfernung von der Mitte, und die andere Öffnung in 3 m Entfernung von der Säule eine Last von 1000 kg erhält?

Hier ist  $q = 2000$  kg,  $K_1 = 800$  kg,  $K_2 = 1000$  kg,  $a_1 = 2,4$ ,  $a_2 = 3$  und  $l = 4$  m. Man findet daher (20) das Moment an einem Ende

$$M_1 = 2000 \frac{16}{12} + 800 \frac{2,4 \cdot 16 + 2 \cdot 2,4^2 \cdot 4 - 3 \cdot 2,4^3}{4 \cdot 16} + 1000 \frac{2 \cdot 9 \cdot 4 - 3 \cdot 16 - 27}{4 \cdot 16}$$

$$= 2666,7 + 537,6 - 46,9 = 3157,4 \text{ mkg,}$$

und das am anderen Ende:

$$M_3 = 2000 \frac{16}{12} + 1000 \frac{3 \cdot 16 + 2 \cdot 9 \cdot 4 - 3 \cdot 27}{64} + 800 \frac{2 \cdot 2,4^2 \cdot 4 - 2,4 \cdot 16 - 2,4^3}{64}$$

$$= 2666,7 + 609,4 - 76,8 = 3199,3 \text{ mkg.}$$

Mit diesen Werthen erhält man aus (16) den Auflagerdruck auf der einen Seite  $A_1$  zu:

$$R_1 = 2000 \frac{4}{4} + 800 \frac{2,4^3}{4^3} + 3 \frac{3157,4}{4} = 4541 \text{ kg,}$$

und aus (16<sup>a</sup>) auf der anderen Seite  $A_3$ :

$$R_3 = 2000 + 1000 \frac{27}{64} + 3 \frac{3199,3}{4} = 4822 \text{ kg,}$$

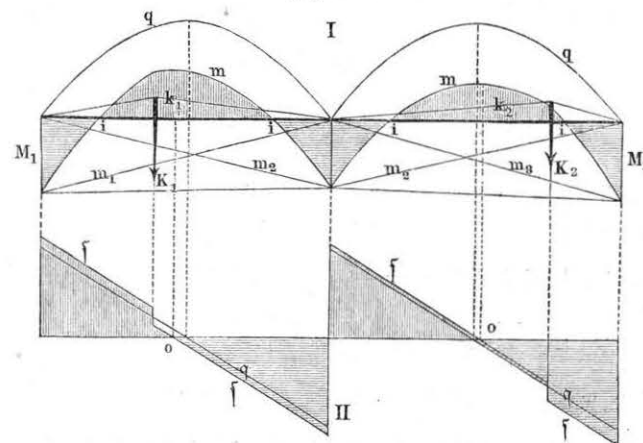
folglich ist der Druck auf die Mittelstütze:

$$R_2 = 2000 \cdot 8 + 800 + 1000 - 4541 - 4822 = 8437 \text{ kg.}$$

Das Biegemoment über der Mittelstütze ergibt sich endlich aus (18) zu

$$M_2 = 2000 \frac{16}{2} + 800 \cdot 2,4 + 3157,4 - 4541 \cdot 4 = 2912 \text{ mkg.}$$

Fig. 144.



Um das Biegemoment und die Schubkraft an jeder Stelle zu finden, sind in Fig. 144 I und II die Diagramme entworfen, indem die Curven  $m$  und  $q$  für die resultierenden Momente und Schubkräfte durch Vereinigung der Diagramme gezeichnet wurden, welche der gleichförmigen Belastung  $q$ , den concentrirten Kräften  $K$  und den negativen Stützenmomenten  $M_1, M_2$  und  $M_3$  zu kommen, welche Diagramme durch die entsprechenden Bezeichnungen  $q, q, k$  und  $m_1, m_2, m_3$  unterschieden sind. Man ersieht daraus die Inflectionspunkte  $i$  und die Stellen, wo die Zwischenmomente  $[M]$  die größten Werthe haben, d. h. wo die Schubkräfte Null werden.

**Balken auf vier Stützen.** Es soll ein continuirlicher Brücken- §. 39. träger  $A_1 A_4$ , Fig. 145 (a. f. S.), über drei Öffnungen angenommen werden, von welchen jede der äußeren die gleiche Weite  $l_1 = l_3$  und die mittlere die Weite  $l_2$  haben soll. Die Endstützen  $A_1$  und  $A_4$  sollen in einer Hori-

horizontal liegen, unter welche jede der beiden mittleren Stützpunkte um die Größe  $f_2 = f_3 = f$  gesenkt sein soll, so daß man  $y_1 - y_2 = y_4 - y_3 = f$  hat. Die Belastung durch das Eigengewicht sei überall pro 1 m Länge mit  $p$ , diejenige durch die Verkehrslast mit  $k$  und die gesammte Belastung wieder mit  $q = p + k$  bezeichnet.

Wegen der freien Auflagerung der Enden hat man wieder für die Momente daselbst

$$M_1 = M_4 = 0$$

und erhält daher hiermit aus (19), §. 37 die beiden Ausdrücke für  $A_2$ :

$$0 + 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6 TE \left( -\frac{f}{l_1} + 0 \right) - q_1 \frac{l_1^3}{4} - q_2 \frac{l_2^3}{4}$$

und für  $A_3$ :

$$M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_1) + 0 = -6 TE \left( 0 - \frac{f}{l_1} \right) - q_2 \frac{l_2^3}{4} - q_3 \frac{l_1^3}{4}.$$

Fig. 145.



Multipliziert man die erste Gleichung mit  $2(l_1 + l_2)$ , die zweite mit  $l_2$  und subtrahiert die letztere von der ersteren, so erhält man:

$$M_2 (4l_1^2 + 8l_1 l_2 + 3l_2^2) = -q_1 \frac{l_1^3}{4} (2l_2 + 2l_1) - q_2 \frac{l_2^3}{4} (l_2 + 2l_1) + q_3 \frac{l_1^3 l_2}{4} + 6 TEf \left( 2 + \frac{l_2}{l_1} \right).$$

Wenn man hierin das Verhältniß der Spannweiten

$$\frac{l_2}{l_1} = m, \text{ und } 4l_1^2 + 8l_1 l_2 + 3l_2^2 = (2l_1 + l_2)(2l_1 + 3l_2) \\ = l_1^2 (2 + m)(2 + 3m),$$

sowie die ganze Länge

$$L = 2l_1 + l_2 = l_1 (2 + m)$$

setzt, so wird:

$$M_2 l_1^2 (2 + m)(2 + 3m) = \frac{l_1^4}{4} \left( -q_1 (2 + 2m) - q_2 m^3 (2 + m) + q_3 m + \frac{24}{l_1^4} TEf (2 + m) \right),$$

oder:

$$M_2 = \frac{L^2}{4} \frac{-q_1 (2 + 2m) - q_2 m^3 (2 + m) + q_3 m + u (2 + m)}{(2 + m)^3 (2 + 3m)}, \dots (1)$$

wenn der Kürze wegen

$$\frac{24}{l_1^4} TEf = u$$

gesetzt wird.

Wegen der symmetrischen Anordnung kann diese Gleichung auch für die Stütze  $A_3$  gelten, sobald man darin  $q_3$  mit  $q_1$  vertauscht. Man erhält dann:

$$M_3 = \frac{L^2}{4} \frac{-q_3 (2 + 2m) - q_2 m^3 (2 + m) + q_1 m + u (2 + m)}{(2 + m)^3 (2 + 3m)}, \dots (1^a)$$

Nunmehr findet man auch die Reaction  $R_1$  der Endstütze  $A_1$  aus der Gleichung (22) in §. 37, worin man die Vertikalkraft  $V_1'$  unmittelbar links von  $A_1$  gleich Null anzunehmen hat, zu

$$R_1 = q_1 \frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1}, \dots (2)$$

und dem entsprechend hat man der Symmetrie wegen für die andere Endstütze  $A_4$ :

$$R_4 = q_3 \frac{l_1}{2} + \frac{M_3}{l_1}, \dots (2^a)$$

Aus der Vertikalkraft  $R_1 = V_1''$  unmittelbar rechts neben  $A_1$  ergibt sich die Schubkraft  $V_2'$  unmittelbar links neben  $A_2$  zu

$$V_2' = R_1 - q_1 l_1, \dots (3)$$

so daß man nun mit diesem Werthe von  $V_2'$  aus der Gleichung (22), §. 37 auch die Reaction  $R_2$  in  $A_2$  zu

$$R_2 = \frac{M_3 - M_2}{l_2} + q_2 \frac{l_2^2}{2} - V_2', \dots (4)$$

erhält. Die Ausdrücke für  $V_3'$  und  $R_3$  werden ganz analoge sein müssen. Vermittelt der Reaction  $R_1$  in  $A_1$  folgt nun das größte Biegemoment zwischen  $A_1$  und  $A_2$  zu

$$[M_1] = \frac{R_1^2}{2q_1} = \frac{q_1}{2} \left( \frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1 q_1} \right)^2, \dots (5)$$

welches sich bekanntlich in dem Abstände von  $A_1$

$$x_0 = \frac{R_1}{q_1} = \frac{l_1}{2} + \frac{M_2}{l_1 q_1}, \dots (6)$$

einstellt, wo die Vertikalkraft gleich Null ist.

Außerdem findet sich noch ein Maximalmoment in dem mittleren Felde, welches bei symmetrischer Anordnung und Belastung in der Mitte des Trägers eintritt, und dessen Betrag unter dieser Voraussetzung aus der Gleichung (25) in §. 37 sich ergibt zu:

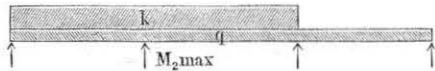
$$[M_2] = M_2 + \frac{q_2}{2} \left( \frac{l_2}{2} + \frac{M_3 - M_2}{l_2 q_2} \right)^2 = M_2 + q_2 \frac{l_2^2}{8}, \dots (7)$$



weil für  $q_1 = q_3$  auch  $M_2 = M_3$  ist. Es werden also an drei Stellen jeder Balkenhälfte die relativ größten Momente auftreten, nämlich in der Mitte  $[M_2]$ , über der Zwischenstütze  $M_2$ , und im Abstände  $x_0$  von dem Endauflager  $[M_1]$ . Es wird daher von Interesse sein, diejenigen Verhältnisse zu prüfen, unter denen die Bruchgefahr für den Träger an allen diesen Stellen die nämliche wird, d. h. unter denen die absolute Größe dieser Maximalmomente denselben Werth annimmt. Es muß hierbei bemerkt werden, daß der Werth jedes dieser Momente wesentlich von der Art der Belastung, d. h. von dem Verhältnisse der Größen  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q_3$  abhängig ist, und daß die gedachten Momentenmaxima  $M_2$ ,  $[M_1]$  und  $[M_2]$  keineswegs bei einer und derselben Belastungsweise gleichzeitig ihre absolut größten Werthe annehmen, wie aus dem Folgenden hervorgeht.

Aus der Gleichung (1) ersieht man zunächst, daß der absolute Werth des (negativen) Momentes  $M_2$  über der Zwischenstütze  $A_2$  um so größer wird, je größer die Belastungen  $q_1$  und  $q_2$  der benachbarten Felder sind und je kleiner die Belastung  $q_3$  des dritten Feldes ist. Man wird daher den absolut größten Werth, welchen  $M_2$  überhaupt annehmen kann, dann erhalten, wenn man für die beiden benachbarten Felder  $A_1 A_2$  und  $A_2 A_3$  die größte Verkehrslast  $k$  annimmt, während das abgewandte Feld  $A_3 A_4$  einer zufälligen Belastung gar nicht, sondern nur seinem Eigengewichte  $p$  unter-

Fig. 146.



worfen ist, wie Fig. 146 anzeigt. Man erhält diesen größten Werth von  $M_2$  daher, wenn man

$$q_1 = q_2 = p + k = q \text{ und } q_3 = p$$

in die Gleichung (1) einsetzt, zu

$$M_{2\max} = \frac{L^2}{4} \frac{q(2+2m)(1+m^2) + pm + u(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)} \dots (8)$$

Um auch den ungünstigsten Werth von  $[M_1]$  zu bestimmen, berechnet sich der Werth von  $R_1$  aus (2), wenn man für  $M_2$  den Werth aus (1) einsetzt zu

$$R_1 = \frac{L}{4} \frac{q_1(6+14m+6m^2) - q_2m^3(2+m) + q_3m + u(2+m)}{(2+m)^2(2+3m)}.$$

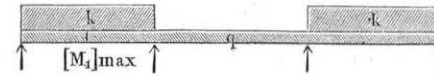
Man erkennt hieraus, daß dieser Ausdruck den größten Werth für  $R_1$  liefert, wenn man  $q_1$  und  $q_3$  möglichst groß, also gleich  $p + k = q$ , wenn man  $q_2$  möglichst klein, also gleich  $p$  wählt, Fig. 147, und damit erhält man:

$$R_{1\max} = \frac{L}{4} \frac{q(3+6m) - pm^3 + u}{(2+m)(2+3m)}.$$

Daher ergibt sich für diesen größten Auflagerdruck auch der größte Werth für  $[M_1]$  zu:

$$[M_1]_{\max} = \frac{R_1^2}{2q} = \frac{L^2}{32q} \left( \frac{q(3+6m) - pm^3 + u}{(2+m)(2+3m)} \right)^2 \dots (9)$$

Fig. 147.



Das Maximalmoment  $[M_2]$  in der mittleren Strecke berechnet sich nach (7), wenn man in dem Werthe für  $M_2$  in (1) die Belastung  $q_1 = q_3$  setzt zu

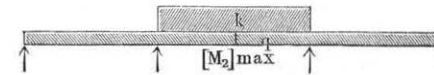
$$[M_2] = \frac{L^2}{4} \frac{q_1(2+2m-m) - q_2m^3(2+m) + u(2+m)}{(2+m)^3(2+3m)} + \frac{m^2L^2}{8(2+m)^2} q_2$$

$$= \frac{L^2 - 2q_1 + q_2(2+m)m^2 + 2u}{8(2+m)^2(2+3m)}.$$

Dasselbe erhält seinen größten Werth, wenn  $q_2$  möglichst groß, also gleich  $q$ , und  $q_1 = q_3$  möglichst klein, also gleich  $p$  ist, Fig. 148, und daher erhält man diesen größten Werth zu

$$[M_2]_{\max} = \frac{L^2}{8} \frac{q(2+m)m^2 - 2p + 2u}{(2+m)^2(2+3m)} \dots (10)$$

Fig. 148.



Hieraus ergibt sich, daß die drei Maximalmomente  $M_2$ ,  $[M_1]$  und  $[M_2]$  nicht zugleich, sondern bei den durch die Figuren 146 bis 148 dargestellten Belastungsarten eintreten, und es folgt daraus, daß bei der vollen Belastung der ganzen Brücke durch  $q$  keineswegs der ungünstigste Zustand vorhanden ist, indem hierbei nicht ein einziges der drei Maximalmomente seinen größten Werth annimmt.

Will man daher die gestellte Bedingung erfüllen, wonach an den gedachten drei Stellen gleiche Bruchgefahr stattfindet, so ergeben sich aus den drei Ausdrücken (8), (9) und (10) die Bedingungsgleichungen:

$$M_{2max} = [M_1]_{max} \dots \dots \dots (11)$$

und

$$M_{2max} = [M_2]_{max} \dots \dots \dots (12)$$

Damit diese beiden Gleichungen erfüllt werden können, genügt es nicht, eine entsprechende Senkung der mittleren Stützen vorzunehmen, sondern man muß noch für eine zweite Größe eine gewisse Annahme zulassen, etwa für das Verhältniß der Deffnungsweiten  $m = \frac{l_2}{l_1}$ , oder für das Verhältniß

der Belastungen  $v = \frac{p}{q}$ . Da diese Belastungen  $p$  und  $q$  von vornherein durch die Verhältnisse festgesetzt sein werden, so bleibt daher nur übrig, das Verhältniß der Deffnungsweiten  $m = \frac{l_2}{l_1}$  und die Senkung  $f$  so zu bestimmen,

daß den beiden Bedingungen (11) und (12) Genüge geschieht. Man erhält daher  $f$  und  $m$  durch Auflösung dieser Gleichungen in einem vorliegenden Falle, d. h. für eine gegebene Spannweite  $L$  und gegebene Belastungen  $p$  und  $q$ . Die Ausführung dieser weitläufigen Rechnung soll hier nicht vorgenommen werden, es möge statt dessen im Folgenden nur die Tabelle angeführt werden, welche von Mohr auf Grund dieser zuerst von ihm geführten Untersuchung dieses Falles berechnet worden ist. Diese Tabelle giebt für verschiedene Belastungsverhältnisse  $v = \frac{p}{q}$  zwischen 0 und 1

diejenigen Werthe von  $m$  und von  $\frac{u}{q} = \frac{24 TE}{q l_1^4} f$ , d. h. also auch diejenigen der Senkung  $f$ , welche zu wählen sind, um, wie vorstehend angenommen, gleich große Werthe für die Bruchmomente  $M_{2max}$ ,  $[M_1]_{max}$  und  $[M_2]_{max}$  zu erhalten. Der Werth dieses Momentes selbst ist in der vierten Zeile der Tabelle als Procentsatz des Betrages  $q \frac{L^2}{72}$  angegeben, welchen

letzteren das Biegemoment in der Mitte der Deffnungen in demjenigen Falle annehmen würde, in welchem man die Spannweite  $L$  in drei gleiche Deffnungen zerlegen und jede dieser Deffnungen durch einen einfachen Träger von der Länge  $\frac{L}{3}$  überdecken würde. Die in dieser vierten Zeile angegebenen

Coefficienten von  $q \frac{L^2}{72}$  lassen daher ein Urtheil zu über denjenigen Procentsatz, um welchen durch die Anordnung des continuirlichen Trägers gegenüber der Aufstellung von Einzelträgern das Biegemoment, also auch der Materialaufwand verringert wird. Dieser Gewinn schwankt der Tabelle zufolge zwischen 18 Proc. für  $v=0$ , d. h. für kleine Brücken, deren Eigengewicht unerheblich ist im Vergleich zur Belastung, und 39 Proc. für die

größten Spannweiten, für welche das Eigengewicht  $p$  vorherrscht. Ebenso erkennt man aus der Tabelle, daß die mittlere Deffnungsweite  $l_2$  für alle Belastungsverhältnisse größer zu nehmen ist, als die der Seitenöffnungen und zwar um 13 bis 17 Proc. In der Ausführung pflegt man dieses Verhältniß  $\frac{l_2}{l_1}$  in der Regel zu 1,2 bis 1,25 zu wählen.

Tabelle von Mohr

über das Verhältniß der Deffnungen und die Senkung der Mittelstützen bei continuirlichen Trägern auf vier Stützen.

$v = \frac{p}{q} = \frac{\text{Eigenlast}}{\text{Totallast}}$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$m = \frac{l_2}{l_1} = \frac{\text{Mittelöffnung}}{\text{Seitenöffnung}}$	1,13	1,14	1,15	1,16	1,165	1,17
$\frac{u}{q} = \frac{24 TE}{q l_1^4} f$ ; $f$ = Senkung d. Mittelstützen	0,40	0,47	0,53	0,59	0,65	0,72
$M_{max} = \frac{q L^2}{72}$ mal	0,82	0,78	0,74	0,69	0,65	0,61

Aus den Resultaten dieser Tabelle folgert Mohr die empirischen Formeln:

$$m = 1,13 + 0,04 \frac{p}{q}, \dots \dots \dots (13)$$

$$u = 0,40 q + 0,32 p \dots \dots \dots (14)$$

$$M_{max} = \frac{L^2}{72} (0,82 q - 0,21 p) \dots \dots \dots (15)$$

Da hier  $u = \frac{24 TE}{l_1^4} f$  angenommen wurde, so ist auch:

$$f = \frac{l_1^4}{60 TE} (q + 0,80 p) \dots \dots \dots (16)$$

Beispiel. Für eine Eisenbahnbrücke sollen zwei über drei Deffnungen gespannte, 4 m hohe continuirliche Träger von  $L = 120$  m Länge angeordnet werden. Die Verhältnisse sind mit Rücksicht darauf zu ermitteln, daß die Verkehrslast pro laufenden Meter der Brücke 4000 kg beträgt und für das Material eine höchstens zulässige Faserspannung von 6 kg pro Quadratmillimeter, sowie ein Elasticitätsmodul von  $E = 20\,000$  angenommen werden kann.

Nimmt man das Eigengewicht der ganzen Brücke zu 2400 kg pro 1 m Länge, also die dadurch bewirkte Belastung für jeden der beiden Längsträger gleich der Hälfte zu  $p = 1200$  kg an, so hat man das Verhältniß der beiden Belastungen

$$v = \frac{p}{q} = \frac{1200}{1200 + 2000} = 0,375.$$

Hiermit erhält man aus (13):

$$m = 1,13 + 0,04 \cdot 0,375 = 1,145,$$

folglich wird jede Seitenöffnung eine Weite

$$l_1 = \frac{L}{2 + m} = \frac{120}{3,145} = 38,1 = \text{rot } 38 \text{ m},$$

und die Mittelöffnung eine solche von

$$l_2 = 120 - 2 \cdot 38 = 44 \text{ m}$$

zu erhalten haben.

Das größte Biegemoment bestimmt sich nach (15) zu

$$M_{\max} = \frac{3,2 \cdot 120^2}{72} \left( 0,82 - 0,21 \frac{1,2}{3,2} \right) = 640 \cdot 0,741 = 474 \text{ Metertonnen.}$$

Um die Senkung der Mittelstützen zu berechnen, bestimmt man zunächst das Trägheitsmoment  $T$  mit Rücksicht darauf, daß das Biegemoment  $M_{\max} = 474\,000$  mkg eine Spannung  $s = 6$  kg in der äußersten Faser erzeugt, und daß diese äußerste Faser um die halbe Trägerhöhe

$$\frac{h}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$$

von der neutralen Ase absteht, nach der Grundformel I des §. 35 durch

$$M_{\max} = s \frac{T}{e} \text{ zu } T = \frac{e M_{\max}}{s},$$

also hier, wenn die Längen in Metern, die Kräfte in Kilogrammen ausgedrückt werden:

$$T = \frac{2 \cdot 474\,000}{6000\,000} = 0,158.$$

Mit diesem Werthe erhält man dann aus (16) die Senkung der mittleren Stützen

$$f = \frac{3200 \cdot 38^4}{60 \cdot 0,158 \cdot 20\,000 \cdot 1000^2} (1 + 0,80 \cdot 0,375) = 0,0458 \text{ m oder rund } 46 \text{ mm.}$$

Aus den vorstehenden Untersuchungen erkennt man, daß die Anordnung continuirlicher Träger, im Vergleiche mit der Anwendung von Einzelträgern für jede Brückenöffnung, mit einem gewissen Gewinne verbunden ist, indem bei den ersteren die Inanspruchnahme und somit der Materialaufwand geringer ausfällt, als bei isolirten Trägern. Die Größe dieses Gewinnes ist insbesondere aus den Coefficienten zu erkennen, mit welchen nach der vorstehenden Tabelle der Werth des Momentes für Einzelträger  $\frac{qL^4}{72}$  zu multipliciren ist, um das größte Moment  $M_{\max}$  des continuirlichen Trägers zu erhalten. Diese Coefficienten zeigen, daß der besagte Vortheil um so

größer ist, je mehr sich das Verhältniß  $v = \frac{p}{q}$  der Einheit nähert, d. h. je größer die lichten Spannweiten sind, und daß er bei Trägern auf vier Stützen bis zu 39 Proc. anwachsen kann. So groß nun auch dieser Vortheil, insbesondere bei schweren Trägern oder großen Spannweiten ist, so hat doch die Anwendung continuirlicher Träger gewichtige praktische Bedenken, wie sich aus dem Folgenden ergibt.

Aus der Rechnung erkennt man, daß es sich meist um sehr geringe Höhenunterschiede der Auflager handelt, durch deren Einfluß die Verringerung der Anspannung des Trägers herbeigeführt wird; so genügt in dem vorstehend berechneten Beispiele schon eine Senkung der Mittelstützen um noch nicht 46 mm, um das Moment  $M_{\max}$  in dem Verhältnisse 1 : 0,741 zu verringern, eine Senkung, die im Verhältnisse zu der Trägerlänge von 120 m sehr gering erscheinen muß.

Wenn man nun auch bei sorgfältiger Ausführung diese Höhenlagen der Stützen genau erzeugen kann, so muß man doch befürchten, daß im Laufe der Zeit, etwa durch ungleichmäßiges Setzen der Brückenpfeiler, diese gegenseitige Lage der Stützpunkte sich verändern könne, und es ist leicht einzusehen, daß unter einer solchen Voraussetzung der Zustand des Trägers ein sehr ungünstiger wird. Denkt man sich z. B., daß bei einem auf drei Stützen ruhenden Träger mit entsprechend tiefer gelegtem Mittelauflager, wie er im vorhergehenden Paragraphen berechnet wurde, die Außenpfeiler sich um so viel senken würden, daß sämmtliche Stützpunkte in eine Horizontale zu liegen kämen, so würde dadurch das Moment, wofür der Träger berechnet ist, und welches ursprünglich an den gefährdeten Stellen  $\frac{qL^2}{32} (1 - u)$  be-

trag, zu dem Betrage  $\frac{qL^2}{32}$  gewachsen sein.

Diese Senkung würde für den im Beispiel 1 des vorigen Paragraphen berechneten Träger von 40 m Länge nur 12 mm zu betragen haben, um das Maximalmoment in dem Verhältnisse 1 :  $1 - u = \frac{1}{0,799} = 1,25$  zu steigern.

Würde die Höhenveränderung noch größer werden, so würde eine weitere Vergrößerung des Bruchmomentes veranlaßt werden, und das letztere würde den äußersten Betrag  $\frac{qL^2}{8}$ , also mehr als das Vierfache desjenigen, wonach der Träger construirt ist, erlangen, wenn die Außenstützen sich so tief gesenkt hätten, daß der Träger nur noch in der Mitte  $A_2$  aufliegen würde, Fig. 149 (a. f. S.). Es würde derselbe Betrag  $\frac{qL^2}{8}$  des Maximalmomentes



auch eintreten, wenn etwa die mittlere Stütze  $A_2$  sich um so viel gesenkt hätte, daß der Träger nur an beiden Enden  $A_1$  und  $A_3$  aufliegen würde,

Fig. 149.

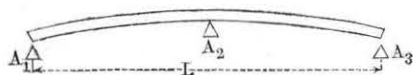
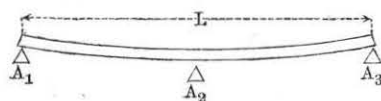


Fig. 150.



durchbiegen würde. Man erhielt diese Durchsenkung für den durch Fig. 149 dargestellten Zustand nach §. 35, 2 zu

$$f = \frac{q l^4}{8 T E} = \frac{q L^4}{16 \cdot 8 T E} = 0,167 \text{ m},$$

und für den Zustand der Fig. 150 nach §. 35, 4 durch

$$f = \frac{5}{384} \frac{q L^4}{T E} = 0,278 \text{ m}.$$

Wenn nun auch eine so beträchtliche Veränderung der Auflagerhöhen nicht zu befürchten sein mag, so erkennt man doch zur Genüge aus den vorstehenden Zahlenwerthen, in welcher erheblichen Weise die Sicherheit continuirlicher Träger durch zufällige und unvermeidliche Veränderungen der Auflager beeinflusst werden kann.

Hierzu tritt der ungünstige Umstand, daß auch schon bei der Herstellung des eisernen Trägers Abweichungen von der richtigen Form leicht vorkommen können, welche nur durch Anwendung besonderer Sorgfalt sich vermeiden lassen. Die vorstehende Theorie ist nämlich immer von der Voraussetzung ausgegangen, daß die Unterkante des Trägers im unbelasteten Zustande eine gerade Linie sei, oder daß doch wenigstens sämtliche Auflagerstellen desselben ursprünglich in einer Geraden liegen, so lange der Träger noch nicht durch eine Belastung, also auch nicht durch sein Eigengewicht angegriffen ist. Denkt man sich etwa den Träger nach seiner Fertigstellung, bei welcher er auf hoher Kante zu stehen pflegt, umgeklappt, so daß sein Eigengewicht nunmehr nicht auf eine Durchbiegung in der Trägerebene wirkt, so müssen in dieser Lage des Trägers die sämtlichen Auflagerstellen genau in einer geraden Linie liegen. Wenn dies nicht der Fall ist, wenn z. B. die mittlere Auflagerstelle um eine gewisse Größe  $a$  von der geraden

Fig. 150. Die hierzu erforderliche Höhendifferenz zwischen der Mittelstütze und den äußeren Auflagern müßte für diese äußersten Fälle offenbar den Betrag der Durchbiegungen erreichen, um welche der Träger unter Einfluß der Belastung  $q$  sich an den Enden resp. in der Mitte

Verbindungsline der äußeren Auflagerflächen abweiche, wie dies unter anderem sicher der Fall sein wird, wenn diese Auflagerstellen bei der Zusammensetzung des Trägers in aufrechter Stellung in einer Geraden befindlich gewesen sein sollten, so ist diese Abweichung von der richtigen Trägerform offenbar in ihrem Einflusse gleichbedeutend mit einer Höhenabweichung der mittleren Stütze von der Verbindungsline der äußeren Auflager um eben dieselbe Größe  $a$ . Man ersieht hieraus, wie durch ein möglicherweise in ungünstiger Art stattfindendes Zusammentreffen der nie ganz zu vermeidenden Ungenauigkeiten der Anfertigung mit denen der Aufstellung die Sicherheit continuirlicher Träger in hohem Grade gefährdet erscheint, und daß eine stete Ueberwachung des betreffenden Zustandes unerlässlich ist.

Diese Gründe sind denn auch hauptsächlich die Veranlassung, weshalb man neuerdings mehr und mehr von der Anwendung continuirlicher Brückenträger zurückgekommen ist, und den isolirten Trägern über die einzelnen Oeffnungen den Vorzug giebt, trotzdem dieselben nach den vorstehenden Rechnungen einen größeren Materialaufwand zu ihrer Ausführung erfordern. Es ist leicht ersichtlich, daß bei der Anordnung von Einzelträgern eine Veränderung der Auflagerhöhen, wie sie etwa durch ungleichmäßiges Setzen der Pfeiler eintritt, so bedenkliche Wirkungen für die Sicherheit nicht im Gefolge hat, wie sie vorstehend für die continuirlichen Träger erkannt wurden.

Es mag hier noch die sinnreiche, ebenfalls von Mohr angegebene Aufstellungsart angeführt werden, welche den Zweck hat, die gedachten Uebelstände zu beseitigen, welche aus den unvermeidlichen Fehlern der Anfertigung und Aufstellung der continuirlichen Träger herrühren. Mohr schlägt zu dem Ende vor, continuirliche Träger in den Einzelstrecken der verschiedenen Oeffnungen getrennt anzufertigen und aufzustellen, und nach ihrer Aufstellung die Enden der auf den Mittelpfeilern zusammentreffenden Einzelträger nachträglich durch Vernietung mit einander zu verbinden. Ist dies geschehen, so hat man eine nachträgliche Senkung der mittleren Auflager durch Entfernung von besonderen zu dem Zwecke untergelegten Platten zu bewirken. Die Stärke dieser Platten, d. h. die Größe der entsprechenden Senkung, ist natürlich nicht direct durch die vorstehend entwickelten Formeln zu berechnen, sondern mit Rücksicht darauf zu bestimmen, daß der Träger in dem Zustande, wo er nur sein Eigengewicht zu tragen hat, auf Stützen ruht, welche solche Höhenlage zu einander haben, daß die Momente über den Mittelstützen gleich Null sind, wie es offenbar vor der Zusammentuppelung der Einzelträger der Fall war, und woran die Vereinigung nichts ändern konnte. Von diesem Zustande ausgehend ist dann die nachträglich zu bewirkende Senkung der Innenstützen so zu berechnen, daß die verschiedenen Maximalmomente für die ungünstigsten Belastungsfälle einander gleich

werden. Hinsichtlich der Ausführung dieser Rechnungen muß hier auf die benutzte Quelle\*) verwiesen werden.

§. 40. Die elastische Linie als Seilcurve. Die Berechnung der continuirlichen Träger führt, wie aus dem Vorstehenden sich ergibt, zu verwickelten und umständlichen Rechnungen, sobald die Anzahl der Stützen eine größere und die Belastungsart nicht eine sehr einfache ist. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, kann man sich daher auch hier graphischer Methoden bedienen, welche eine für die Praxis genügende Genauigkeit gewähren. Im Folgenden soll die von Mohr\*\*) herrührende, durch ihre Anschaulichkeit und Einfachheit ausgezeichnete Methode näher angegeben werden. Aus der für die elastische Linie geltenden Gleichung

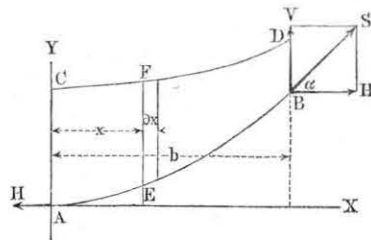
$$M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

oder

$$E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{T} \dots \dots \dots (1)$$

läßt sich wie folgt nachweisen, daß die elastische Linie zu den sogenannten Seilcurven gehört. Man denke sich zu dem Zwecke in  $AB$ , Fig. 151, ein

Fig. 151.



Seilstück, dessen tiefter Punkt A ist, so daß daselbst die Tangente des Seiles horizontal ausfällt, und dessen Belastung in bekannter Weise der Belastungslinie  $CFD$  gemäß derart angenommen ist, daß die Ordinate  $EF$  in dem beliebigen Punkte  $E$  daselbst die spezifische Belastung  $q$  nach einem gewissen willkürlich gewählten Maßstabe darstellt. In dem Punkte  $B$  wirkt auf das Seilstück eine Zugspannung  $S$ , deren horizontale Componente gleich dem überall constanten Werthe  $H$  ist, während die verticale Componente  $V$  übereinstimmt mit der zwischen dem Scheitel  $A$  und dem Punkte  $B$  angebrachten Belastung. Diese letztere ist nach dem Begriffe der Belastungsfläche durch das Flächenstück  $ACDB$  dargestellt.

Nimmt man den Scheitel  $A$  der Seilcurve zum Anfang rechtwinkliger Coordinaten an, deren  $X$ -Axe horizontal gerichtet ist, und ist  $\alpha$  der Winkel

\*) S. Zeitschr. d. Archit. u. Ing.-Ver. für Hannover, 1860.

\*\*) S. Zeitschr. d. Archit. u. Ing.-Ver. für Hannover, 1868.

des Seiles in  $B$  gegen die Horizontale, so hat man dem Vorstehenden gemäß

$$S \cos \alpha = H,$$

$$S \sin \alpha = V = \int_0^b q \partial x,$$

folglich durch Division:

$$\tan \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\int_0^b q \partial x}{H},$$

woraus durch Differentiation:

$$H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q \dots \dots \dots (2)$$

folgt. Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit dem unter (1) angegebenen zeigt nun ohne Weiteres, daß die elastische Linie ebenfalls eine Seilcurve sein muß, für welche der horizontale Zug durch  $H = E$  dargestellt ist, und für welche man in jedem Punkte eine Belastungsordinate anzunehmen hat,

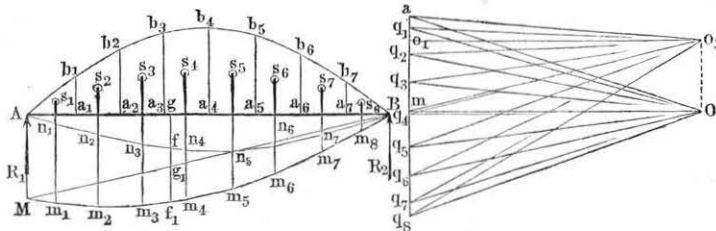
welche durch  $q = \frac{M}{T}$  gegeben ist. Denkt man sich zunächst das Trägheitsmoment des Balkens für alle Punkte desselben von derselben Größe, so kann man auch  $q = M$  setzen, und es ergibt sich aus dem Vorstehenden die folgende Construction der elastischen Linie.

Für irgend einen Balken, welcher etwa auf zwei Stützen frei aufliegend angenommen werden möge, kann man, wenn die Belastung gegeben ist, das auf Biegung wirkende Moment  $M$  in der mehrfach gezeigten Weise bestimmen, sei es durch Rechnung oder vermöge eines Seilpolygons, wie dies in Thl. I, Anhang 2 angegeben und an mehreren Beispielen durchgeführt worden ist. Ist dies geschehen, so kann man in jedem Punkte des Balkens eine Ordinate aufgetragen denken, welche nach einem beliebig anzunehmenden Maßstabe die Größe des in diesem Punkte angreifenden Momentes darstellt, mit anderen Worten, man kann die Momentenfläche des Balkens in der vorstehend mehrfach angegebenen Art construiren. Entwirft man nun mit Hilfe eines Kräftepolygons, dessen Polabstand oder Horizontalzug man nach demselben Maßstabe wie die Belastungen gleich dem Elasticitätsmodul  $E$  annimmt, diejenige Seilcurve, welche man erhält, wenn man die gedachte Momentenfläche als Belastungsfläche ansieht, so erhält man in derselben die elastische Linie des Balkens, und also in den verticalen Ordinaten ihrer verschiedenen Punkte die Durchbiegungen dieser Punkte.

Um dieses Verfahren, welches zwar bei früheren Gelegenheiten mehrfach zur Anwendung gekommen ist, des Zusammenhanges wegen hier zu er-

läutern, diene Fig. 152. Es sei für den Balken  $AB$  die Belastungslinie durch die krumme oder gebrochene Linie  $A b_1 b_2 b_3 \dots B$  gegeben, und durch die verticalen Theilungslinien  $ab$  sei die Belastungsfläche beliebig in La-mellen getheilt, deren Gewichte  $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$  in den Schwerpunkten  $s$  der Flächenstreifen wirkend gedacht werden. Die Größen dieser den betreffenden Streifen der Belastungsfläche proportionalen Kräfte seien nach einem gewissen Maßstabe im Kräftepolygone als die Strecken  $a q_1, q_1 q_2, q_2 q_3 \dots$  der Reihe nach angetragen. Wählt man den Pol  $O_1$  des Kräfte-

Fig. 152.



polygons beliebig, und construirt in bekannter Weise durch Parallellinien mit den Polstrahlen  $O_1 a, O_1 q_1, O_1 q_2 \dots$  das Seilpolygon  $M m_1 m_2 \dots B$ , so erhält man bekanntlich in der Schlußlinie  $BM$  die Richtung desjenigen Polstrahles  $Om$ , welcher die Gesamtbelastung  $a q_8$  so theilt, daß die beiden Theile  $am$  und  $m q_8$  die Auflagerdrücke  $R_1$  und  $R_2$  in  $A$  und  $B$  angeben. Wenn man daher den Pol in einer durch diesen Punkt  $m$  gehenden Horizontalinie in  $O$  angenommen hätte, so würde man mit diesem Pole das Seilpolygon  $A n_1 n_2 n_3 \dots B$  mit horizontaler Schlußlinie  $AB$  erhalten haben. Es ist ferner bekannt, daß ein solches Seilpolygon für jeden seiner Punkte wie  $f$  in der verticalen Ordinate  $y = fg$  ein Maß für das daselbst stattfindende Moment abgibt, dergestalt, daß dieses Moment durch  $M = Hy$  ausgedrückt ist, wenn  $H$  diejenige Kraft bedeutet, welche durch die Polbistanz  $m O$  nach dem Kräftemaßstabe dargestellt ist, während  $y$  nach dem Längenmaßstabe zu messen ist, in welchem die Zeichnung ausgeführt ist. Werden beispielsweise die Belastungen durch Kilogramme und die Längen durch Meter gemessen, so erhält man das Moment für den Punkt  $f$  des Balkens zu  $M = Hy$  Meterkilogramm. Es geht hieraus auch hervor, daß die beiden mit den Polen  $O$  und  $O_1$  gezeichneten Seilpolygone  $An$  und  $Mm$  für jeden Punkt  $g$  des Balkens gleich große verticale Ordinaten  $fg = f_1 g_1$  haben müssen, sobald für beide Pole  $O$  und  $O_1$  derselbe Abstand von der Kraftlinie  $a q_8$  angenommen wurde. Wäre dagegen der Abstand  $O_1 o_1$  des

Poles  $O_1$  größer oder kleiner als derjenige  $Om$  gewählt, so daß etwa

$$O_1 o_1 = \mu \cdot Om$$

wäre, so würden an jeder Stelle des Balkens die Ordinaten  $y$  und  $y_1$  der beiden zugehörigen Seilpolygone im umgekehrten Verhältnisse zu einander stehen, d. h. man hätte in diesem Falle  $y_1 = \frac{1}{\mu} y$ , denn für beide Polygone gilt

$$M = Hy = Om \cdot fg = O_1 o_1 \cdot f_1 g_1.$$

Wendet man diese Betrachtungen auf den vorliegenden Fall an, so hat man zur Verzeichnung der elastischen Linie die Belastungsfläche  $A b_1 b_2 \dots B$  des Balkens so zu bestimmen, daß die Ordinate für jeden Punkt wie  $g$  gleich ist dem in  $g$  wirkenden Momente, während man die Polbistanz  $Om$ , welche den Horizontalzug darstellt, gleich dem Elasticitätsmodul  $E$  zu machen hat. Die mit dieser Polbistanz gezeichnete Seilcurve, d. h. die von dem Seilpolygone umhüllte Curve stellt dann nach dem Obigen die elastische Linie des Balkens vor, deren Construction daher nach den bekannten Regeln in jedem Falle leicht zu entwerfen ist, wie im Folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

Was den beim Auftragen der Belastungsordinaten anzuwendenden Maßstab anbetrifft, so läßt sich darüber Folgendes bemerken. Setzt man in der allgemeinen Gleichung  $M = TE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  der elastischen Linie für das Moment  $M$  das Product  $Pa$  aus einer Kraft  $P$  Kilogramm und einer Länge  $a$  Meter, und setzt man für das Trägheitsmoment  $T$  des Querschnittes den Ausdruck  $Fr^2$ , worin  $F$  die Fläche des Querschnittes in Quadratmetern und  $r$  den sogenannten Trägheitshalbmesser in Metern bezeichnet, so kann man die obige Gleichung auch schreiben:

$$\frac{Pa}{r^2} = FE \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

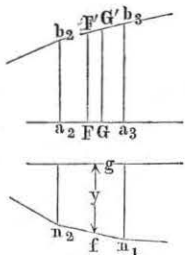
Hierin bedeutet  $FE$  eine Kraft in Kilogrammen, welche dem Horizontalzuge  $H$  in der Gleichung der Seilcurve (2)  $q = H \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  entspricht. Andererseits ist  $\frac{Pa}{r^2}$  eine Kraft dividirt durch eine Länge, d. h. eine spezifische Belastung oder eine Belastung für die Längeneinheit gleich 1 m, entsprechend dem Werthe  $q$  in der Gleichung (2) der Seilcurve. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich nunmehr analog der Construction in Fig. 152 das folgende Verfahren.

Man habe bei der Zeichnung des Balkens  $AB$  einen Längenmaßstab  $L$  angenommen, welcher etwa in dem Verhältnisse  $\lambda$  z. B.  $1/200$  verjüngt ist,



so daß also jeder Länge der Abscissen in der Zeichnung von 5 mm eine wirkliche Trägerlänge von 1 m entspricht, und man habe ferner für die Horizontalkraft  $H = FE$  einen Kräftemaßstab  $K$  so gewählt, daß jedem

Fig. 153.



Kilogramme etwa eine Länge gleich  $\lambda$  in der Zeichnung zukommt. Wenn man nun nach demselben Kräftemaßstabe  $K$  die Größe der spezifischen Kraft  $\frac{Pa}{r^2}$  an jeder Stelle des Balkens als Be-

lastungsordinate aufträgt, z. B. für den Punkt  $F$ , Fig. 153, die Ordinate  $FF' = \frac{Pa}{r^2} = \frac{M}{r^2}$  macht,

unter  $M$  das Moment in  $F$  verstanden, so ist es deutlich, daß daselbst der Streifen  $FF'G'G$  von der Breite 1 m, also in der Figur von der Breite

$FG = 5 \text{ mm}$ , durch seinen Inhalt die Größe der auf 1 m Länge entfallenden Belastung des Trägers in  $F$  repräsentirt, genau so, wie es in Fig. 152 der Fall ist, wo die Ordinaten  $ab$  der Belastungsfläche den spezifischen Belastungen des Trägers entsprechen. Es ergibt sich daher, daß man zur Auftragung der Kräfte im Kräftepolygone die einzelnen Flächenstücke, wie  $a_2b_2b_3a_3$ , in Rechtecke von der Basis  $FG = 1 \text{ m}$  zu verwandeln und die Höhe der so verwandelten Rechtecke auf der Verticalen des Kräftepolygons ( $aq_3$  in Fig. 152) aufzutragen hat. Die so erhaltenen Strecken stellen dann offenbar die den Elementen  $Aa_1, a_1a_2 \dots$  des Balkens zugehörigen Werthe von  $\frac{M}{r^2}$  vor, und wenn man das Seilpolygon nunmehr zeichnet, so erhält man in der zugehörigen Ordinate  $y = fg$  eine Länge, für welche die dem Seilpolygone eigenthümliche Beziehung gilt,

$$Hy = \int_0^x q \, dx,$$

oder im vorliegenden Falle

$$FE \cdot y = \int_0^x \frac{M}{r^2} \, dx.$$

In diesem Ausdrucke ist die Ordinate  $y = fg$  des Seilpolygons nach dem Maßstabe  $L$  der Zeichnung zu messen; es würde also beispielsweise bei dem gewählten Verjüngungsverhältnisse  $\lambda = 1/200$  jeder Länge der Ordinate  $y$ , welche gleich 5 mm ist, eine Länge von 1 m entsprechen. Man erhält also den Werth

$$FE \cdot y = \int_0^x \frac{M}{r^2} \, dx$$

in Meterkilogrammen, wenn man die Anzahl von Kilogrammen, welche die Polabstand  $H$  nach dem Kräftemaßstabe  $K$  darstellt, multiplicirt mit der Anzahl von Metern, welche die Ordinate  $y$  nach dem Längenmaßstabe  $L$  vorstellt. Würde man in dieser Weise verfahren, so würde bei der außerordentlichen Größe des Elasticitätsmoduls  $E$ , also auch der Horizontalkraft  $FE$ , gegen welche die Strecken auf der Verticalen des Kräftepolygons sehr klein sind, der Pol in weite Ferne gerückt, so daß die Polstrahlen nur wenig von einander und von der Horizontalen abweichen würden. In Folge dessen würde die erhaltene Seilcurve, welche die elastische Linie darstellt, sehr flach werden, und von der geraden Balkenaxe nur unmerklich abweichen. Wenn man sich jedoch vorstellt, daß man als den Maßstab, nach welchem man den Horizontalschub  $H = FE$  aufträgt, nicht denjenigen  $K$ , sondern einen  $\nu$ fach kleineren annimmt, so daß also für die Horizontalkraft  $H$  ein Kilogramm nicht mehr durch  $\lambda$  Millimeter, sondern durch  $\nu\lambda$  Millimeter dargestellt ist, während man für die verticalen Kräfte den Maßstab  $K$  beibehält, so ist es nach dem oben über den Einfluß der Polabstand Gesagten klar, daß nunmehr die

Ordinaten der Seilcurve im Verhältnisse von  $\frac{1}{\nu}$  vergrößert erscheinen. Gesezt, man würde  $\nu = \lambda = 1/200$ , also gleich dem für die Längen gewählten Verjüngungsverhältnisse der Zeichnung annehmen, so würde eine Vergrößerung der Ordinaten  $y$  in dem Verhältnisse  $\frac{1}{\nu} = 200$  eintreten, mit anderen Worten, die Ordinaten der Seilcurve stellen dann die Durchbiegungen des Balkens in natürlicher Größe vor. Hierauf beruht die Möglichkeit, den Verlauf der elastischen Linie und damit die mit der Biegung im Zusammenhange stehenden Kraftverhältnisse des elastischen Balkens graphisch zu behandeln.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß in Folge der nach dem Vorstehenden anzunehmenden Verschiedenheit des Kräftemaßstabes für die verticalen und horizontalen Kräfte die sich ergebende Seilcurve wegen der dadurch hervorgerufenen Verzerrung nun nicht mehr die Copie der elastischen Linie vorstellen kann, und daß die Neigungen der Tangenten beider Curven in entsprechenden Punkten verschieden ausfallen müssen. Es ist aber aus dem Obigen ohne Weiteres der einfache Zusammenhang klar, welcher zwischen diesen beiden Neigungen für jeden Punkt besteht. Wenn nämlich in irgend einem Punkte des Balkens die Richtung der Tangente an die Seilcurve den Winkel  $\alpha'$  mit der Horizontalen bildet, so muß die elastische

Linie in demselben Punkte unter einem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont geneigt sein, für welchen man hat

$$\operatorname{tg} \alpha = v \operatorname{tg} \alpha',$$

wofür man bei der Kleinheit von  $\alpha$  in den meisten Fällen  $\alpha = v \alpha'$  wird setzen können.

Wenn man es mit einem Balken von überall gleichem Querschnitte zu thun hat, für welchen also das Trägheitsmoment  $T = F r^2$  überall dieselbe Größe hat, so kann man die Ordinaten der Belastungsfläche auch einfach proportional der Größe des Momentes  $M$  und die Horizontalkraft einfach gleich dem Elasticitätsmodul  $E$  annehmen, da diese Annahme, welche  $T=1$  voraussetzt, nur auf die Einheit des für die Horizontalkraft  $H$  angewendeten Maßstabes, also auf das oben mit  $v$  bezeichnete Verhältniß, nicht aber auf das gegenseitige Verhältniß der Kräfte von Einfluß ist. Wenn dagegen der Querschnitt des Balkens an verschiedenen Stellen verschieden ist, so kann man die Untersuchung in zweifacher Weise führen. Nach der einen Methode setzt man in dem Ausdrucke  $T = F r^2$  die Fläche  $F$  gleich der Einheit (1 qm) voraus, bestimmt mit Rücksicht darauf die Trägheitshalbmesser  $r$  für die verschiedenen Querschnitte und trägt als Ordinaten der Belastungsfläche in den einzelnen Punkten Strecken auf, welche den jeweiligen Werthen von  $\frac{M}{r^2}$  entsprechen. Andererseits kann man aber auch einen überall con-

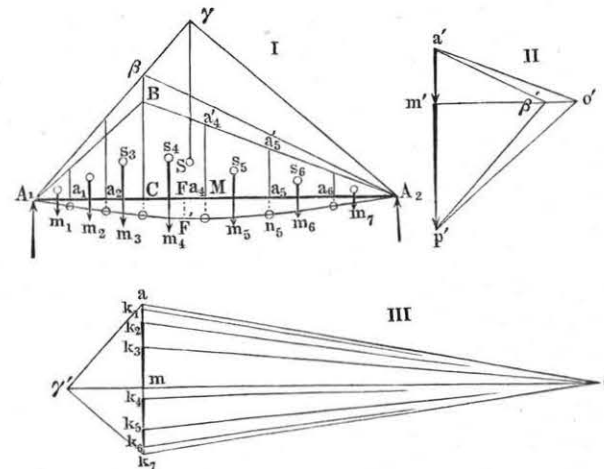
stanten Trägheitshalbmesser  $r$  gleich der Einheit zu Grunde legen, so daß man die Belastungsordinaten den Momenten direct proportional aufträgt, hat aber dann zur Verzeichnung der einzelnen Seiten des Seilpolygons für jeden Punkt eine veränderte Horizontalkraft anzuwenden, welche durch  $F \cdot E$  ausgedrückt ist, wenn  $F$  überall die aus der Beziehung  $T = F \cdot 1^2$  sich ergebende Fläche bedeutet. Mit anderen Worten, man verändert dem Werthe des Trägheitsmomentes entsprechend im Kräftepolygone die Pol-  
distanz, mit Hilfe deren die entsprechende Seite des Seilpolygons gezeichnet wird. Es kann, je nach den Umständen bald das eine, bald das andere dieser beiden Verfahren bequemer in der Anwendung sein. Daß beide zu demselben Resultate führen müssen, ist leicht zu erkennen, wenn man bedenkt, daß ganz allgemein die  $n$ -fach vergrößerte Annahme von  $F$  also auch von der Horizontalkraft  $H$  ebenfalls eine  $n$ -fache Vergrößerung der Belastungsordinaten  $\frac{M}{r^2} = M \frac{F}{T}$ , also nur eine Veränderung in der Einheit des Kräftemaßstabes zur Folge hat.

§. 41. Beispiele. Zur Erläuterung der vorstehend angegebenen Beziehungen möge die Anwendung des darauf beruhenden graphischen Verfahrens an

einigen Beispielen gezeigt werden. Es sei  $A_1 A_2$ , in Fig. 154, I, ein etwa im Maßstabe 1 : 100 gezeichneter horizontaler Träger auf zwei Stützen, dessen Länge  $l = 5$  m ist, und welcher im Abstände  $A_1 C = a = 1,5$  m von  $A_1$  durch ein concentrirtes Gewicht von  $P = 5000$  kg belastet sein soll. Wenn zunächst von der Belastung durch das Eigengewicht abgesehen wird, so findet man das in  $C$  auf den Balken wirkende Moment bekanntlich zu

$$M = P \frac{a(l-a)}{l} = 5000 \frac{1,5 \cdot 3,5}{5} = 5250 \text{ mkg},$$

Fig. 154.



und wenn man diese Größe nach einem beliebigen Maßstabe, d. h. für eine beliebige Basis  $b$  gleich  $CB$  anträgt, so giebt die Dreiecksfläche  $A_1 B A_2$  die Momentenfläche des Trägers. Man kann dieselbe übrigens ohne jegliche Rechnung graphisch bestimmen, wenn man nach dem für die Kräfte angenommenen Maßstabe (in der Figur 1 mm = 200 kg) auf einer Verticallinie in II die Strecke  $a' p' = P$  anträgt und durch  $a'$  und  $p'$  zwei Parallelen mit den beiden Geraden  $\beta A_2$  und  $\beta A_1$  legt, welche man von einem beliebigen Punkte  $\beta$  der Richtung  $P$  nach den Stützpunkten  $A_2$  und  $A_1$  gezogen hat. Zieht man durch den Durchschnitt  $\beta'$  dieser Linien eine Horizontale  $\beta' m'$ , so theilt diese bekanntlich die Kraft  $a' p'$  in  $m'$  in zwei Abschnitte, welche den Auflagerdrücken  $R_1$  in  $A_1$  und  $R_2$  in  $A_2$  entsprechen. Man hat also, um das Seilpolygon  $A_1 B A_2$  für die Momente mit einer horizontalen Schlußlinie  $A_1 A_2$  zu erhalten, auf der durch  $m'$  gelegten Horizontalen nur die Länge  $m' o'$  gleich der für den Momentenmaßstab gewählten

Basis  $b$  anzutragen (in der Figur II ist  $b = m'o' = 20$  mm, entsprechend einer Länge von 2 m). Zieht man dann durch  $A_1$  eine Parallele mit  $o'p'$  und durch  $A_2$  eine Parallele mit  $o'a'$ , so müssen sich diese nach der Construction in einem Punkte  $B$  der Krafrichtung schneiden, und man hat das Moment in  $C$  in Meterkilogrammen durch das Product

$$CB \text{ Kilogramm} \times m'o' \text{ Meter}$$

gefunden. In der Figur ergibt sich  $CB = 13,2$  mm, entsprechend 2640 kg, also hat man graphisch das Moment zu

$$CB \times m'o' = 2640 \cdot 2 = 5280 \text{ mkg}$$

gefunden. Ein größerer Maßstab für die Zeichnung würde natürlich das Resultat dem oben berechneten von 5250 entsprechend näher ergeben haben. Der Maßstab für die Momentenfläche ist demnach so zu bestimmen, daß danach 1 mm einem Momente von 200 kg  $\cdot$  2 m = 400 mkg entspricht. Wie schon bemerkt, wird man diese Hilfsconstruction in denjenigen Fällen nicht ausführen, in welchen die Momentenfläche wie hier durch die Rechnung einfacher zu bestimmen ist.

Ist nun die Momentenfläche  $A_1BA_2$  bestimmt, so kann man dieselbe durch verticale Linien in den beliebigen Punkten  $a_1 a_2 \dots$  in eine größere Anzahl (sieben in der Figur) Theile theilen, deren Schwerpunkte  $s_1, s_2, s_3 \dots$  bestimmen, und die Flächeninhalte dieser Elemente, d. h. die Höhen der in Rechtecke von 1 m Breite verwandelten Flächen ermitteln.

Um nun das Kräftepolygon, Fig. III, für die Ermittlung der elastischen Linie in passenden Maßstäben zu zeichnen, muß man zunächst das Trägheitsmoment  $T = Fr^2$  des Trägers kennen. Man findet dasselbe, vorausgesetzt, daß es nicht von vornherein durch die Dimensionen des Trägers gegeben ist, mit Rücksicht auf die Festigkeitsformel

$$M_{max} = s \frac{T}{e}$$

zu

$$T = \frac{M_{max}}{s} e,$$

unter  $s$  die höchstens zulässige Faserspannung und unter  $e$  den Abstand der äußersten Faser von der neutralen Ase verstanden. Setzt man  $s = 6$  kg pro Quadratmillimeter, und  $e$  gleich der halben Trägerhöhe, welche 0,5 betragen mag, also  $e = \frac{h}{2} = 0,25$  m, so ergibt sich  $T$ , wenn alle Maße in Metern ausgedrückt werden, zu

$$T = \frac{5250}{6000000} 0,25 = 0,0002187.$$

Nimmt man an, die ganze Fläche  $F$  des Querschnittes sei in den beiden Gurtungen im Abstände  $r = e = 0,25$  m concentrirt, so ergibt sich

$$F = \frac{T}{r^2} = \frac{0,0002187}{0,25 \cdot 0,25} = 0,0035 \text{ qm.}$$

Man hat daher den Horizontalzug

$$H = FE = 0,0035 \cdot 18000 \cdot 1000 \cdot 1000 = 63000000 \text{ kg} \\ = 63000 \text{ Tonnen}$$

anzunehmen, und kann danach einen passenden Maßstab wählen. In der Figur ist dieser Maßstab für die Horizontalkraft so gewählt, daß 1 mm = 1000 Tonnen ist, daher die Polabstand  $mo = 63$  mm aufgetragen wurde. Für die Vertikalkräfte  $ak_1, k_1k_2 \dots$  ist der Maßstab hundertmal größer genommen, so daß also 1 mm = 10 Tonnen ist, und zwar sind die Strecken  $ak_1, k_1k_2 \dots$  so bestimmt, daß sie nach diesem Maßstabe den Werthen

$$\frac{K}{r^2} = \frac{K}{0,25 \cdot 0,25} = 16 K$$

entsprechen, wenn mit  $K$  der Flächeninhalt der einzelnen Elemente der Belastungsfläche  $A_1BA_2$  bezeichnet ist. Man erhält also beispielsweise die Strecke  $k_4k_5$ , wenn man das Trapez  $a_4a_4'a_5'a_5$  in ein Rechteck von der Breite 1 m verwandelt. Mißt man die erhaltene Höhe  $h$  dieses Rechtecks nach einem Maßstabe, dessen Einheiten in dem Verhältnisse  $\frac{1}{r^2}$  kleiner sind, als diejenigen des Momentenmaßstabes, so daß also danach in dem vorliegenden Falle 1 mm =  $\frac{400 \text{ mkg}}{1/16 \text{ qm}} = 6400 \text{ kg}$  pro Meter ist, so hat man das so gewonnene Resultat nach dem für die Vertikalkräfte gewählten Maßstabe (1 mm = 10 Tonnen) als  $k_4k_5$  auf  $ak_7$  abzutragen. In der Figur ist

$$h = \frac{a_4a_4' + a_5a_5'}{2} \cdot a_4a_5 = 7,2 \text{ mm,}$$

daher

$$k_4k_5 = h \frac{6400}{10000} = 4,6 \text{ mm.}$$

Was die Höhenlage des Pols  $O$  anbetrifft, so hat man dieselbe so zu wählen, daß die Horizontale durch den Pol die Vertikalkraft  $ak_7$  in einem Punkte  $m$  so trifft, daß die Abschnitte  $am$  und  $mk_7$  den Auflagerdrücken gleich sind, welche die Belastungsfläche  $A_1BA_2$  in  $A_1$  und  $A_2$  erzeugt. Um diesen Punkt  $m$  zu finden, denkt man sich das Gewicht der Belastung in dem leicht anzugebenden Schwerpunkte  $S$  des Dreiecks  $A_1BA_2$  wirkend, und zieht durch irgend welchen Punkt  $\gamma$  der Schwerrihtung zwei



Gerade  $\gamma A_1$  und  $\gamma A_2$  nach den Auflagern. Legt man sodann im Kräftepolygone durch  $a$  und  $h_7$  Parallelen  $a\gamma'$  und  $h_7\gamma'$  zu jenen Linien, so liefert die Projection des Durchschnittspunktes  $\gamma'$  auf  $a k_7$  in  $m$  den gesuchten Theilpunkt, in dessen Horizontallinie der Pol  $O$  in der oben ermittelten Polabstand angenommen werden muß.

Nachdem das Kräftepolygon in dieser Weise festgestellt ist, kann die Zeichnung des Seilpolygons in der bekannten Art geschehen, indem man, von  $A_1$  aus beginnend, Parallelen  $A_1 m_1, m_1 m_2, m_2 m_3 \dots$  mit den Polstrahlen  $O a, O k_1, O k_2 \dots$  zieht, dann muß der gewählten Lage von  $O$  entsprechend die durch  $m_7$  mit dem letzten Polstrahle  $O k_7$  gezogene Parallele durch den Punkt  $A_2$  gehen, indem die Schlußlinie des Seilpolygons  $A_1 m_1 m_2 \dots A_2$  mit der horizontalen Balkenaxe  $A_1 A_2$  zusammentreffen muß.

Das erhaltene Seilpolygon hüllt die dem Balken zugehörige Seilcurve ein, welche man erhalten würde, wenn die Theilung der Belastungsfläche in unendlich viele unendlich schmale Streifen vorgenommen werden könnte. Jede Seite des Polygons ist eine Tangente an die Seilcurve, und es ist ersichtlich, daß irgend eine Polygonseite, wie z. B.  $m_5 m_6$ , die Seilcurve in dem Punkte  $n_5$  berührt, durch welchen die verticale Theilungslinie  $a_5 a_5'$  hindurchgeht. Dementsprechend ist die erste Polygonseite  $A_1 m_1$  eine Tangente in  $A_1$  und die letzte Seite  $m_2 A_2$  eine Berührungslinie in  $A_2$  an die Seilcurve. Es ist mit Bezug hierauf leicht, die Seilcurve mit genügender Sicherheit in das Polygon einzuzichnen, wenn die Anzahl der Elemente, in welche die Belastungsfläche getheilt wurde, nicht zu klein angenommen ist. In der Figur I sind die Punkte, wie  $n_5$ , in welchen die Seilcurve die Polygonseiten berührt, durch kleine Kreise angedeutet.

Die so erhaltene Curve giebt nach dem Vorstehenden eine Darstellung der elastischen Durchbiegungen des Balkens an jeder Stelle, und zwar ist im vorliegenden Falle, in welchem das Verhältniß der Kräftemaßstäbe für  $H$  und  $K$  gleich dem Verjüngungsverhältnisse der Abscissen in I (1 : 100) gewählt wurde, an jeder Stelle die Durchbiegung durch die Ordinate der Seilcurve daselbst unmittelbar in natürlicher Größe gegeben. Die größte Durchbiegung  $f = FF'$  des Balkens erhält man offenbar für denjenigen Punkt  $F$ , in welchem die Seilcurve eine mit der Schlußlinie  $A_1 A_2$  parallele Tangente hat, diese Durchbiegung bestimmt sich nach der Figur zu nahezu 3 mm und zwar findet sie sich hier nicht im Angriffspunkte  $C$  der Kraft  $P$ , auch nicht in der Mitte  $M$ , sondern in einem Punkte  $F$ , welcher zwischen  $C$  und  $M$  gelegen ist. Nur wenn die Kraft  $P$  in der Mitte des Balkens angreift, tritt auch in der Mitte die größte Durchbiegung ein. Diese Durchbiegung würde im vorliegenden Falle rechnerisch zufolge §. 35. 3, zu

$$f = \frac{5000 \cdot 5^3}{48 \cdot 0,000 \, 2187 \cdot 18 \, 000 \cdot 1000^2} = 0,0033 \, \text{m} = 3,3 \, \text{mm}$$

sich ergeben.

Die Seilcurve ist, wie schon bemerkt wurde, nicht mit der elastischen Linie übereinstimmend oder geometrisch ähnlich, sondern ihre Ordinaten sind in dem Verhältnisse der beiden Kräftemaßstäbe  $\left(\frac{1}{v} = 100\right)$  vergrößert. Wenn daher die Neigungen der ersten und der letzten Polygonseite gegen den Horizont mit  $\alpha_1'$  und  $\alpha_2'$  bezeichnet werden, man also

$$m_1 A_1 A_2 = \alpha_1' \text{ und } m_7 A_2 A_1 = \alpha_2'$$

hat, so bestimmen sich die Neigungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  der elastischen Linie an den Enden in  $A_1$  durch

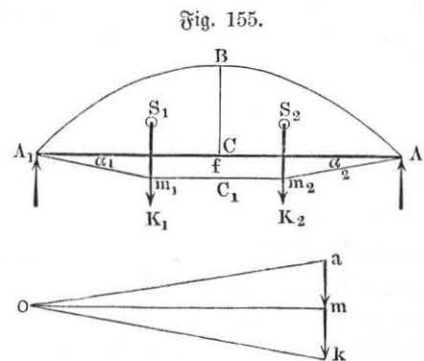
$$\text{tg } \alpha_1 = v \text{tg } \alpha_1' = 0,01 \text{tg } \alpha_1'$$

und in  $A_2$  durch

$$\text{tg } \alpha_2 = v \text{tg } \alpha_2' = 0,01 \text{tg } \alpha_2' \text{ u. s. w.}$$

Wenn die beiden Auflagern  $A_1$  und  $A_2$  nicht, wie hier angenommen wurde, in einer Horizontallinie liegen, so ändert sich die Construction nur in der Beziehung, daß der Pol  $O$  des Kräftepolygons nicht in der durch den Punkt  $m$  gelegten Horizontallinie, sondern da anzunehmen ist, wo eine durch  $m$  mit  $A_1 A_2$  gezogene Parallele diejenige Verticallinie schneidet, welche im Abstände gleich der Polabstand  $H = FE$  von der Kräftekurve  $a k_7$  gezogen ist.

Die hier angeführte Construction giebt Aufschluß über den ganzen Verlauf der elastischen Linie. Wenn es indessen nur darauf ankommt, die größte Durchbiegung  $f$  derselben kennen zu lernen, so läßt sich die Zeichnung in allen den Fällen einfacher ausführen, in denen man von vornherein diejenige Stelle kennt, für welche die Durchbiegung ihren größten Werth annimmt. Es sei z. B.  $A_1 A_2$ , Fig. 155, ein auf zwei in gleicher Höhe befindlichen Stützen ruhender Balken von der



Länge  $A_1 A_2 = l$ , welcher durch eine gleichmäßig verteilte Belastung von  $q$  Kilogramm pro laufenden Meter belastet ist, so liegt die größte Durchbiegung in der Mitte, für welche das Moment seinen Maximalbetrag

$M = q \frac{l^2}{8} = CB$  annimmt. Zeichnet man durch  $A_1$ ,  $B$  und  $A_2$  eine Parabel mit der Axe in  $BC$ , also dem Scheitel in  $B$ , so erhält man die zugehörige Momentenfläche, deren Inhalt durch  $\frac{2}{3} \cdot CB \cdot A_1 A_2 = \frac{1}{12} q l^3$  gegeben ist. Trägt man daher wieder auf der Verticallinie  $ak$  nach dem für die Verticalkräfte gewählten Maßstabe die Strecke

$$ak = \frac{1}{12} \frac{q l^3}{r^2}$$

ab, und macht auf der Horizontalen durch die Mitte  $m$  von  $ak$  die Pol-  
distanz  $mo = FE$ , wobei  $r$  und  $F$  aus dem bekannten Trägheitsmomente  $T = Fr^2$  zu entnehmen sind, so erhält man, mit Hilfe der in den Schwer-  
punkten  $S_1$  und  $S_2$  der Segmenthälften anzunehmenden Belastungen  $K_1$  und  $K_2$  das Seilpolygon  $A_1 m_1 m_2 A_2$ , an welches die Seilcurve in  $A_1$ ,  $C_1$  und  $A_2$  sich tangential anschließt. Man hat also, wie im vorhergehenden Beispiele,

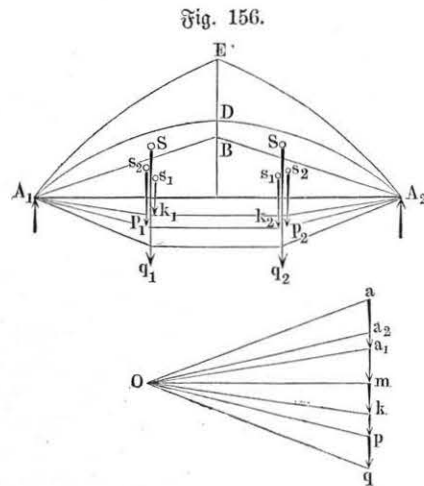


Fig. 156.

die Durchbiegung  $f$  in der Mitte durch  $CC_1$  und die Neigung der elastischen Linie gegen den Horizont in  $A_1$  und  $A_2$  durch  $\nu \alpha_1'$  und  $\nu \alpha_2'$  gefunden.

Wenn ein Balken  $A_1 A_2$ , Fig. 156, durch mehrere Kräfte belastet ist, z. B. durch sein Eigengewicht  $pl$  und durch eine concentrirte Kraft  $K$  in der Mitte  $C$ , so kann man die beiden Momentenflächen  $A_1 D A_2$  der gleichförmig vertheilten und  $A_1 B A_2$  der concentrirten Belastung durch

Summirung der Ordinaten zu einer resultirenden Momentenfläche  $A_1 E A_2$  vereinigen, und nun wie oben verfahren, indem man das Seilpolygon  $A_1 q_1 q_2 A_2$  mit Hilfe des Kräftepolygons  $O a q$  bestimmt, in welchem letzteren  $a q$  der resultirenden Momentenfläche  $A_1 E A_2$  entspricht. Es ist auch ersichtlich, daß man zu demselben Resultate gelangen wird, wenn man für die einzelnen Belastungen mit demselben Horizontalzuge  $mo$  ihre besonderen Seilpolygone zeichnet und deren Ordinaten summiert. So stellt in der Figur  $A_1 k_1 k_2 A_2$  das mit Hilfe des Kräfteplans  $O a_1 k$  gezeichnete Seilpolygon für die concentrirte

Kraft  $K$  vor, während  $A_1 p_1 p_2 A_2$  der gleichförmigen Belastung durch das Eigengewicht  $pl$  entspricht, für welche das Kräftepolygon durch  $O a_2 p$  gegeben ist.

Wenn der Querschnitt des Trägers für verschiedene Punkte verschieden ist, wie z. B. bei der Dreiecksfeder, Fig. 157, deren Breite in der Mitte

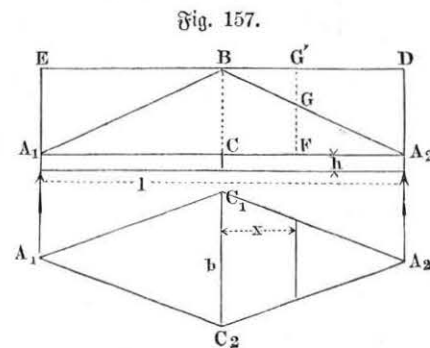


Fig. 157.

$C_1 C_2 = b$  und deren constante Stärke  $h$  ist, so hat man die Werthe  $\frac{M}{r^2}$  als

Ordinaten der Belastungsfläche aufzutragen. So ist für das Beispiel in Fig. 157 das Trägheitsmoment in der Mitte bei  $C$  durch

$$T = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} h^2 b h = r^2 F,$$

und im Abstände  $x$  von der Mitte, woselbst die Breite  $b_1 = b \frac{l - 2x}{l}$  ist, durch

$$T_1 = \frac{1}{12} b \frac{l - 2x}{l} h^3 = \frac{1}{12} \frac{l - 2x}{l} h^2 \cdot b h = r_1^2 F$$

gegeben. Nimmt man  $F = b h$  gleich dem Querschnitte in  $C$  an, und verwendet für das Seilpolygon den constanten Horizontalzug  $FE = b h \cdot E$ , so hat man die Ordinate  $FG$  der dreieckigen Momentenfläche  $A_1 B A_2$  im Abstände  $x$  von der Mitte in dem Verhältnisse  $\frac{1}{r_1^2}$  zu vergrößern, und man

erhält, wenn  $CB$  als Ordinate  $\frac{M}{\frac{1}{12} h^2}$  für die Belastungsfläche in  $C$  angenommen wird, die Ordinate in  $F$  zu

$$FG' = FG \frac{l}{l - 2x} = CB,$$

d. h. die Belastungsfläche ist durch das Rechteck  $A_1 E D A_2$  dargestellt. Wollte man dagegen die Dreiecksfläche  $A_1 B A_2$  der Momente direct als die Belastungsfläche durch die Ordinaten  $\frac{M}{r^2}$  ansehen, d. h.  $r^2$  für alle Querschnitte constant gleich  $\frac{1}{12} h^2$  annehmen, so hätte man für den Querschnitt durch  $F$  einen Horizontalzug

$$H_1 = \frac{l - 2x}{l} b h E$$

zu benutzen. Im vorliegenden Falle wird das erstgedachte Verfahren mit Verwendung eines constanten Horizontalzuges das bequemere sein, in manchen Fällen kann es sich jedoch empfehlen, den Horizontalzug  $H$  veränderlich zu machen, indem man die Momentenfläche direct als die für die elastische Linie geltende Belastungsfläche verwendet.

Die im Vorstehenden erläuterte graphische Methode zur Bestimmung der elastischen Linie wird man in den einfachen Fällen, welche behufs der Verdichtung hier betrachtet wurden, zwar kaum zur Bestimmung der Durchbiegungen von Trägern benutzen, da in diesen Fällen die bekannten einfachen Formeln in der Regel das Resultat schneller ergeben. Dagegen erleichtert die graphische Methode die Untersuchung wesentlich in allen den Fällen, wo die Elasticitätsverhältnisse benutzt werden müssen, um die unbekannten Biegemomente und Auflagerdrucke zu ermitteln, also insbesondere bei der Prüfung der continuirlichen Träger, wo die Rechnung bei einer größeren Anzahl von Stützen sehr weitläufig wird, wie aus §. 39 zu ersehen ist. Es soll daher die hier angegebene graphische Methode noch besonders in ihrer Anwendung auf continuirliche Träger besprochen werden.

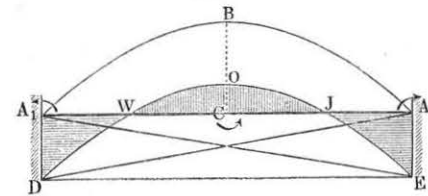
§. 42. **Continuirliche Träger.** Die Belastung eines auf zwei Stützen frei aufruhenden Trägers ruft in der Strecke zwischen den Stützen Momente hervor, in Folge deren der Balken eine nach unten hin concave Krümmung annimmt. Ueber den Stützen treten Momente nicht auf, vielmehr werden sich hier die Enden unter gewissen Neigungen gegen den Horizont einstellen, die von der Art der Belastung abhängen. Wenn der Träger indessen an den Enden in gewisser horizontaler oder geneigter Richtung eingespannt ist, so kann man sich den durch die Einspannung auf den Träger ausgeübten Zwang als die Wirkung von Momenten denken, welche eine derartige Biegung auf die Enden ausüben, daß dieselben in Folge davon aus denjenigen Neigungen, welche die Balkenenden bei freier Auflagerung durch die Belastung anzunehmen veranlaßt werden, zurückgebogen werden in diejenigen Richtungen, unter welchen die Einklemmung geschehen ist. Diese Momente haben also eine Drehungsrichtung, der zufolge sie den Balken nach oben convex zu biegen streben, welche daher der Drehungsrichtung der Belastungsmomente entgegengesetzt ist.

In ganz gleicher Weise sind die Zwischenstützen der continuirlichen Träger zu beurtheilen, indem auch hier jedes mittlere Feld, d. h. ein von zwei Zwischenstützen begrenztes, wie ein an den Enden eingespannter Balken zu betrachten ist, auf dessen Enden Momente wirken, die hier aber nicht mehr durch Einmauerung, sondern durch die Einwirkung der beiderseits sich an-

schließenden belasteten Strecken erzeugt werden. Es sind daher auch über allen Zwischenstützen Momente wirksam, die im Allgemeinen die entgegengesetzte Drehungsrichtung von derjenigen haben, welche von den durch die Belastung zwischen den Stützen hervorgerufenen Momenten angestrebt wird. Wie im Vorhergehenden immer geschehen, sollen auch in der Folge die Momente positive oder negative heißen, je nachdem sie, wie die Belastungsmomente, dem Balken eine positive, d. h. nach oben concave oder, wie die Stützenmomente, eine negative, nach unten hin concave Krümmung zu ertheilen streben. Auch sollen im Folgenden in graphischen Darstellungen die positiven Momente aufwärts, die negativen abwärts von der Abscissenaxe angetragen werden.

Zur Erläuterung sei  $A_1 A_2$ , Fig. 158, ein an den Enden horizontal eingespannter, durch eine gleichmäßig vertheilte Last  $q$  pro Längeneinheit belasteter Balken von der Länge  $l$ .

Fig. 158.



Die positive Momentenfläche ist in diesem Falle bekanntlich durch die Parabel  $A_1 B A_2$  mit der mittleren Ordinate  $CB = q \frac{l^2}{8}$  dargestellt. Durch

die Einspannung der Enden werden daselbst nach §. 35

negative Momente  $M_1 = M_2 = q \frac{l^2}{12}$  hervorgerufen. Jedem solchen

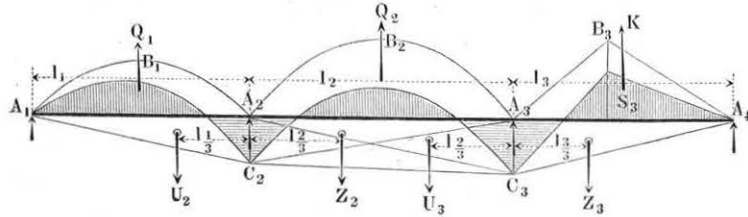
Pfeilmomente entspricht als Momentenfläche für den Balken eine Dreiecksfläche von der Länge  $l$  zur Basis und einer Höhe gleich dem Momente an der Einmauerungsstelle. Es ist z. B. für das Moment  $M_1$  in  $A_1$  die Momentenfläche durch das Dreieck  $A_1 D A_2$  und für das Moment  $M_2$  in  $A_2$  durch das Dreieck  $A_2 E A_1$  dargestellt, wenn nach dem gewählten Maßstabe  $A_1 D = M_1$  und  $A_2 E = M_2$  gemacht ist.

Man kann die beiden negativen Momentenflächen einfach addiren, wenn man  $DE$  zieht, indem man für  $A_2 E A_1$  das flächengleiche Dreieck  $A_2 E D$  einführt, und man erhält auf diese Weise als negative Momentenfläche des eingespannten Balkens das Trapez  $A_1 A_2 E D$ , welches in dem vorliegenden Falle, wo die Anordnung und Belastung symmetrisch zur Mitte  $C$  ist, wegen der Gleichheit von  $M_1$  und  $M_2$  zu einem Rechteck wird. Wenn man nun ebenfalls eine Summierung der positiven Momentenfläche  $A_1 B A_2$  mit der negativen Momentenfläche  $A_1 A_2 E D$  vornimmt, was einfach dadurch geschieht, daß man die Parabel  $A_1 B A_2$  ohne Formänderung mit dem Punkte  $A_1$  nach  $D$  und mit dem Punkte  $A_2$  nach  $E$  herunterrückt, so erhält man in  $A_1 D W O J E A_2$  die bekannte Momentenfläche für den beiderseits ein-



gemauerten, gleichförmig belasteten Balken. Aus dieser Momentenfläche, welche aus einem positiven Theile  $WOJ$  und zwei negativen Stücken  $A_1WD$  und  $A_2JE$  besteht, erkennt man, daß der Balken in dem mittleren Theile  $WJ$  convex nach unten und an den Enden convex nach oben gebogen wird, und daß in  $W$  und  $J$  die beiden Inflexionspunkte der elastischen Linie liegen, wo das Moment Null, also der Krümmungsradius unendlich groß ist, so daß daselbst also die entgegengesetzten Krümmungen in einander übergehen.

Demgemäß hat man sich auch bei einem continuirlichen Träger, wie demjenigen  $A_1A_2A_3A_4$ , Fig. 159, die Anstrengungen hervorgebracht zu Fig. 159.



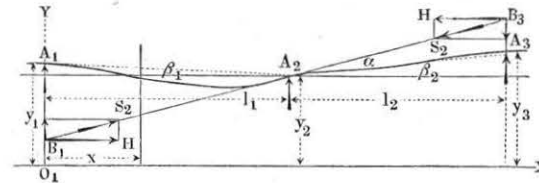
denken aus den positiven Momenten für die Belastungen  $Q$  und den negativen Momenten der Stützen. Die positiven Momente sind beispielsweise in der Figur durch die Parabelflächen  $A_1B_1A_2$  und  $A_2B_2A_3$  für die beiden ersten Strecken entsprechend einer gleichmäßig vertheilten Belastung, und für die dritte Strecke durch das Dreieck  $A_3B_3A_4$  entsprechend einer in  $B_3$  wirkenden concentrirten Last dargestellt. Die Momente über den Zwischenstützen,  $M_2$  in  $A_2$  und  $M_3$  in  $A_3$  rufen nach dem Vorstehenden in den Balkenstrecken die durch die Dreiecke  $A_2C_2A_1$  und  $A_2C_2A_3$ , sowie  $A_3C_3A_2$  und  $A_3C_3A_4$  dargestellten Momente hervor. Die Summirung aller Momentenflächen ist aus der Figur ersichtlich, und es sind darin auch durch verschiedene Schraffirung die positiven Momente von den negativen unterschieden.

Es sei nun angenommen, daß die Ordinaten dieser sämmtlichen Momentenflächen den Größen  $\frac{M}{r^2}$  proportional gewählt seien, so kann man nach dem Vorstehenden diese Flächen als die Belastungsflächen der elastischen Linie betrachten, welche sich als Seilcurve für den Horizontalzug  $FE$  zeichnet, wenn wieder, wie mehrfach angegeben,  $Fr^2 = T$  das Trägheitsmoment des Balkens bedeutet. Da es im Folgenden weniger darauf ankommt, die elastische Linie selbst in ihrem Verlaufe kennen zu lernen, es sich vielmehr in der Regel nur um die Ermittlung der Momente an einzelnen Stellen, ins-

besondere über den Stützen handelt, so wird es genügen, die durch die einzelnen Belastungsflächen dargestellten Belastungen in den Schwerpunkten dieser Flächen concentrirt anzunehmen. Demgemäß wirken die den gleichförmig vertheilten Lasten zukommenden Kräfte  $Q_1$  und  $Q_2$  in den Mitten von  $A_1A_2$  und  $A_2A_3$ , während die Belastung  $K_3$  in dem Schwerpunkte  $S_3$  des Dreiecks  $A_3B_3A_4$  wirksam zu denken ist. Die mit  $U$  und  $Z$  bezeichneten negativen Belastungen durch die Stützenmomente wirken ebenfalls in den Schwerpunkten der betreffenden Dreiecke, also in Abständen von der betreffenden Stütze, welche dem dritten Theile der zugehörigen Felderweite gleichkommen. Die Belastungen durch die positiven Momente  $Q$  und  $K$  sind nach dem oben Bemerkten natürlich aufwärts gerichtet anzunehmen, da diese Anstrengungen positive Krümmungen hervorzurufen bestrebt sind.

Betrachtet man nunmehr irgend welche zwei benachbarte Strecken  $A_1A_2A_3$ , Fig. 160, der elastischen Linie eines continuirlichen Trägers als eine Seil-

Fig. 160.



curve mit dem horizontalen Zuge  $FE$  und der Belastungsordinate  $q = \frac{M}{r^2}$ , so ergibt sich ohne Weiteres aus der Figur das Folgende. Man kann den Träger in  $A_2$  zerschneiden, ohne das Gleichgewicht zu stören, wenn man an der Schnittstelle an jedem Ende der dadurch gebildeten Trägertheile eine Kraft gleich derjenigen Spannung  $S_2$  anbringt, welche vor der Trennung an dieser Stelle vorhanden war. Denkt man die in der Richtung der elastischen Linie in  $A_2$  anzunehmende Kraft  $S_2$  für das Balkenstück  $A_1A_2$  in  $B_1$  wirksam, und zerlegt sie in ihre verticale und ihre horizontale Componente, welche letztere  $H = FE$  ist, so hat man für das Gleichgewicht des Balkentheils  $A_1A_2$  die Momentengleichung in Bezug auf  $A_1$

$$H \cdot A_1B_1 = \int_0^{l_1} q x \, dx,$$

oder da, unter  $\alpha$  den Winkel der Tangente an die elastische Linie in  $A_2$  gegen den Horizont verstanden,  $B_1A_1 = l_1 \tan \alpha + y_1 - y_2$  ist,

$$\int_0^{l_1} q x \, dx - H (l_1 \operatorname{tg} \alpha + y_1 - y_2) = 0 \quad (1)$$

In gleicher Weise findet man die Momentengleichung für das Balkenstück  $A_2 A_3$  in Bezug auf  $A_3$ , wenn man die auf dasselbe wirkende Kraft  $S_2$  in  $B_3$  angreifend denkt und in ihre Componenten zerlegt:

$$\int_0^{l_2} q x \, dx + H (l_2 \operatorname{tg} \alpha + y_2 - y_3) = 0 \quad (2)$$

Durch die Verbindung von (1) und (2) entfernt man  $\operatorname{tg} \alpha$  und erhält

$$\frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} q x \, dx + \frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} q x \, dx + H \left( \frac{y_2 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_3}{l_2} \right) = 0, \quad (3)$$

eine Gleichung, welche zu der in §. 37 angegebenen Clapeyron'schen Formel führt, sobald man, wie dort geschehen, in ihr die beiden Integrale als die statischen Momente der Belastungsflächen der beiden Balkenstrecken  $A_1 A_2$  und  $A_2 A_3$  in Bezug auf  $A_1$  und bezw.  $A_3$  bestimmt.

Um die Gleichung (3) zu deuten, kann man bemerken, daß  $\int_0^{l_1} q x \, dx$  das statische Moment der Belastungsfläche der Strecke  $A_1 A_2$  in Bezug auf  $A_1$ , folglich  $\frac{1}{l_1} \int_0^{l_1} q x \, dx$  den von dieser Belastungsfläche in  $A_2$  erzeugten Druck

auf diese Stütze bedeutet. Ebenso stellt das zweite Integral  $\frac{1}{l_2} \int_0^{l_2} q x \, dx$  den von der Belastungsfläche der Strecke  $A_2 A_3$  auf  $A_2$  ausgeübten Druck vor. Der dritte Summand ferner  $H \left( \frac{y_2 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_3}{l_2} \right)$  ist der algebraische Ausdruck für denjenigen Druck, welchen ein Seil mit dem Horizontalzuge  $H$  auf den Punkt  $A_2$  ausübt, wenn dasselbe durch die drei Stützpunkte  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  gelegt ist. Letzteres erkennt man sofort aus den Eigenschaften der Seilpolygone, wenn man die geraden Verbindungslinien  $A_1 A_2$  und  $A_2 A_3$  zieht, welche mit der Horizontalen bezw. die Winkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  bilden mögen. Die Spannungen  $S_1$  und  $S_3$  in  $A_1$  und  $A_3$  haben die horizontale Componente  $H$ , folglich die verticalen Componenten  $H \operatorname{tg} \beta_1$  und  $H \operatorname{tg} \beta_3$ , oder, da nach der Figur abgesehen vom Vorzeichen

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{y_2 - y_1}{l_1} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \beta_2 = \frac{y_2 - y_3}{l_2}$$

ist, so folgt die von beiden Seilen auf  $A_2$  ausgeübte Verticalkraft durch

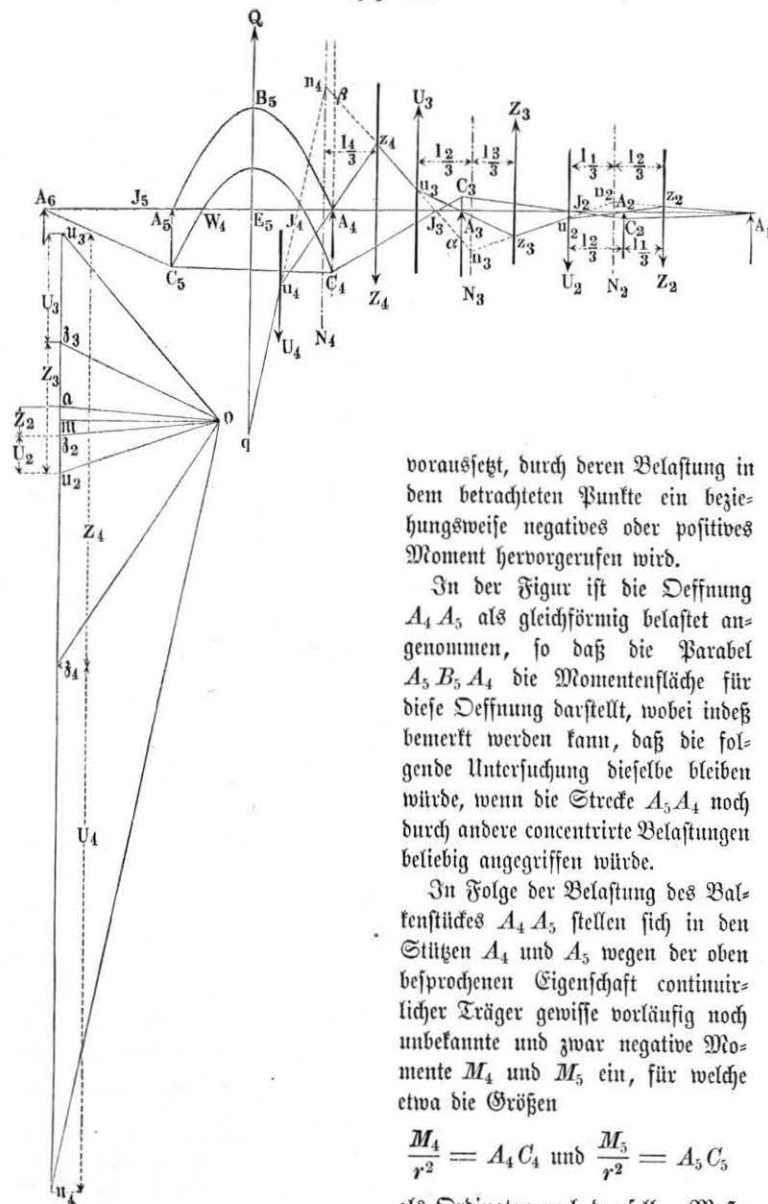
$$H \left( \frac{y_2 - y_1}{l_1} + \frac{y_2 - y_3}{l_2} \right).$$

Daß dieser Werth nach der Figur, worin  $A_2$  unterhalb  $A_1$  und  $A_3$  liegt, negativ wird, deutet nur an, daß der Seilzug anstatt eines abwärts wirkenden Druckes eine aufwärts gerichtete Zugkraft auf die Stütze  $A_2$  ausübt. Man kann daher das in (3) enthaltene Resultat dahin aussprechen, daß bei jedem continuirlichen Balken der in Folge der gedachten Belastung durch die Ordinaten  $q = \frac{M}{r^2}$  auf einen beliebigen Zwischenpfeiler ausgeübte Druck gleich Null sein muß\*). Dieser Satz gewährt ein klares Bild von der Bedeutung der Clapeyron'schen Formel.

Nach dem Vorhergehenden ist nun die Untersuchung eines continuirlichen Trägers verhältnißmäßig einfach durchzuführen. Es sei  $A_1 A_2 A_3 \dots A_6$ , Fig. 161 (a. f. S.), ein continuirlicher Balken auf beliebig vielen (in der Figur sechs) Stützen, von denen der Einfachheit wegen angenommen werden soll, daß sie sämmtlich in einer Horizontalen liegen. Von diesem Balken, dessen Strecken bezw. die Weiten  $l_1, l_2, l_3, l_4$  und  $l_5$  haben mögen, werde zunächst angenommen, daß nur eine einzige beliebige Oeffnung belastet sei, die übrigen aber gar keine Belastung, auch nicht durch das Eigengewicht der Construction zu tragen haben. Durch diese Voraussetzung wird die Allgemeinheit der Untersuchung nicht beeinträchtigt, denn da die als belastet angenommene Oeffnung eine ganz beliebige ist, so kann man auch die Untersuchung so oft wiederholt denken, als Oeffnungen vorhanden sind, indem man jedesmal eine andere Strecke als belastet voraussetzt. Wenn man dann die für diese verschiedenen Einzelbelastungen sich ergebenden Momente in einem beliebigen Punkte des Trägers algebraisch addirt, so findet man in der erhaltenen Summe das Moment in demselben Punkte für den Fall, daß sämmtliche Oeffnungen belastet sind. Aus einer solchen Ermittlung wird sich auch sogleich für jeden Punkt die ungünstigste Belastungsart ergeben. Man erhält nämlich für irgend welchen Querschnitt das größte positive oder negative Biegemoment, wenn man alle diejenigen Strecken unbelastet, d. h. nur ihrem Eigengewichte unterworfen

\*) Es mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß hier nicht der Druck gemeint ist, welchen der Balken in Folge seiner Belastung auf den Zwischenpfeiler ausübt, sondern der Druck, welchen die fingirte Belastung durch die Momentenfläche daselbst erzeugt.

Fig. 161.



voraussetzt, durch deren Belastung in dem betrachteten Punkte ein beziehungsweise negatives oder positives Moment hervorgerufen wird.

In der Figur ist die Deffnung  $A_4 A_5$  als gleichförmig belastet angenommen, so daß die Parabel  $A_5 B_5 A_4$  die Momentenfläche für diese Deffnung darstellt, wobei indeß bemerkt werden kann, daß die folgende Untersuchung dieselbe bleiben würde, wenn die Strecke  $A_5 A_4$  noch durch andere concentrirte Belastungen beliebig angegriffen würde.

In Folge der Belastung des Balkenstückes  $A_4 A_5$  stellen sich in den Stützen  $A_4$  und  $A_5$  wegen der oben besprochenen Eigenschaft continuirlicher Träger gewisse vorläufig noch unbekannte und zwar negative Momente  $M_4$  und  $M_5$  ein, für welche etwa die Größen

$$\frac{M_4}{r^2} = A_4 C_4 \text{ und } \frac{M_5}{r^2} = A_5 C_5$$

als Ordinaten nach demselben Maß-

stabe aufgetragen sein mögen, nach welchem die Momentenfläche  $A_4 B_5 A_5$  der Belastung  $Q$  gezeichnet worden ist. Das Moment  $M_4$  in  $A_4$  ruft nunmehr in der folgenden Strecke  $A_4 A_3$  Momente hervor, welche durch das Dreieck  $A_4 C_4 A_3$  dargestellt sind, und man kann sich das Gewicht dieses Dreiecks in seinem Schwerpunkte, also im Abstände  $\frac{1}{3} l_3$  von  $A_4$  im Betrage

$$Z_4 = \frac{1}{2} \cdot A_4 C_4 \cdot l_3 = \frac{1}{2} M_4 \cdot l_3$$

wirksam denken.

Es ist nun leicht ersichtlich, daß das in  $A_4$  hervorgerufene Moment  $M_4$  in der folgenden Stütze  $A_3$  ebenfalls das Auftreten eines gewissen Momentes

$$M_3 = A_3 C_3$$

veranlassen muß, und zwar muß dieses Moment  $M_3$  die entgegengesetzte Drehungsrichtung von  $M_4$  haben, weil nur dann die oben gefundene Bedingung erfüllt sein kann, wonach in der Stütze  $A_3$  der von den Momentenflächen ausgeübte Druck gleich Null sein muß. Es ist leicht erkennbar, daß diese Bedingung nur bei entgegengesetzten Vorzeichen der von  $M_4$  und  $M_3$  erzeugten Druckcomponenten, d. h. also bei entgegengesetzten Drehungsrichtungen der Momente  $M_4$  und  $M_3$  erfüllbar sein wird. Denkt man sich

daher das Moment  $\frac{M_3}{r^2}$  als  $A_3 C_3$  nach oben hin aufgetragen, so finden sich die beiden Momentenflächen, welche  $M_3$  für die angrenzenden Strecken erzeugt, in den Dreiecken

$$A_3 C_3 A_4 = \frac{1}{2} \frac{M_3}{r^2} l_3 = U_3$$

im Abstände  $\frac{1}{3} l_3$  links von  $A_3$  und

$$A_3 C_3 A_2 = \frac{1}{2} \frac{M_3}{r^2} l_2 = Z_3$$

im Abstände  $\frac{1}{3} l_2$  rechts von  $A_3$  beide positiv, also aufwärts wirkend. In Folge dieses Momentes  $M_3$  in  $A_3$  wird ebenfalls in  $A_2$  ein gewisses Moment  $M_2$  hervorgerufen werden, und dieselbe Schlußfolgerung, welche für  $A_3$  angestellt wurde, gilt auch für  $A_2$ , d. h. das hier auftretende Moment  $M_2$  wird die entgegengesetzte Richtung von  $M_3$  haben müssen, wenn in  $A_2$  der Auflagerdruck der Momentenflächen Null werden soll. Es sei nach dem gewählten Maßstabe etwa

$$A_2 C_2 = \frac{M_2}{r^2}$$

nach der negativen Richtung aufgetragen, so stellen die beiden Kräfte



$$\frac{1}{2} \frac{M_2}{r^2} l_2 = U_2 \text{ im Abstände } \frac{l_2}{3} \text{ von } A_2$$

und

$$\frac{1}{2} \frac{M_2}{r^2} l_1 = Z_2 \text{ im Abstände } \frac{l_1}{3} \text{ von } A_2$$

die Belastungen der elastischen Linie dar, welche durch  $M_2$  erzeugt werden. In der Endstütze  $A_1$  kann ein Moment nicht auftreten, es wird daselbst also auch ein gewisser Auflagerdruck stattfinden, welcher, von dem Dreieck  $A_2 C_2 A_1$  herrührend, den Betrag  $\frac{1}{3} Z_2$  haben muß.

Die Aufgabe nun, die noch unbekannten Momente  $M_2$ ,  $M_3$  und  $M_4$  aus der bekannten Belastung  $Q$  zu bestimmen, kann als gelöst betrachtet werden, sobald es möglich ist, mit einem beliebig anzunehmenden Horizontalzuge  $H$  ein Seilpolygon für das Balkenstück  $A_1 A_2 A_3 A_4$  zu entwerfen, denn alsdann findet man in bekannter Weise die Größen  $U$  und  $Z$ , also auch die Momente  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ , wenn man mit den einzelnen Seiten des Seilpolygons durch den Pol des Kräftepolygons Parallellinien legt.

Um ein solches Seilpolygon zu zeichnen, möge zunächst vorausgesetzt werden, das Moment  $M_2$  über  $A_2$  sei gegeben, so ist dadurch auch die Größe des Dreiecks  $A_2 C_2 A_1$ , also die Kraft  $Z_2$  bekannt. Man denke sich nun nach einem beliebigen Maßstabe diese Kraft  $Z_2$  gleich der Strecke  $a_{32}$  auf einer Verticalen angetragen, und nehme einen Pol  $o$  in beliebigem Abstände von  $a_{32}$  so an, daß die Horizontale  $om$  die Strecke  $a_{32}$  in dem Verhältnisse theilt, in welchem die von der Kraft  $Z_2$  in  $A_1$  und  $A_2$  erzeugten Stützendrucke stehen, d. h. also, man mache  $am = \frac{1}{3} a_{32}$ . Zieht man nun durch  $A_1$  eine Parallele  $A_1 z_2$  mit  $oa$ , so ist  $z_2$  ein Punkt des Seilpolygons, und wenn man von  $z_2$  eine Gerade durch  $A_2$  zieht, welche Gerade in Folge des gewählten Poles  $o$  mit  $o_{32}$  parallel ausfallen muß, so erhält man in dem Durchschnitte  $u_1$  mit der Richtungslinie von  $U_2$  eine zweite Ecke des Seilpolygons. Die darauf folgende in  $u_2$  sich anschließende Seite des Seilpolygons ist nun leicht mit Rücksicht darauf zu zeichnen, daß diese Seite, gehörig verlängert, mit der Verlängerung von  $A_1 z_2$  sich in einem Punkte der verticalen Mittelkraft  $N_2$  aus  $U_2$  und  $Z_2$  treffen muß. Die Lage dieser in der Figur punktierten Mittelkraft  $N_2$  läßt sich aber ohne Weiteres angeben, denn da man das Verhältniß der Seitenkräfte  $\frac{U_2}{Z_2} = \frac{l_2}{l_1}$  kennt, so braucht man nur den Abstand  $\frac{l_1}{3} + \frac{l_2}{3}$  dieser beiden Kräfte  $U_2$  und  $Z_2$  in dem umgekehrten Verhältnisse derselben, also im Verhältnisse  $\frac{l_1}{l_2}$  zu theilen, und erhält also die Richtung der Mittelkraft  $N_2$  im Abstände

$\frac{l_1}{3}$  von  $U_2$  und  $\frac{l_2}{3}$  von  $Z_2$ . Verlängert man daher  $A_1 z_2$  bis zum Durchschnitte  $n_2$  mit  $N_2$ , so ergibt sich aus  $n_2 u_2$  die Richtung der folgenden Polygonseite, welche die Kraft  $Z_3$  in  $z_3$  schneidet. Die weitere Verzeichnung des Seilpolygons erfolgt in gleicher Art; indem man von  $z_3$  durch  $A_3$  zieht, erhält man den Durchschnitte  $u_3$  in der Kraft  $U_3$  und hat von  $u_3$  aus die folgende Polygonseite so zu ziehen, daß dieselbe durch den Schnittpunkt  $n_3$  der verlängerten Polygonseite  $u_2 z_3$  mit der Mittelkraft  $N_3$  aus  $Z_3$  und  $U_3$  hindurchgeht. Hierbei ist die Lage dieser Mittelkraft  $N_3$  wieder so zu bestimmen, daß ihr Abstand von  $U_3$  gleich  $\frac{l_2}{3}$ , und derjenige von  $Z_3$  gleich  $\frac{l_3}{3}$  anzunehmen ist. Von der Ecke  $z_4$  des Polygons zieht man ferner durch  $A_4$  bis zum Durchschnitte  $u_4$  mit  $U_4$  und fügt die folgende  $u_4 q$  wiederum in solcher Richtung an, daß  $q u_4$  verlängert durch den Schnittpunkt  $n_4$  des Seiles  $u_3 z_4$  mit der Mittelkraft  $N_4$  aus  $Z_4$  und  $U_4$  hindurchgeht. Für diese Mittelkraft  $N_4$  gilt dieselbe Beziehung, wie für  $N_3$  und  $N_2$ , ihre Abstände von  $U_4$  und  $Z_4$  sind deren Größen umgekehrt proportional und daher bezw.  $\frac{l_3}{3}$  und  $\frac{l_4}{3}$ .

Auf diese Weise wäre das Seilpolygon  $A_1 z_2 u_2 z_3 u_3 z_4 u_4 q$  gefunden, und man würde durch Polstrahlen im Kräftepolygone, die parallel mit den Seilpolygonseiten sind, die Größen  $U$  und  $Z$  erhalten, wenn eine von diesen Größen, etwa  $Z_2 = a_{32}$ , oder auch wenn  $Z_4$  bekannt wäre, welche letztere Größe im Kräftepolygone offenbar durch die Strecke  $u_3 z_4$  dargestellt ist, welche die mit den Seiten  $z_4 u_3$  und  $z_4 u_4$  parallelen Polstrahlen zwischen sich einschließen. Um die Aufgabe als gelöst zu betrachten, ist es also nur nöthig, die noch unbekannte Größe  $Z_4$ , d. h. das Moment  $M_4$  in  $A_4$  aus der bekannten Belastung  $Q$  der Strecke  $A_4 A_5$  zu bestimmen, da alsdann das Kräftepolygon die übrigen Größen  $U$  und  $Z$ , d. h. die Momente  $M_3$  und  $M_2$  ergibt. Um nun  $Z_4$  aus  $Q$  zu bestimmen, kann man zunächst betreffs des Seilpolygons die folgende Betrachtung anstellen.

**Fortsetzung.** Die vorstehend mit Hülfe der Mittelkräfte  $N_2$ ,  $N_3$  und §. 43.  $N_4$  festgesetzten Seilrichtungen ergeben in der Horizontalen  $A_1 A_5$  gewisse Schnittpunkte  $J_2$ ,  $J_3$  und  $J_4$ , welche für die Untersuchung der continuirlichen Träger von besonderer Wichtigkeit sind. Es ist zunächst leicht zu erkennen, daß diese Punkte ganz bestimmte Festpunkte sind, zu denen man immer gelangen wird, wenn man auch ein anderes Seilpolygon, d. h. eine andere Horizontalkraft  $om$  zu Grunde legen würde. Dies erkennt man, wenn man die Bedeutung jedes dieser Punkte  $J$  ins Auge faßt, als Angriffspunkt einer Mittelkraft von zwei verticalen Kräften, welche ein constantes

Verhältniß zu einander haben. Man ersieht nämlich aus dem Kräftepolygon, daß  $J_2$  der Angriffspunkt derjenigen Mittelkraft ist, welche aus der Verticalkraft  $U_2 = z_2 u_2$  und dem Auflagerdrucke  $m_{z_2} = \frac{2}{3} Z_2$  resultirt, den die Momentenfläche  $Z_2$  auf  $A_2$  ausübt. Denn mit den Polstrahlen  $o m$ ,  $o z_2$  und  $o u_2$  sind offenbar die drei Seile  $A_2 J_2$ ,  $A_2 u_2$  und  $z_2 u_2$  parallel, folglich geht durch den Schnittpunkt  $J_2$  der Endseile  $A_2 J_2$  und  $z_2 u_2$  die Mittelkraft der beiden genannten Kräfte  $U_2$  und  $\frac{2}{3} Z_2$ . Diese Kräfte drücken sich nun durch

$$U_2 = \frac{1}{2} \frac{M_2}{r^2} l_2$$

und

$$\frac{2}{3} Z_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{M_2}{r^2} l_1$$

aus, folglich haben sie ein festes, nur von den Oeffnungsweiten  $l_1$  und  $l_2$  abhängiges Verhältniß

$$\frac{U_2}{\frac{2}{3} Z_2} = \frac{3 l_2}{2 l_1}.$$

Daraus folgt aber, daß auch der Punkt  $J_2$  eine ganz bestimmte Lage im ersten Drittel der Länge  $l_2$  von  $A_2$  aus haben muß, welche Lage nicht von der Größe des Momentes  $M_2$ , d. h. nicht von der Größe der Belastung  $Q$  abhängig ist.

Ebenso erkennt man, daß  $J_3$  der Angriffspunkt der Mittelkraft ist aus der Kraft  $U_3 = z_3 u_3$  und aus  $m_{z_3}$ , d. h. dem von  $Z_3$  bei einer Zerlegung nach  $A_3$  und  $J_2$  auf  $A_3$  ausgeübten Drucke, denn die drei Seile  $A_3 J_3$ ,  $A_3 u_3$  und  $z_3 u_3$  sind mit den Polstrahlen  $o m$ ,  $o z_3$  und  $o u_3$  bezw. parallel, folglich muß durch den Schnittpunkt  $J_3$  die Mittelkraft der genannten beiden Seitenkräfte gehen. Da nun auch  $U_3$  und  $Z_3$  ein constantes nur von  $l_3$  und  $l_2$  abhängiges Verhältniß haben, und  $J_2$  als ein fester Punkt erkannt wurde, so findet sich ähnlich wie für  $J_2$  auch, daß  $J_3$  ein fester von der Belastung unabhängiger Punkt sein muß. Gleiches gilt von  $J_4$ , durch welchen die Mittelkraft von  $U_4 = z_4 u_4$  und dem von  $Z_4$  bei einer Zerlegung nach  $A_4$  und  $J_3$  auf  $A_4$  ausgeübten Auflagerdrucke  $m_{z_4}$  hindurchgeht.

Diese festen Punkte  $J$ , welche wegen der später ersichtlichen, ihnen anhaftenden Eigenschaft Inflexions- oder Wendepunkte genannt werden, haben nun die merkwürdige Eigenschaft, daß durch die beiden Abschnitte, in welche ein solcher Punkt die Oeffnungsweite, in welcher er liegt, theilt, gleichzeitig das Verhältniß der beiderseitigen Stützmente gegeben ist. Es ist also z. B. für  $J_3$  die Gleichung gültig:

$$J_3 A_3 : J_3 A_4 = M_3 : M_4.$$

Diese Beziehung läßt sich leicht aus dem Seilpolygone erkennen. Bekanntlich ist nach den Eigenschaften der Seilcurven das Moment einer Kraft wie  $U_3$  in Bezug auf irgend einen Punkt wie  $A_3$  gleich dem Producte aus dem Horizontalzuge  $H$  in die Ordinate  $A_3 \alpha$ , welche auf einer durch  $A_3$  gelegten Verticallinie durch die beiden Seile  $u_3 z_3$  und  $u_3 z_4$  abgeschnitten wird, zwischen denen die Kraft  $U_3$  enthalten ist \*). Man hat daher

$$H \cdot A_3 \alpha = U_3 \frac{l_3}{3}.$$

In derselben Weise erhält man aber auch für die Kraft  $Z_4$  in Bezug auf den Punkt  $A_4$ :

$$H \cdot A_4 \beta = Z_4 \frac{l_3}{3},$$

daher durch Division:

$$\frac{A_3 \alpha}{A_4 \beta} = \frac{U_3}{Z_3} = \frac{M_3}{M_4}.$$

Da nun aber auch

$$A_3 \alpha : A_4 \beta = J_3 A_3 : J_3 A_4,$$

so folgt die obige Behauptung:

$$\frac{J_3 A_3}{J_3 A_4} = \frac{M_3}{M_4}.$$

Kennt man daher die Inflexionspunkte  $J_2, J_3, J_4$ , so kann man aus einem beliebigen Stützmente, wie z. B.  $M_4$  in  $A_4$ , sofort auch die Größe der Momente  $M_3$  in  $A_3$  und  $M_2$  in  $A_2$  bestimmen, ohne das Seilpolygon zeichnen zu müssen. Denn ist  $M_4 = A_4 C_4$  bekannt, so giebt die Gerade  $C_4 J_4$  in  $C_3$  das Moment  $M_3 = A_3 C_3$ , und die durch  $C_3$  und  $J_2$  gelegte Gerade schneidet ebenso auf der Verticalen durch  $A_2$  in  $C_2$  eine Strecke  $A_2 C_2$  ab, welche nach dem angenommenen Maßstabe das Moment  $M_2$  darstellt.

Die Ermittlung der Inflexionspunkte  $J$  verursacht nach dem Vorhergegangenen keine Schwierigkeit. Um diese letzteren Punkte festzustellen, zieht man durch einen beliebigen Punkt  $z_2$  der Verticallinie  $Z_2$  im Abstände  $\frac{l_1}{3}$  von  $A_2$  zwei Gerade durch  $A_2$  und  $A_1$ , und verbindet deren bezügliche

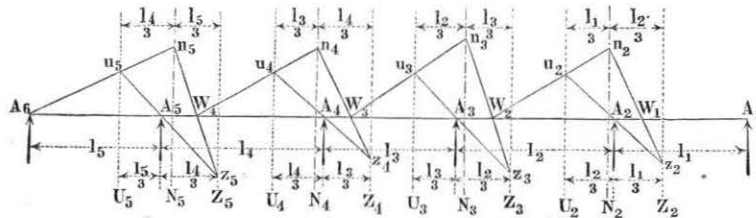
\*) Man erkennt die Richtigkeit hiervon sogleich, wenn man die Spannung  $S_3$  des Seiles  $u_3 z_3$  in  $\alpha$  in ihre horizontale Componente  $H$  und ihre verticale Componente  $V$  zerlegt, welche letztere für  $A_3$  ein Moment gleich Null hat, so daß für  $A_3$  die Momentengleichung gilt:

$$U_3 \cdot \frac{l_3}{3} = H \cdot A_3 \alpha.$$

Durchgangspunkte  $u_2$  durch die Verticallinie  $U_2$  im Abstände  $\frac{l_2}{3}$  von  $A_2$  und  $n_2$  durch die Mittellinie  $N_2$  von  $Z_2$  und  $U_2$  mit einander durch die Gerade  $u_2 n_2$ , welche in der Horizontalen  $A_1 A_5$  den Inflectionspunkt  $J_2$  liefert. Ist  $J_2$  gefunden, so zieht man ebenso durch einen beliebigen Punkt  $z_3$  von  $Z_3$  die beiden Strahlen durch  $A_3$  und  $J_2$ , und verbindet den Durchschnittpunkt  $u_3$  von  $U_3$  und  $z_3 A_3$  mit demjenigen  $n_3$ , in welchem  $z_3 J_2$  die Mittellinie  $N_3$  von  $U_3$  und  $Z_3$  schneidet, um in dem Durchschnitte der Verbindungslinie  $u_3 n_3$  mit der Horizontalen  $A_1 A_5$  den Inflectionspunkt  $J_3$  zu finden, und sofort findet man  $J_4$  und  $J_5$ .

Wenn man die vorstehend angegebene Construction der Fig. 161 in entsprechender Art nochmals in der entgegengesetzten Richtung, d. h. von  $A_6$  nach  $A_1$  fortschreitend vornimmt, so gelangt man in derselben Weise zu einer zweiten Reihe von Wendepunkten  $W_4, W_3, W_2$  und  $W_1$  rechts neben den Zwischenstützen, für welche die Art der Construction aus Fig. 162 ersichtlich

Fig. 162.



und nach dem Vorangegangenen leicht verständlich ist. Man zieht, um diese Wendepunkte  $W$  zu erhalten, durch einen beliebigen Punkt  $u_5$  von  $U_5$  zwei Strahlen durch  $A_6$  und  $A_5$  und verbindet deren Schnittpunkte mit  $N_5$  und bezw.  $Z_5$  durch die Gerade  $n_5 z_5$ , welche in der Axe  $A_6 A_1$  den Punkt  $W_4$  ergibt. Durch  $W_4$  und  $A_4$  zieht man dann wieder von einem beliebigen Punkte  $u_4$  der Verticalen  $U_4$  zwei Strahlen, deren Schnittpunkte  $n_4$  mit  $N_4$  und  $z_4$  mit  $Z_4$  in ihrer Verbindung  $n_4 z_4$  den folgenden Wendepunkt  $W_3$  ergeben u. s. w. Für diese Wendepunkte  $W$  gelten die nämlichen Beziehungen, welche vorstehend für die Wendepunkte  $J$  gefunden wurden, d. h. wenn nur eine einzige Oeffnung des Trägers belastet ist, so werden die links von dieser Oeffnung gelegenen Strecken durch die Wendepunkte  $W$  in demselben Verhältnisse getheilt, wie dasjenige der Stützmomente über den beiden die betreffende Strecke einschließenden Auflagern ist.

Um nun die durch die Belastung einer Strecke wie  $A_4 A_5$ , Fig. 163, hervorgerufenen Momente  $M_4$  und  $M_5$  in den beiden Auflagern  $A_4$  und  $A_5$  zu bestimmen, dient ebenfalls die im Vorstehenden gefundene Eigenschaft der Wendepunkte  $W$  und  $J$  in folgender Art. Es sei die Strecke  $A_4 A_5$  in

irgend einem Punkte  $E_5$  durch eine beliebige Belastung  $K$  angegriffen, welche daselbst das Moment

$$E_5 B_5 = K \frac{A_4 E_5 \cdot A_5 E_5}{A_4 A_5} = K \frac{ab}{l_4} = k$$

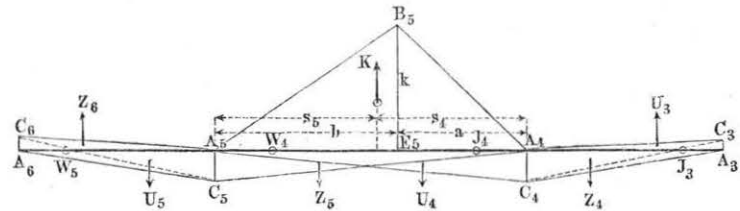
hervorrufen, so ist die Belastung der elastischen Linie durch die Dreiecksfläche  $A_4 B_5 A_5$  von dem Inhalte  $F = k \frac{l_4}{2}$  dargestellt. Sind nun  $s_4$  und  $s_5$  die horizontalen Abstände des Schwerpunktes  $S$  dieser Dreiecksfläche von  $A_4$  und  $A_5$ , so erhält man die von dieser Momentenfläche auf die Stützen ausgeübten Auflagerdrücke zu

$$k \frac{l_4}{2} \cdot \frac{s_5}{l_4} = k \frac{s_5}{2} \text{ in } A_4$$

und

$$k \frac{s_4}{2} \text{ in } A_5.$$

Fig. 163.



Bezeichnet man nun wieder mit  $M_4 = A_4 C_4$  und  $M_5 = A_5 C_5$  die noch unbekannten in  $A_4$  und  $A_5$  erzeugten negativen Momente, und ebenso mit  $M_3 = A_3 C_3$  und  $M_6 = A_6 C_6$  \*) die positiven Momente der nächst benachbarten Stützen, so sind die beiden Stützen  $A_4$  und  $A_5$  außerdem noch durch die zugehörigen Dreiecke

$$\begin{aligned} + A_4 A_3 C_3 &= U_3, & - A_4 A_3 C_4 &= Z_4, \\ - A_4 A_5 C_4 &= U_4, & - A_4 A_5 C_5 &= Z_5, \\ - A_5 A_6 C_5 &= U_5 \text{ und } + A_5 A_6 C_6 &= Z_6 \end{aligned}$$

belastet, welche mit  $\frac{1}{3}$  bzw.  $\frac{2}{3}$  ihres Betrages auf die Stützpunkte drücken. Man findet daher die auf  $A_4$  und  $A_5$  ausgeübten gesammten Auflagerdrücke, welche nach dem oben erkannten Gesetze gleich Null sein müssen, zu:

\*) Wenn  $A_6$  eine Endstütze ist, wie in Fig. 161, so fällt  $M_6 = 0$  aus.

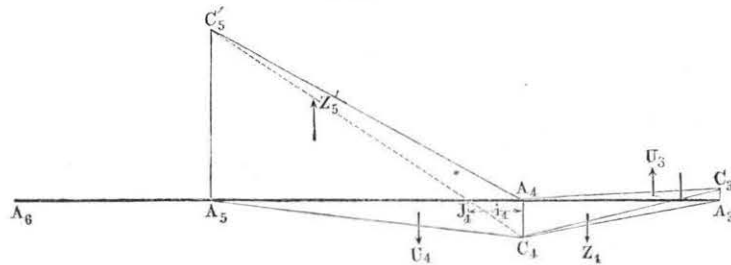


$$A_4 = k \frac{s_5}{2} - \frac{Z_5}{3} - 2 \frac{U_4 + Z_4}{3} + \frac{U_3}{3} = 0 \quad (1)$$

$$A_5 = k \frac{s_4}{2} - \frac{U_4}{3} - 2 \frac{Z_5 + U_5}{3} + \frac{Z_6}{3} = 0 \quad (2)$$

Denkt man sich jetzt die Belastung durch die Kraft  $K$  beseitigt, und statt deren auf den links von  $A_5$  befindlichen Trägetheil äußere Kräfte in solcher Art wirksam, daß in  $A_4$  dasselbe Moment  $A_4 C_4 = M_4$  auftritt, welches durch die Belastung  $K$  hervorgerufen wird, so muß nach der Eigenschaft der

Fig. 164.



Wendepunkte  $J$  in  $A_5$  ein positives Moment  $M_5' = A_5 C_5'$ , Fig. 164, sich einstellen, welches durch

$$A_5 C_5' = - \frac{l_4 - i_4}{i_4} A_4 C_4 = v M_4$$

ausgedrückt ist, wenn  $i_4 = A_4 J_4$  den Abstand des Inflexionspunktes  $J_4$  von  $A_4$  und  $v = - \frac{l_4 - i_4}{i_4}$  das Verhältniß der beiden Abschnitte  $\frac{A_5 J_4}{A_4 J_4}$  bedeutet, in welche die Strecke  $l_4$  durch den Inflexionspunkt  $J_4$  getheilt wird. Die Stütze  $A_4$  ist daher in diesem Falle durch die aus der Fig. 164 ersichtlichen Weise belastet, und man findet nunmehr den dadurch in  $A_4$  hervorgerufenen Auflagerdruck, welcher auch jetzt gleich Null sein muß, zu

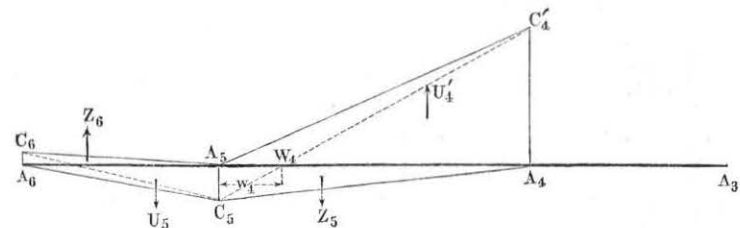
$$A_4 = \frac{Z_5'}{3} - 2 \frac{U_4 + Z_4}{3} + \frac{U_3}{3} = 0 \quad (1^a)$$

Wenn man eine ganz übereinstimmende Betrachtung in Betreff der Stütze  $A_5$  anstellt, d. h. wenn man sich die Belastung  $K$  ersetzt denkt durch eine Einwirkung äußerer Kräfte auf das rechts von  $A_4$  gelegene Balkenstück von solcher Art, daß in  $A_5$  das Moment  $M_5$  unverändert wird, so muß für diesen Fall in  $A_4$  ein positives Moment, Fig. 165,  $M_4' = A_4 C_4' = \mu M_5$  sich einstellen, wenn man mit  $\mu = - \frac{A_4 W_4}{A_5 W_4} = - \frac{l_4 - w_4}{w_4}$  das Verhältniß

der Abschnitte bezeichnet, in welches die Strecke  $l_4$  durch den linken Wendepunkt getheilt wird. Es findet sich nunmehr der Auflagerdruck in  $A_5$  zu

$$A_5 = \frac{U_4'}{3} - 2 \frac{Z_5 + U_5}{3} + \frac{Z_6}{3} = 0 \quad (2^a)$$

Fig. 165.



Die Vergleichung von (1) und (2) mit (1<sup>a</sup>) und (2<sup>a</sup>) ergibt nun:

$$k \frac{s_5}{2} = \frac{Z_5' + Z_5}{3} \quad (3)$$

und

$$k \frac{s_4}{2} = \frac{U_4' + U_4}{3} \quad (4)$$

oder wenn man

$$Z_5' = v U_4 = v M_4 \frac{l_4}{2}$$

und

$$U_4' = \mu Z_5 = \mu M_5 \frac{l_4}{2}$$

einführt,

$$k \frac{s_5}{2} = \frac{1}{3} (M_5 + v M_4) \frac{l_4}{2} \quad (5)$$

und

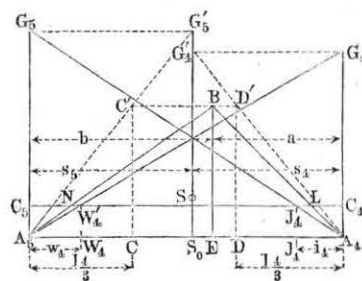
$$k \frac{s_4}{2} = \frac{1}{3} (M_4 + \mu M_5) \frac{l_4}{2} \quad (6)$$

Aus dem Vorstehenden (3) folgt also, daß der Druck, welchen die Momentenfläche der Belastung  $K$  auf eine der beiden Stützen wie  $A_4$  ausübt, gerade so groß ist, wie derjenige, welchen die beiden Momentendreiecke  $Z_5$  und  $Z_5'$  auf dieselbe Stütze  $A_4$  hervorbringen. Wenn man daher ein bei  $A_5$  rechtwinkliges Dreieck von der Basis  $A_5 A_4 = l_4$  aufsucht, welches in  $A_4$  den Druck  $k \frac{s_5}{2}$  erzeugt, so erhält man nach (5) in der Höhe oder der anderen Kathete desselben in  $A_5$  die Größe für den Werth  $M_5 + v M_4$ . In derselben Weise ergibt ein Dreieck zu derselben Basis  $A_5 A_4$ , welches bei  $A_4$  rechtwinklig ist und in

$A_5$  den Druck  $k \frac{s_4}{2}$  ausübt, nach (6) in seiner Höhe bei  $A_4$  den Werth von  $M_4 + \mu M_5$ .

Diese Dreiecke sind leicht zu construiren, und zwar giebt Mohr dazu die folgende Construction an. Ist  $A_4 B A_5$ , Fig. 166, die Momentenfläche der Last  $K$ , so zieht man in  $D$  und

Fig. 166.



$C$  in den Abständen  $\frac{l_4}{3}$  von den

Stützen Verticallinien, auf welche man die Spitze  $B$  des Momentendreiecks nach  $D'$  und  $C'$  projectirt. Zieht man dann durch die Stützpunkte  $A_4$  und  $A_5$  die Geraden  $A_4 D'$  und  $A_5 C'$ , so schneiden diese auf der Verticalen durch den Schwerpunkt  $S$  die gesuchten Höhen  $S_0 G_4' = A_4 G_4$  und

$S_0 G_5' = A_5 G_5$  ab. Die Wichtigkeit dieser Construction erkennt man leicht aus der Figur, welche aus

$$S_0 G_4' : DD' = s_4 : \frac{l_4}{3}$$

die Größe

$$S_0 G_4' = 3 \cdot \frac{k s_4}{l_4}$$

ergiebt. Das Dreieck  $A_5 A_4 G_4$  übt daher auf  $A_5$  den Druck

$$\frac{1}{3} \cdot A_4 G_4 \cdot \frac{l_4}{2} = \frac{k s_4}{2},$$

also von derselben Größe, wie das Momentendreieck  $A_4 B A_5$  aus.

Hat man die beiden Dreiecke  $A_4 A_5 G_4$  und  $A_4 A_5 G_5$  gezeichnet, so findet man nach dem Vorstehenden die gesuchten Momente  $M_4$  und  $M_5$  über den Stützen, wenn man durch die Wendepunkte  $W_4$  und  $J_4$  Verticallinien zieht, und die Schnittpunkte  $W_4'$  und  $J_4'$  mit den Hypotenusen der betreffenden Dreiecke durch eine Gerade  $W_4' J_4'$  verbindet. Diese liefert dann in  $C_4 A_4$  und  $C_5 A_5$  die gesuchten Momente  $M_4$  und  $M_5$ .

Es mag hier sogleich bemerkt werden, daß die Spitze  $B$  des Momentendreiecks der Last  $K$  immer oberhalb der beiden Dreiecksseiten  $A_5 G_4$  und  $A_4 G_5$  gelegen sein wird, wo auch die Belastung  $K$  zwischen  $A_4$  und  $A_5$  wirken möge. In Folge dessen werden die Schnittpunkte  $L$  und  $N$  niemals zwischen die Wendepunkte  $J$  und  $W$ , sondern stets zwischen die letzteren und die betreffenden Stützpunkte fallen, eine Eigenschaft, auf welche in der Folge noch Bezug genommen werden wird.

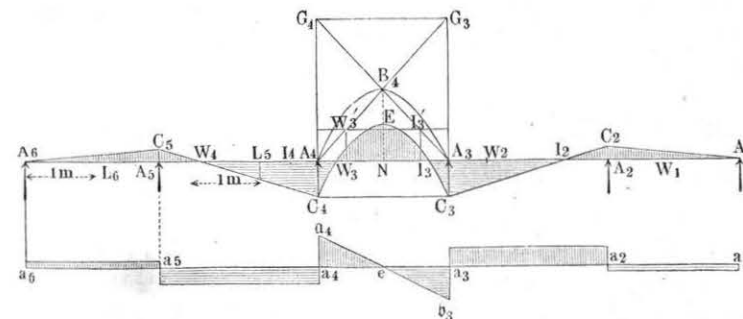
Wenn die Belastung der Oeffnung gleichmäßig über deren Länge vertheilt ist, wie in Fig. 161 vorausgesetzt worden, so ergeben sich die beiden vorerwähnten Höhen  $A_4 G_4$  und  $A_5 G_5$  gleich groß und zwar ist jede derselben gleich der doppelten Scheitelordinate  $k$  der Parabel, welche die Momentenfläche darstellt, denn der von der Parabel auf jede Stütze ausgeübte Auflagerdruck ist

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} k l_4 = \frac{k l_4}{3},$$

also eben so groß wie derjenige eines Dreiecks von der Höhe  $2k$  und der Basis  $l_4$ .

Nach dem Vorstehenden bestimmen sich nun die in dem ganzen Träger  $A_1 A_6$ , Fig. 167, durch Belastung einer einzigen Oeffnung, wie  $A_3 A_4$ ,

Fig. 167.



hervorgerufenen Momente wie folgt. Es seien zunächst nach Anweisung der Figuren 161 und 162 die Wendepunkte  $J$  und  $W$  ermittelt und durch die Parabel  $A_4 B A_3$ , deren Scheitelhöhe in der Mitte  $N$  der belasteten Oeffnung die Größe  $NB_4 = \frac{l_3^2}{8}$  hat, sei die Fläche der positiven Momente

dieser Strecke dargestellt. Macht man jetzt  $A_4 G_4 = A_3 G_3 = 2NB_4$ , und zieht  $A_4 G_3$  und  $A_3 G_4$ , so erhält man in den Verticalen durch  $J_3$  und  $W_3$  die beiden Punkte  $J_3'$  und  $W_3'$ , deren Verbindungslinie auf den Verticalen durch  $A_3$  und  $A_4$  Strecken abschneidet, welche man als  $M_3 = A_3 C_3$  und als  $M_4 = A_4 C_4$  anzutragen hat. Nachdem dies geschehen, erhält man in bekannter Art mittelst der Wendepunkte  $W$  und  $J$  durch die Linienzüge  $C_3 J_2 C_2 A_1$  und  $C_4 W_4 C_5 A_6$  die Momentenflächen der unbelasteten Strecken zu beiden Seiten. Wenn man noch, um die positiven und negativen Momente der belasteten Strecke  $A_3 A_4$  zu addiren, die Ordinaten der Parabel  $A_4 B A_3$  und des Trapezes  $A_4 A_3 C_3 C_4$  algebraisch summiert, so giebt die in der Figur schraffierte Fläche eine Darstellung der Biegemomente, welche

in jedem Punkte durch die gleichmäßige Belastung der Strecke  $A_3 A_4$  mit der Last  $q_3 l_3$  hervorgerufen werden.

Es leuchtet ein, daß, wenn dieselbe Construction für sämtliche Deffnungen wiederholt wird, durch algebraische Summierung aller so erhaltenen Momentenflächen diejenige Fläche erhalten wird, welche der vollen Belastung des ganzen Trägers in allen Feldern durch die diesen Feldern zukommenden Belastungen ( $q = p + k$ ) entspricht.

Aus den für alle Punkte des Balkens gefundenen Biegemomenten  $M$  läßt sich dann auch mit Hilfe der Gleichung

$$V = \frac{\partial M}{\partial x}$$

die Größe der Schubkraft  $V$  ermitteln, welche in jedem Punkte des Balkens ebenfalls durch die Belastung der Strecke  $A_3 A_4$  erzeugt wird. Zu dem Ende sucht man zunächst in der Strecke  $A_3 A_4$  den Punkt  $E$ , in welchem das Maximum der positiven Momente auftritt, d. h. den Punkt der Momentencurve, dessen Tangente horizontal ist \*). In diesem Punkte  $e$  der Aye ist die verticale Schubkraft gleich Null, und man erhält nach dem Früheren die Darstellung der Schubkräfte für diese gleichförmig mit  $q_3$  belastete Strecke durch die unter dem Neigungswinkel  $\text{arc tang } q_3$  gegen den Horizont durch  $e$  gelegte Gerade  $a_4 e b_3$ , d. h. indem man  $a_4 a_4 = q_3 \cdot e a_4$  und  $a_3 b_3 = q_3 \cdot e a_3$  macht. Für jede der übrigen Strecken ist die Schubkraft constant, da für diese Strecken die Momentenflächen durch gerade Linien begrenzt sind, und zwar sind die Schubkräfte in der Figur für die Strecken  $A_6 A_5$  und  $A_3 A_2$  positiv, weil hier die Momente von links nach rechts zunehmen (algebraisch), während für die Strecken  $A_5 A_4$  und  $A_2 A_1$ , auf welchen die Momente von links nach rechts abnehmen, die Schubkräfte negativ und demgemäß in der Figur unterhalb der Aye  $a_6 a_1$  angetragen sind. Die absolute Größe der Schubkraft für jedes Feld findet man wegen  $V = \frac{\partial M}{\partial x}$  aus der constanten Neigung der Momentenlinie, z. B. für  $A_6 A_5$  aus dem Verhältnisse

$$+ \frac{A_5 C_5}{A_6 A_5} = + \frac{M_5}{l_5},$$

und für die Strecke  $A_5 A_4$  durch

$$- \frac{A_4 C_4}{W_4 A_4}.$$

Da die Größen  $A_5 C_5$ ,  $A_4 C_4$  . . . Momente, d. h. Meterkilogramme (oder

\*) Dieser Punkt  $E$  liegt bei der gleichförmig vertheilten Belastung in Fig. 167 in der Mitte der Deffnung.

Meter-tonnen) vorstellen, so repräsentiren obige Verhältnisse natürlich Kräfte (Kilogramme oder Tonnen). Hat man daher für die Momente einen Maßstab gewählt, nach welchem 1 mm  $n$  Meter-tonnen beträgt, so erhält man in der Ordinate des Punktes  $L_6$  oder  $L_5$ , welcher nach dem Längenmaßstabe um 1 m von dem Nullpunkte  $A_6$  bzw.  $W_4$  absteht, diejenigen Längen, welche, nach dem Maßstabe für die Momente gemessen, die Schubkraft in Tonnen ergeben. Wenn man auch die Schubkraftdiagramme für die besondere Belastung jeder einzelnen Deffnung entwirft, so erhält man durch algebraische Summierung derselben ebenfalls das Diagramm für die aus der vollen Belastung des ganzen Trägers resultirenden Schubkräfte.

Die volle Belastung des ganzen Trägers durch die gesammte aus dem Eigengewichte  $p$  und der Verkehrslast  $k$  bestehende Totallast  $q$  entspricht jedoch nicht dem ungünstigsten Belastungsfalle des Trägers für jeden Querschnitt, da durch diese volle Belastung in keinem Punkte das größte daselbst mögliche Biegemoment oder die größte Schubspannung hervorgerufen wird. Da nun aber die Dimensionen des Balkens in jedem Querschnitte diesen größten Werthen  $\max M$  und  $\max V$  gemäß gewählt werden müssen, so erübrigt noch, diejenigen Belastungszustände des Balkens festzustellen, welchen für irgend einen Querschnitt die gedachten absolut größten Werthe von  $M$  und  $V$  zukommen. Da das Eigengewicht der Construction ein für alle Mal als volle Belastung des Trägers auftritt, so wird diese Untersuchung sich nur auf die jeweilige Stellung der beweglichen Verkehrslast zu beziehen haben.

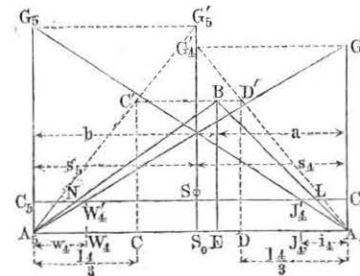
Betrachtet man irgend eine Deffnung wie  $A_5 A_4$ , Fig. 168, welche in einem beliebigen Punkte  $E$  einer Belastung durch  $K$  ausgesetzt ist, während die sämtlichen übrigen Deffnungen, abgesehen vom Eigengewichte, nicht belastet sind, so erhält man nach dem Vorstehenden in dem Linienzuge

$$A_5 C_5 N B L C_4 A_4$$

die Begrenzung der Momentenfläche, von welcher das Dreieck  $NBL$  die positiven Momente darstellt. Nun wurde schon oben bemerkt, daß die Nullpunkte  $N$  und  $L$  niemals zwischen die

Wendepunkte  $W$  und  $J$  fallen können, wo auch der Angriffspunkt  $E$  der Kraft  $K$  zwischen  $A_5$  und  $A_4$  gewählt werden möge. Daraus geht also hervor, daß jede Belastung irgend eines Elementes der betrachteten

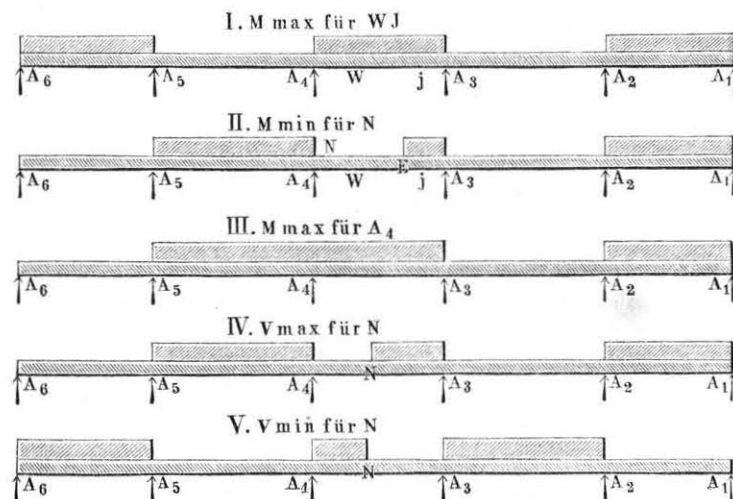
Fig. 168.





Öeffnung für die zwischen  $W$  und  $J$  gelegene Balkenstrecke einen positiven Zuwachs zu dem Momente in allen Punkten dieser Strecke hervorruft. Man hat daher zu schließen, daß in den Querschnitten dieser mittleren Strecke  $WJ$  das größte positive Moment eintritt, wenn die ganze Öeffnung  $A_5 A_4$  von der beweglichen Last  $q_4 l_4$  bedeckt ist. Denkt man jetzt auch die übrigen Öeffnungen des Trägers beliebig belastet, so ergibt sich aus dem Früheren und aus Fig. 167, daß jede Belastung der beiden unmittelbar anstoßenden Öeffnungen negative, und jede Belastung der darauf folgenden zweitnächsten positive Momente u. s. f. in der Strecke  $WJ$  hervorruft. Daraus folgt, daß man für diese Strecke die größten positiven Momente bei einer Belastung erhält, wie sie durch I, Fig. 169, dargestellt ist.

Fig. 169.



Die kleinsten Momente würden sich ergeben, wenn man umgekehrt die unmittelbar an  $A_4 A_3$  anstoßenden Öeffnungen  $A_5 A_4$  und  $A_3 A_2$  und jede zweitfolgende belasten würde.

Anderes verhält es sich hinsichtlich der beiden seitlichen Strecken  $A_4 W$  und  $J A_3$  jeder Öeffnung. Man ersieht aus Fig. 168, daß für den Punkt  $N$  die Lage einer Kraft  $K$  in  $E$  als Grenzlage gilt, derart, daß jede rechts von  $E$  wirkende Last in  $N$  ein negatives, dagegen jede links von  $E$  wirkende Last in  $N$  ein positives Moment erzeugt. Wenn daher die Strecke  $A_5 E$  von der beweglichen Last bedeckt ist, so wird das größte positive Moment in  $N$  erzeugt, welches aus einer Belastung der Öeffnung  $A_4 A_5$  überhaupt resultiert, während eine Belastung der Strecke  $A_4 E$  den größten

negativen Beitrag zu dem Momente in  $N$  ergibt. Ebenso folgt, daß die Belastungen der ersten, dritten u. s. w. Öeffnung links neben  $A_5$ , sowie der zweiten, vierten u. s. w. Öeffnung rechts von  $A_4$  negative Momente für  $A_5 N$  erzeugen. Demgemäß ergibt sich, daß das absolut größte negative Moment, d. h.  $M \min$  für einen Punkt  $N$  der Strecke  $A_4 W$ , Fig. 169, durch die in II dieser Figur dargestellte Belastungsart des Balkens hervorgerufen wird. Dabei stellt  $E$  denjenigen Punkt vor, welcher nach Fig. 168 die Belastungsscheide für den in Betracht gezogenen Querschnitt  $N$  abgibt, und welcher in der oben angegebenen Art zu ermitteln ist. Man kann hinsichtlich dieses Punktes  $E$  bemerken, daß derselbe bei einer Verschiebung des zugehörigen Punktes  $N$  von  $A_5$  nach  $W_4$ , Fig. 168, zwischen  $A_5$  und  $A_4$  sich bewegt, derart, daß er gleichzeitig mit  $N$  in  $A_5$  fällt und nach  $A_4$  gelangt, wenn  $N$  nach  $W_4$  gekommen ist. Eine ganz ähnliche Betrachtung wie für die Strecke  $A_5 W_4$  gilt auch für diejenige  $A_4 J_4$ , indem für den Punkt  $L$  derselben ebenfalls  $E$  als Belastungsscheide auftritt, derart, daß links von  $E$  befindliche Lasten negative und rechts von  $E$  gelegene Belastungen positive Momente in  $L$  erzeugen.

Fällt der Punkt  $N$  in einen Stützpunkt  $A_4$ , so ergibt sich, da alsdann auch die zu  $N$  gehörige Belastungsscheide in diesen Stützpunkt hineinfällt, die Belastung des Trägers, welche dem absolut größten Werthe des negativen Stützmomentes in  $A_4$  entspricht, in der durch Fig. 169, III dargestellten Weise.

Um auch die Belastung, welche der größten Verticallast  $V$  für einen beliebigen Punkt  $N$ , Fig. 169, IV, entspricht, zu finden, hat man zu bemerken, daß nach §. 36 die Belastung der Strecke  $NA_3$  rechts von  $N$  für diesen Punkt nur positive Scheerkräfte hervorruft, und daß dasselbe für die Belastungen derjenigen Öeffnungen  $A_5 A_4$  und  $A_2 A_1$  gilt, welche in der Öeffnung  $A_4 A_3$  Momente erzeugen, die von links nach rechts abgeiraisch zunehmen. Hieraus geht hervor, daß die in IV dargestellte Belastungsart in  $N$  das Maximum der positiven Scheerkraft erzeugt, während die entgegengesetzte Belastungsart in Fig. 169, V die größte negative Scheerkraft oder  $V \min$  hervorruft.

Die in Fig. 169 angedeuteten Belastungsarten lassen erkennen, in welcher Art man für jeden Querschnitt des Trägers die ungünstigsten Beanspruchungen durch Bieugungsmomente und Scheerkräfte zu bestimmen hat, indem man nach Fig. 167 für jede Öeffnung die aus der Belastung derselben durch  $p$  und  $l$  sich ergebenden Diagramme der Momente und Schubkräfte entwirft, und für jeden Querschnitt nur diejenigen Ordinaten in Betracht zieht, welche der entsprechenden Belastungsart gemäß der Fig. 169 zukommen.

Hierbei empfiehlt es sich, diese Diagramme unter Zugrundelegung einer

Belastung Eins (1 kg oder 1 Tonne für 1 m Länge) zu entwerfen, indem man dann nur nöthig hat, für jede Belastung durch  $p$  oder  $k$  die betreffende Ordinate mit der Maßzahl von  $p$  oder  $k$  zu multipliciren.

Es würde im vorliegenden Falle zu weit führen, die vorstehenden Untersuchungen auch auf die Fälle auszudehnen, in denen die einzelnen Stützen nicht in derselben Höhe liegen, oder die Trägheitsmomente des Trägers für verschiedene Querschnitte von verschiedener Größe sind, es muß in dieser Hinsicht auf die hier zu Grunde gelegte Arbeit von Mohr\*) verwiesen werden.

§. 44. **Trägheitsmomente der Querschnitte.** Wenn nach dem Vorstehenden für einen Balken die größten Bieugungsmomente  $M$  und die größten verticalen Scheerkräfte  $V$  in jedem Querschnitte ermittelt sind, so kommt es darauf an, die Dimensionen der einzelnen Querschnitte derartig zu bemessen, daß das Material mit genügender Sicherheit den einwirkenden Kräften zu widerstehen vermag. Man hat zu dem Ende die Anordnung so zu treffen, daß die größte in einem Querschnitte auftretende Spannung pro Flächeneinheit (1 qmm) einen erfahrungsmäßig zulässigen Werth  $s$  nicht übersteige. Da die Biegungsspannungen in irgend einem Punkte eines beliebigen Querschnittes im geraden Verhältnisse mit dem Abstände dieses Punktes von der neutralen Ase des Querschnittes stehen, so wird die größte Spannung in den am weitesten von der neutralen Ase entfernten Punkten des Querschnittes auftreten. Erreicht daher die Spannung in diesen Punkten, deren Entfernung von der neutralen Ase fernerhin mit  $e$  bezeichnet werden soll, den zulässigen Werth  $s$ , so hat man im Abstände gleich Eins von der neutralen Ase die Spannung  $\frac{s}{e}$ . Es ist nun bereits in Thl. I gezeigt, wie das in irgend einem Querschnitte des Balkens durch die äußeren Kräfte hervorgerufene Bieugungsmoment  $M$  durch das Moment der Spannungen aller Querschnittselemente, bezogen auf die neutrale Ase, im Gleichgewichte gehalten werden muß, und es wurde daselbst die Formel

$$M = \frac{s}{e} W$$

angegeben, unter  $W$  eine an obiger Stelle ebenfalls als Bieugungsmoment bezeichnete gewisse Function des Querschnittes verstanden. Diese Function  $W$  stellt sich dar als die Summe aller derjenigen Producte, welche aus den einzelnen Flächenelementen  $\partial F$  des Querschnittes  $F$  in die Quadrate  $y^2$  ihrer Abstände von der neutralen Ase gebildet werden. Wegen der Analogie dieses Werthes mit den in Thl. I, Abschn. V, Cap. 2 besprochenen

\*) Zeitschr. d. Hannov. Archit. u. Ing.-Ver. 1863.

Trägheitsmomenten der Körper, hat man jene gedachte Summe  $\int \partial F \cdot y^2$  meistens gleichfalls als das Trägheitsmoment des Querschnittes bezeichnet und es soll in der Folge diese Benennung hier beibehalten und dafür die Bezeichnung  $T$  gewählt werden. Was die Uebereinstimmung der vorgedachten Querschnittsfunction mit dem Trägheitsmomente eines Körpers hinsichtlich des analytischen Ausdruckes betrifft, so hat man nur anstatt der Massentheile  $\partial m$  des Körpers die Flächenelemente  $\partial F$  des Querschnittes einzuführen, und es gelten die in Thl. I, Abschn. V über die Trägheitsmomente materieller Körper gefundenen Beziehungen auch für die hier in Betracht kommenden Trägheitsmomente der Querschnitte. Es ist auch in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 2 gezeigt worden, in welcher Weise man aus den Dimensionen einer Querschnittsfläche von bestimmter Form das zugehörige Trägheitsmoment zu berechnen hat, und es ist daselbst diese Rechnung für eine Anzahl häufig vorkommender Querschnittsformen durchgeführt worden. Hinsichtlich dieser Berechnung, welche hier nicht wiederholt werden soll, ist auf Thl. I zu verweisen, und es möge nur in der Tabelle am Schlusse dieses Paragraphen eine Zusammenstellung der Ausdrücke für die Trägheitsmomente einiger der häufiger vorkommenden Balkenquerschnitte angeführt werden.

Aus dieser Zusammenstellung ersieht man, daß alle diese Trägheitsmomente unter der Form:

$$T = r^2 F \dots \dots \dots (1)$$

erscheinen, unter  $F$  die Querschnittsfläche und unter  $r$  eine gewisse von der Form des Querschnittes abhängige Größe verstanden. Diese Größe  $r$  ist für verschieden geformte Querschnitte verschieden, aber für alle unter sich ähnlichen Querschnitte durch einen und denselben aliquoten Theil einer und derselben Querschnittsdimension ausgedrückt. Man hat z. B. für die kreisförmige Fläche vom Durchmesser  $d$ :

$$T = \frac{\pi}{64} d^4 = \frac{d^2}{16} F,$$

folglich ist hier

$$r = \frac{d}{4},$$

während für ein Rechteck von der Höhe  $h$  und Breite  $b$ , letztere in der Richtung der neutralen Ase gemessen,

$$T = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{h^2}{12} F,$$

also

$$r = \frac{h}{6} \sqrt{3} = 0,289 h$$





auf die durch den Schwerpunkt  $S$  des Querschnittes gehende neutrale Ase  $EE$ .

Ist  $E_1 E_1$  eine andere, im Abstände  $d$  zu  $EE$  parallele Ase, so erhält man durch dieselbe Betrachtung in der Fläche  $a_1 a_2 \dots a_9 fg a_1$  das Maß für das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf diese Ase  $E_1 E_1$ . Wird diese Fläche mit  $\varphi_1$  bezeichnet, so hat man nach der Figur

$$\varphi_1 = \varphi + a_0 fg = \varphi + \frac{d}{2} \cdot fg.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke  $a_0 fg$  und  $o 0 9$  folgt nun

$$fg : d = 0.9 : 4.0 = F : \frac{F}{2},$$

oder

$$fg = 2d,$$

so daß man den Inhalt des Dreiecks  $a_0 fg = d^2$  und das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf  $E_1 E_1$  zu

$$T_1 = F (r^2 + d^2) \dots (2)$$

erhält. Dieser Satz ist auch in anderer Art schon in Thl. I gefunden worden.

Kennt man die Trägheitsmomente  $T_x$  und  $T_y$  eines Querschnittes in Bezug auf zwei zu einander senkrechte, sonst beliebige Axen  $OX$  und  $OY$ , Fig. 171, so erhält man das Trägheitsmoment  $T_a$  für eine durch  $O$  gehende, mit der  $XA$ se den beliebigen Winkel  $\alpha$  bildende Ase  $OA$  nach der Figur zu

$$T_a = \int \partial F \cdot a^2 = \int \partial F [x^2 + y^2 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2],$$

oder

$$T_a = \int \partial F x^2 \sin^2 \alpha + \int \partial F y^2 \cos^2 \alpha - \int \partial F \cdot 2xy \cos \alpha \sin \alpha,$$

d. h.

$$T_a = T_y \sin^2 \alpha + T_x \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha \int xy \cdot \partial F \dots (3)$$

Dieser Werth wird zu einem Maximum oder Minimum für solche Größen von  $\alpha$ , welche sich aus  $\frac{\partial T_a}{\partial \alpha} = 0$  ergeben, also aus

$$2 \sin \alpha \cos \alpha T_y - 2 \cos \alpha \sin \alpha T_x = 2 \cos 2\alpha \int xy \cdot \partial F \text{ zu}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \int xy \cdot \partial F}{T_y - T_x} \dots (4)$$

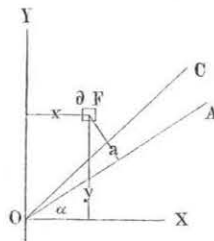


Fig. 171.

Um die Größe  $\int xy \partial F$  zu entfernen, denke man noch das Trägheitsmoment  $T_c$  für eine unter  $45^\circ$  gegen die Coordinatenaxen geneigte Ase  $OC$  eingeführt, welches Moment nach (3) zu

$$T_c = \frac{1}{2} T_y + \frac{1}{2} T_x - \int xy \partial F$$

folgt, so daß man

$$2 \int xy \partial F = T_y + T_x - 2 T_c$$

setzen kann, womit die Gleichung (4) übergeht in:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{T_y + T_x - 2 T_c}{T_y - T_x} \dots (4^a)$$

Dieser Ausdruck liefert in jedem Falle zwei Werthe für  $2\alpha$ , welche sich um  $180^\circ$  unterscheiden, und von welchen der eine einem Maximum, der andere einem Minimum entspricht, wie sich daraus ergibt, daß

$$\frac{\partial^2 T_a}{\partial \alpha^2} = 2 \cos 2\alpha (T_y - T_x) + 4 \sin 2\alpha \int xy \partial F$$

mit den Werthen  $2\alpha$  und  $2\alpha + 180^\circ$  entgegengesetzte Vorzeichen annimmt. Diese Werthe  $T_{\max}$  und  $T_{\min}$  erhält man, wenn man den aus (4) gefundenen Werth von  $\alpha$  in (3) einführt.

Man nennt die beiden, den Trägheitsmomenten  $T_{\max}$  und  $T_{\min}$  zugehörigen Axen die Hauptaxen des Querschnittes für den Punkt  $O$ , und es ist aus (4) ersichtlich, daß die Axen  $OX$  und  $OY$  selbst zu diesen Hauptaxen werden, sobald

$$\int xy \partial F = 0$$

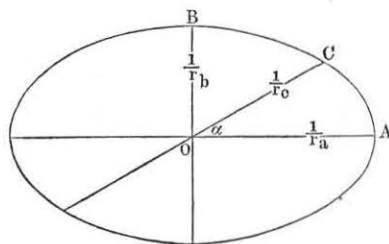
wird. Dies ist offenbar für jede Symmetriaxe eines Querschnittes der Fall, da der Symmetrie wegen jeder positiven Ordinate einerseits dieser Ase eine gleich große negative Ordinate auf der entgegengesetzten Seite entspricht. Hieraus ergibt sich die auch schon aus dem in Thl. I, Abschn. V, Cap. 2 über die Trägheitsmomente Gesagten folgende Beziehung, daß eine Symmetriaxe eines Querschnittes für jeden ihrer Punkte eine Trägheitshauptaxe ist. Die zugehörige andere Hauptaxe findet sich dann in der in diesem Punkte zur Symmetriaxe senkrechten Geraden.

Denkt man sich für alle möglichen durch einen beliebigen Punkt  $O$  eines Querschnittes, Fig. 172 (a. f. S.), gehenden Geraden wie  $OC$  das Trägheitsmoment  $T = Fr^2$  ermittelt, und auf jeder dieser Axen vom Mittelpunkte  $O$  nach jeder Seite ein Stück  $OC$  abgetragen, welches nach einem beliebig gewählten Maßstabe der Größe  $\frac{1}{r}$  proportional ist, so liegen alle die

so erhaltenen Punkte  $C$ , wie leicht zu erkennen ist, auf dem Umfange einer Ellipse, deren Mittelpunkt in  $O$  liegt, und deren Halbachsen  $OA = a$  und  $OB = b$  durch die Größen  $\frac{1}{r_a}$  und  $\frac{1}{r_b}$  dargestellt sind, wenn  $r_a$  und  $r_b$  die den beiden Hauptachsen zugehörigen Trägheitshalbmesser sind, für welche man also

$$T_{max} = F r_a^2 \text{ und } T_{min} = F r_b^2$$

Fig. 172.



hat. Wählt man, um dies zu erkennen, die Hauptachsen  $OA$  und  $OB$  zu Koordinatenachsen, so ist für irgend eine Axe  $OC$ , welche mit der  $X$ -Axe den Winkel  $\alpha$  bildet, der Construction zufolge

$$OC = c = \frac{1}{r_c},$$

unter  $r_c$  den Trägheitshalbmesser des der Axe  $OC$  zugehörigen Trägheitsmomentes  $T_c = F r_c^2$  verstanden. Nun ist nach (3)

$$T_c = T_y \sin^2 \alpha + T_x \cos^2 \alpha,$$

da für die Hauptachsen die Größe  $\int xy \cdot dF = 0$  wird. Setzt man in obiger Gleichung  $T = F r^2$ , so folgt

$$r_c^2 = r_b^2 \sin^2 \alpha + r_a^2 \cos^2 \alpha,$$

oder, wenn man nach der Figur  $\sin \alpha = y r_c$  und  $\cos \alpha = x r_c$  einführt und durch  $r_c^2$  beiderseits dividirt:

$$1 = r_b^2 y^2 + r_a^2 x^2,$$

welche Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen  $\frac{1}{r_a} = a$  und  $\frac{1}{r_b} = b$  zukommt.

Diejenigen Hauptachsen, welche durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehen, nennt man die Schwerpunktsachsen, und die zugehörige Ellipse die Centraellipse des Querschnittes (s. auch Thl. I, Abschn. V, Cap. 2).

Die Ermittlung der Schwerpunktsachsen und ihrer zugehörigen Trägheitsmomente ist, wie sich aus dem Folgenden (S. 46) ergeben wird, dann erforderlich, wenn die Kraftebene, in welcher der Balken in Angriff genommen wird, nicht eine Symmetrieebene desselben ist.

## Trägheitsmomente.

	$F$	$T$	$W$	$r^2$	$\eta = \frac{W}{F \frac{h}{2}}$
	$b h$	$\frac{1}{12} b h^3$	$\frac{1}{6} b h^2$	$\frac{h^2}{12}$	0,333
	$a^2$	$\frac{1}{12} a^4$	$\frac{1}{6} a^3$	$\frac{a^2}{12}$	0,333
	$a^2$	$\frac{1}{12} a^4$	$0,118 a^3$	$\frac{a^2}{12}$	0,236
	$2,598 a^2$	$0,5413 a^4$	$\frac{5}{8} a^3$	$0,209 a^2$	0,278
	$2,598 a^2$	$0,5413 a^4$	$0,5413 a^3$	$0,209 a^2$	0,209
	$\pi a^2$	$\frac{\pi a^4}{4}$	$\frac{\pi a^3}{4}$	$\frac{a^2}{4}$	0,25
	$\pi a b$	$\frac{\pi a^3 b}{4}$	$\frac{\pi a^2 b}{4}$	$\frac{a^2}{4}$	0,25
	$b(h - h_1)$	$\frac{b}{12}(h^3 - h_1^3)$	$\frac{b}{6} \frac{h^3 - h_1^3}{h}$	$\frac{h^2 + h h_1 + h_1^2}{12}$	$\frac{1}{3} \frac{h^2 + h h_1 + h_1^2}{h^2}$
	$h^2 - h_1^2$	$\frac{h^4 - h_1^4}{12}$	$\frac{h^4 - h_1^4}{6 h}$	$\frac{h^2 + h_1^2}{12}$	$\frac{1}{3} \frac{h^2 + h_1^2}{h^2}$
	$\pi(a^2 - a_1^2)$	$\pi \frac{a^4 - a_1^4}{4}$	$\pi \frac{a^4 - a_1^4}{4 a}$	$\frac{a^2 + a_1^2}{4}$	$\frac{1}{4} \frac{a^2 + a_1^2}{a^2}$
	$b h + b_1 h_1$	$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{12}$	$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{6 h}$	$\frac{1}{12} \frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{b h + b_1 h_1}$	$\frac{1}{3} \frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{h^2 b h + b_1 h_1}$
	$b h - b_1 h_1$	$\frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{12}$	$\frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{6 h}$	$\frac{1}{12} \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{b h - b_1 h_1}$	$\frac{1}{3} \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{h^2 b h - b_1 h_1}$

§. 45. **Balkenquerschnitte.** Aus der oben angegebenen Fundamentalformel für die Biegung von Balken

$$M = s \frac{T}{e}$$

erkennt man, daß der Widerstand eines Balkens von einem bestimmten Materiale, d. h. bei einer gewissen, höchstens zulässigen specifischen Faserspannung  $s$  mit dem Werthe  $\frac{T}{e}$  proportional ist. Man bezeichnet daher gewöhnlich die Querschnittsfuction

$$\frac{T}{e} = \frac{\text{Trägheitsmoment}}{\text{Entfernung der äußersten Faser von der neutralen Ase}} = W$$

als das Widerstandsmoment des Balkens. Wenn der Querschnitt die neutrale Ase zur Symmetrieaxe hat, d. h. wenn die Abstände  $e_1$  und  $e_2$  der äußersten Fasern zu beiden Seiten der neutralen Ase den gleichen Werth  $e$  haben, so sind auch die Spannungen in diesen Fasern von gleicher Größe, jedoch von entgegengesetzter Richtung, indem die concav gebogenen Fasern Druckspannungen und die convex gebogenen Fasern Zugspannungen ausgesetzt sind. Wenn das Material des Balkens von solcher Beschaffenheit ist, daß die für dasselbe zulässigen Spannungen für Zug und Druck zu gleichem Betrage angenommen werden dürfen, wie dies für Holz und Schmiedeeisen der Fall ist, so wird man den Querschnitten solche Formen geben, daß  $e_1 = e_2$  ist, denn mit ungleichen Entfernungen der äußersten Fasern würden auch die Anstrengungen derselben ungleich werden, was einer möglichsten Ausnutzung des Materials widersprechen würde. Wenn jedoch das Material, wie es bei dem Gußeisen der Fall ist, für Zug und Druck verschieden große Spannungen  $s_z$  und  $s_d$  zuläßt, so wird man auch  $e_z$  und  $e_d$  verschieden anzunehmen haben, so zwar, daß

$$\frac{s_z}{e_z} = \frac{s_d}{e_d}$$

ist. Da die neutrale Ase bei einem nur auf Biegung beanspruchten Balken durch den Schwerpunkt des Querschnittes geht, so folgt hieraus, daß man die Querschnitte der Gußeisenträger gegen die horizontale Schwerpunktsaxe derartig unsymmetrisch machen wird, daß der Schwerpunkt von den gedrückten Fasern einen im Verhältnisse  $\frac{s_d}{s_z}$  größeren Abstand  $e_d$  hat, als von den gezogenen Fasern. Dieser Fall soll in einem folgenden Paragraphen näher untersucht und hier zunächst die Gleichheit von  $s_z$  und  $s_d$  vorausgesetzt, mithin auch gleicher Abstand der neutralen Ase von den äußersten Fasern zu beiden Seiten angenommen werden.

Es leuchtet ein, daß das in einem Balken vorhandene Material dann in der möglich vortheilhaftesten Weise zur Verwendung kommen würde, wenn in jedem Elemente die für das Material gerade noch zulässige Faserspannung auftreten könnte, wie dies bei einem nur auf Zug oder nur auf Druck beanspruchten Stabe in der That der Fall ist. Eine solche Inanspruchnahme ist bei gebogenen Balken nicht möglich, da die Spannungen in den einzelnen Punkten eines Querschnittes mit deren Abständen von der neutralen Ase proportional sind, in dieser letzteren daher den Werth Null haben, und so nach nur die äußersten Fasern mit ihrer ganzen Widerstandsfähigkeit wirksam sind, während alle übrigen Fasern mit geringeren Kräften widerstehen, als sie ihrer Natur nach äußern könnten. Dächte man sich bei einem Balken von der Höhe  $h$  des Querschnittes das gesammte Material zu gleichen Theilen in den beiden äußersten Schichten vereinigt, so daß jede dieser Schichten durch einen sehr dünnen Streifen von dem Querschnitte  $\frac{F}{2}$  dargestellt wäre, so würde auch alles Balkenmaterial vollständig ausgenützt werden, und man würde einen idealen Querschnitt erhalten, welcher für den gegebenen Flächeninhalt  $F$  des Querschnittes und eine gleichfalls gegebene Querschnittshöhe  $h$  die größtmögliche Widerstandsfähigkeit darbieten würde. Da hierbei in jeder der beiden äußersten Schichten im Abstände  $h$  von einander der halbe Querschnitt  $\frac{F}{2}$  concentrirt zu denken wäre, so würden die beiden gleichen und entgegengesetzten Spannkkräfte, jede von der Größe  $s \frac{F}{2}$ , ein Kräftepaar bilden, welches sich der Biegung mit einem Momente

$$s \frac{F h}{2} = M$$

entgegensetzt, man hätte daher für diesen idealen Fall aus

$$M = s W = s \frac{F h}{2}$$

das Widerstandsmoment:

$$W = F \frac{h}{2}.$$

Dieser ideale Zustand, welcher der größtmöglichen Widerstandsfähigkeit des Balkens entspricht, ist in der Wirklichkeit aus den angegebenen Gründen niemals erreichbar, man wird demselben aber um so mehr sich nähern, je mehr man das Material aus dem mittleren Theile des Balkens entfernt und in den von der neutralen Ase entfernteren Parthieen anhäuft, wie dies z. B. bei den Balken von doppelt T förmigem Querschnitte und bei den



Blechträgern geschieht, welche im mittleren Theile aus einer dünnen Wand und zu beiden Seiten aus massigeren Streifen bestehen. Die Grenze, bis zu welcher hierbei die Stärke der Mittelrippe vermindert werden kann, hängt außer von den Rücksichten der Herstellung namentlich von den Schubspannungen der Querschnitte ab, worüber in einem folgenden Paragraphen das Nähere angegeben werden soll.

Aus den vorstehenden Betrachtungen folgt zunächst, daß z. B. ein kreisförmiger Querschnitt, bei welchem das Material verhältnißmäßig mehr in dem mittleren Theile angehäuft ist, als in den äußeren, von der neutralen Ase entfernteren Parthieen, weniger günstig sein wird, als ein rechteckiger Querschnitt. Um die einzelnen Querschnitte in Hinsicht dieser mehr oder minder vortheilhaften Wirksamkeit mit einander zu vergleichen, kann man passend ihr Widerstandsmoment  $W = \frac{T}{e} = F \frac{r^2}{e}$  mit dem oben bespro-

chenen idealen Werthe  $F \frac{h}{2}$  vergleichen, welcher einem Querschnitte von demselben Flächeninhalte  $F$  und derselben Höhe  $h$  angehört. Das Verhältniß dieser beiden Größen

$$\eta = \frac{W}{F \frac{h}{2}} = \frac{F r^2}{e F \frac{h}{2}} = 2 \frac{r^2}{e h},$$

oder bei einem symmetrischen Querschnitte, bei welchem  $h = 2e$  ist,

$$\eta = \frac{r^2}{e^2},$$

kann gewissermaßen als das Güteverhältniß der Querschnittsform angesehen werden. Man erhält beispielsweise dieses Verhältniß bei einem rechteckigen Querschnitte von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  zu

$$\eta = \frac{W}{F \frac{h}{2}} = \frac{\frac{1}{6} b h^3}{\frac{1}{2} b h^2} = \frac{1}{3}$$

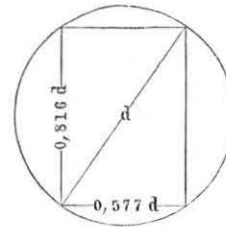
unabhängig von der Breite, während für den kreisförmigen Querschnitt vom Durchmesser  $d$  sich

$$\eta = \frac{\frac{\pi}{32} d^4}{\frac{\pi}{4} d^2 \cdot \frac{d}{2}} = \frac{1}{4},$$

also wie oben schon bemerkt, kleiner als für das Rechteck herausstellt. In der Tabelle des vorigen Paragraphen sind unter  $\eta$  diese Verhältnisse für die verschiedenen Querschnitte angegeben.

Bei den hölzernen Balken kommt nur der rechteckige Querschnitt in Betracht, und da diese Balken aus runden Stämmen geschnitten werden, so ist es von Interesse, zu untersuchen, welches Ver-

Fig. 173.



hältniß man bei diesem Querschnitte der Breite zur Höhe geben muß, um aus einem Rundholze vom Durchmesser  $d$  den widerstandsfähigsten Balken zu erzielen. Setzt man  $b = v h$ , so hat man das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} v h^3,$$

und da nach der Fig. 173

$$d^2 = b^2 + h^2 = (v^2 + 1) h^2,$$

also

$$h = \frac{d}{\sqrt{v^2 + 1}}$$

ist, so erhält man hiermit

$$W = \frac{1}{6} v h^3 = \frac{d^3}{6} \frac{v}{(v^2 + 1)^{3/2}}.$$

Man erhält daher das Maximum von  $W$  durch

$$\frac{\partial W}{\partial v} = 0,$$

d. h.

$$(v^2 + 1)^{3/2} = v^{3/2} (v^2 + 1)^{1/2} 2v,$$

woraus:

$$v^2 = 1/2 \text{ und } v = \sqrt{1/2} = 0,707$$

folgt. Man hat daher:

$$h = \frac{d}{\sqrt{v^2 + 1}} = d \sqrt{2/3} = 0,816 d$$

und

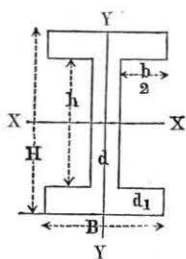
$$b = d \sqrt{1/3} = 0,577 d.$$

Für schmiedeeiserne Träger wählt man nach dem Vorstehenden am vortheilhaftesten die  $\Gamma$  oder  $\sqsubset$  Form, insbesondere findet die erstere in der Praxis sehr häufig Verwendung. Es mögen zunächst nur die aus einem Stücke bestehenden gewalzten Träger in Betracht genommen werden, während die aus Blechplatten und Winkelleisen zusammengesetzten Träger im §. 51 besonders behandelt werden sollen.

Für den nach zwei zu einander senkrechten Azen  $X$  und  $Y$  symmetrischen

Trägerquerschnitt, Fig. 174, ist nach der Tabelle des vorigen Paragraphen

Fig. 174.



und

$$T_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

$$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H},$$

während man für die neutrale Ase Y die Werthe

$$T_y = \frac{HB^3 - h[B^3 - (B - b)^3]}{12}$$

und

$$W_y = \frac{HB^3 - h[B^3 - (B - b)^3]}{6B}$$

hat. Da die Querschnittsfläche  $F = BH - bh$  ist, so erhält man das Güteverhältniß zu

$$\eta_x = \frac{W_x}{F \frac{H}{2}} = \frac{FH^3 - bh^3}{3H^2(BH - bh)}$$

und

$$\eta_y = \frac{W_y}{F \frac{B}{2}} = \frac{HB^3 - h[B^3 - (B - b)^3]}{3B^2(BH - bh)}.$$

Wählt man z. B.  $H = 30$  cm,  $B = 12$  cm,  $h = 27$  cm und  $b = 11$  cm, also  $B - b = d = 1$  cm, und  $\frac{H - h}{2} = d_1 = 1,5$  cm, so erhält man mit diesen Werthen

$$T_x = \frac{12 \cdot 30^3 - 11 \cdot 27^3}{12} = 8957; W_x = \frac{8957}{15} = 597,$$

und

$$T_y = \frac{30 \cdot 12^3 - 27(12^3 - 1^3)}{12} = 434; W_y = \frac{434}{6} = 72,3;$$

und da  $F = 12 \cdot 30 - 11 \cdot 27 = 63$  qcm ist, so folgt:

$$\eta_x = \frac{597}{63 \cdot 15} = 0,632$$

und

$$\eta_y = \frac{72,3}{63 \cdot 6} = 0,191$$

Die geringe Größe von  $\eta_y$  erklärt sich nach dem Vorhergehenden dadurch, daß ein relativ sehr großer Theil des Materials, nämlich die ganze Mittelwand in der Nähe der neutralen Ase angebracht ist, wenn der Balken flach gelegt wird, so daß die neutrale Ase nach Y-Y fällt. Man wird daher eine solche Lage des Balkens für gewöhnlich nicht wählen.

Wenn nun auch aus dem Vorstehenden folgt, daß man bei einer gewissen, durch die Umstände bedingten Höhe  $H$  des Trägers behufs einer möglichst vortheilhaften Ausnutzung des Materials die Stärke  $d$  der Mittelrippe thunlichst verringern und dafür die Breite  $b$  der Flanschen nach Möglichkeit vergrößern müsse, so muß doch bemerkt werden, daß mit Rücksicht auf die Möglichkeit des bequemen Auswalzens sowohl die Minimaldicke der Mittelrippe als auch die Maximalbreite der Flanschen innerhalb gewisser praktischer Grenzen eingeschlossen ist. Man wird etwa annehmen können, daß die Dicke  $d$  der Mittelwand mindestens noch  $\frac{1}{20}$  bis  $\frac{1}{30}$  der Trägerhöhe  $H$  zu betragen habe, wobei die größere Dicke  $\frac{H}{20}$  für niedrige, die kleinere

$\frac{H}{30}$  für höhere Träger angenommen werden mag. Desgleichen wird die Breite  $B$  nur bei niedrigen Trägern etwa gleich der halben Höhe  $\frac{H}{2}$ , bei

größeren Höhen dagegen nicht viel über  $\frac{H}{3}$  anzunehmen sein. Wesentliche Abweichungen von diesen Verhältnissen würden, sofern sie die Herstellung überhaupt noch zulassen, den Preis der Träger pro Gewichtseinheit so bedeutend erhöhen, daß die Construction aus diesem Grunde unvortheilhaft werden würde.

Ferner muß bemerkt werden, daß man sich bei der Feststellung der Trägerprofile aus praktischen Gründen meistens nach den Calibern der in den Walzwerken vorhandenen Walzen richten wird, da die Anfertigung von besonderen Walzen für das gewünschte Profil kostspielig ist und sich nur dann wird ermöglichen lassen, wenn von einem gewissen Profile eine große Menge von Trägern gewalzt wird.

Mit Rücksicht hierauf ist es denn gebräuchlich, daß der Constructeur in jedem Falle unter den ihm zugänglichen Profilformen der Walzwerke dasjenige auswählt, welches dem vorliegenden Zwecke am besten entspricht. Da nun diese vorhandenen Walzeisenprofile von den verschiedenen Walzwerken im Laufe der Zeit und nach Maßgabe der jeweiligen Bedürfnisse hergestellt worden sind, so ist es natürlich, daß der Abstufung der einzelnen Formen meistens ein festes System nicht zu Grunde liegt, und ebenso zeigt die Erfahrung, daß diese so entstandenen Profile sehr häufig mit einer ungünstigen Verwendung des Materials verbunden, d. h. nach dem Vorstehenden, mit

einem kleinen Güteverhältnisse  $\eta$  behaftet sind. Man hat daher in neuerer Zeit mehrfach die Frage der Aufstellung eines geordneten Systems von Normalprofilen angeregt, und in dieser Beziehung müssen insbesondere die Bestrebungen des Verbandes deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine und des Vereins deutscher Ingenieure hervorgehoben werden. Die von diesen Vereinen niedergesetzte Commission hat sich über eine Anzahl von Tabellen geeinigt, welche für die verschiedenen gebräuchlichen Querschnittsformen in regelmäßigen Abstufungen solche Abmessungen angeben, wie sie einer möglichst vorteilhaften Materialverwendung sowohl als einer guten und wohlfeilen Herstellung entsprechen. Diese so entstandenen Profilformen sind unter der Bezeichnung „Normalprofile“ veröffentlicht\*) und zur Zeit von beinahe sämtlichen deutschen Regierungen den betreffenden Baubehörden und Verwaltungen zur thunlichsten Berücksichtigung empfohlen.

Fig. 175.

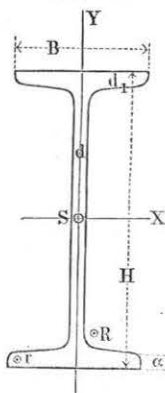
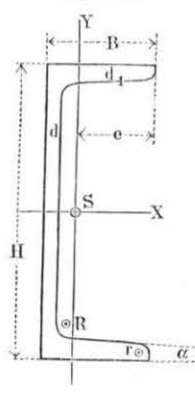


Fig. 176.



$H < 250 \text{ mm}$ :  $B = 0,4 H + 10 \text{ mm}$ ;  $d = 0,03 H + 1,5 \text{ mm}$ ,  
und bei größeren Höhen

$H > 250 \text{ mm}$ :  $B = 0,3 H + 35 \text{ mm}$ ;  $d = 0,036 H$   
angenommen worden ist. Die Halbmesser für die Abrunden sind zu  $R = d$  und  $r = 0,6 d$  gewählt und für den Neigungswinkel  $\alpha$  der inneren Flanschflächen hat man  $\tan \alpha = 0,14$  angenommen. Die unter  $d_1$  angegebene Stärke der Flanschen ist für die Mitte derselben gedacht.

Ebenso ist für die  $\square$  förmigen Querschnitte, Fig. 176,

$$B = 0,25 H + 25 \text{ mm}; R = d_1 \text{ und } r = \frac{d_1}{2}$$

\*) Deutsches Normalprofilbuch für Walzeisen, im Auftrage u. f. w. bearbeitet und herausgegeben von Dr. F. Heinzerling und O. Inge. 1881.

### A. Normalprofile für I-Eisen (Fig. 175).

Für  $H < 250 \text{ mm}$ :  
 $B = 0,4 H + 10 \text{ mm}$ ;  $d = 0,03 H + 1,5 \text{ mm}$   
Für  $H > 250 \text{ mm}$ :  
 $B = 0,3 H + 35 \text{ mm}$ ;  $d = 0,036 H$   
 $R = d$ ;  $r = 0,6 d$

H mm	B mm	d mm	d <sub>1</sub> mm	F qcm	G kg	T <sub>x</sub> cm	W <sub>x</sub> cm	$\eta_x$	T <sub>y</sub> cm	W <sub>y</sub> cm	$\eta_y$	$\frac{W_x}{W_y} = v$
80	42	3,9	5,9	7,61	6,0	78,4	19,6	0,646	7,35	3,5	0,219	5,6
90	46	4,2	6,3	9,05	7,1	118	26,2	0,644	10,4	4,5	0,223	5,8
100	50	4,5	6,8	10,69	8,3	172	34,4	0,642	14,3	5,7	0,213	6,0
120	58	5,1	7,7	14,27	11,1	331	55,1	0,644	25,2	8,7	0,210	6,4
140	66	5,7	8,6	18,35	14,3	579	82,7	0,645	41,3	12,5	0,206	6,6
160	74	6,3	9,5	22,9	17,9	945	118	0,645	64,4	17,4	0,205	6,8
180	82	6,9	10,4	28,0	21,9	1460	162	0,644	95,9	23,4	0,204	7,0
200	90	7,5	11,3	33,7	26,2	2162	216	0,641	138	30,7	0,203	7,2
220	98	8,1	12,2	39,8	31,0	3090	281	0,642	192	39,2	0,201	7,2
240	106	8,7	13,1	46,4	36,2	4288	357	0,642	261	49,3	0,200	7,2
260	113	9,4	14,1	53,7	41,9	5798	446	0,639	341	60,3	0,198	7,4
280	119	10,1	15,2	61,4	47,9	7658	547	0,636	429	72,1	0,197	7,6
300	125	10,8	16,2	69,4	54,1	9888	659	0,633	530	84,8	0,195	7,8
320	131	11,5	17,3	78,2	61,0	12622	789	0,631	652	99,5	0,194	7,9
340	137	12,2	18,3	87,2	68,0	15827	931	0,628	789	115	0,193	8,1
360	143	13,0	19,5	97,5	76,1	19766	1098	0,626	956	134	0,192	8,2
380	149	13,7	20,5	107,5	83,9	24208	1274	0,624	1138	153	0,191	8,3
400	155	14,4	21,6	118,3	92,3	29446	1472	0,622	1349	174	0,189	8,5
425	163	15,3	23,0	133,0	103,7	37266	1754	0,621	1672	205	0,189	8,6
450	170	16,2	24,3	147,7	115,2	46204	2054	0,619	2004	236	0,188	8,7
500	185	18,0	27,0	180,2	140,5	69245	2770	0,614	2871	310	0,186	8,9



## B. Normalprofile für □-Eisen (Fig. 176).

$$B = 0,25 H + 25 \text{ mm}; R = d_1; r = \frac{d_1}{2}$$

H mm	B mm	d mm	d <sub>1</sub> mm	F' qcm	G kg	e cm	T <sub>x</sub> cm	W <sub>x</sub> cm	η <sub>x</sub>	T <sub>y</sub> cm	W <sub>y</sub> cm	i <sub>y</sub>	$\frac{W_x}{W_y} = v$
30	33	5	7	5,42	4,2	1,86	6,5	4,3	0,529	5,2	2,8	0,313	1,54
40	35	5	7	6,20	4,8	2,04	14,2	7,1	0,520	7,3	3,6	0,332	1,97
50	38	5	7	7,12	5,6	2,32	26,7	10,7	0,600	10,0	4,3	0,318	2,50
65	42	5,5	7,5	9,05	7,1	2,66	58,2	17,9	0,609	15,7	5,9	0,305	3,04
80	45	6	8	11,04	8,6	2,93	107	26,7	0,605	21,7	7,4	0,298	3,60
100	50	6	8,5	13,5	10,5	3,31	207	41,4	0,613	33,1	10,0	0,295	4,14
120	55	7	9	17,04	13,3	3,76	368	61,3	0,60	49,2	13,1	0,280	4,69
140	60	7	10	20,4	15,9	4,09	609	87,0	0,620	71,2	17,4	0,285	5,00
160	65	7,5	10,5	24,1	18,8	4,49	932	117	0,607	97,4	21,7	0,277	5,38
180	70	8	11	28,0	21,9	4,90	1364	152	0,605	130	26,6	0,272	5,70
200	75	8,5	11,5	32,3	25,2	5,30	1927	193	0,598	171	32,2	0,266	5,99
220	80	9	12,5	37,6	29,3	5,66	2712	247	0,598	226	39,9	0,264	6,19
260	90	10	14	48,4	37,8	6,42	4857	374	0,594	365	56,9	0,261	6,57
300	100	10	16	58,8	45,9	7,05	8064	538	0,610	564	80,0	0,273	6,72

vorausgesetzt. Unter  $e$  ist hierbei der Abstand des Schwerpunktes  $S$  von den Enden der Flanschen zu verstehen, und es sind in beiden Tabellen mit  $T_x$  und  $W_x$  die Trägheits- und Widerstandsmomente in Bezug auf die Schwerpunktschwerachse  $XX$  bezeichnet, während  $T_y$  und  $W_y$  dieselben Größen in Beziehung zur Schwerpunktschwerachse  $YY$  bedeuten. Endlich ist unter  $G$  das Gewicht der Träger pro 1 m Länge, entsprechend einer Dichte des Stahleisens von 7,8 angegeben. Aus den Tabellen ersieht man, daß das Güteverhältniß für die erste Schwerpunktschwerachse  $XX$  bei den I-Trägern etwa zwischen 0,61 und 0,64 und für □-Eisen zwischen 0,52 und 0,62 schwankt, während diese Größe für die  $YY$ -Achse, also für die flache Lage der Träger nur die geringen Beträge zwischen 0,19 und 0,22, bezw. 0,26 und 0,33 zeigt.

Wenn ein Träger aus Gußeisen hergestellt werden soll, so hat man zu beachten, daß dieses Material gegen Druck eine größere Widerstandsfähigkeit zu äußern vermag, als gegen Zugkräfte. Man wird daher, da die Spannungen der einzelnen Elemente auch hier mit ihren Abständen von der durch den Schwerpunkt gehenden neutralen Achse proportional sind, der concaven oder gedrückten Faser einen im Verhältniß der zulässigen Spannungen größeren Abstand von der neutralen Achse zu geben haben, als der convexen oder gezogenen äußersten Faserschicht. Bezeichnet man mit  $v = \frac{s_d}{s_z}$  dieses

Verhältniß der höchstens zulässigen Spannungen, so ist der Querschnitt nach

Fig. 177.

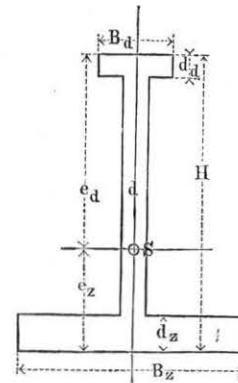


Fig. 177 so anzuordnen, daß die Abstände des Schwerpunktes  $S$  von den äußersten Fasern ebenfalls in diesem Verhältnisse stehen, d. h. daß

$$\frac{e_d}{e_z} = \frac{s_d}{s_z} = v$$

ist. In diesem Falle treten gleichzeitig die größten zulässigen Zug- und Druckspannungen in den betreffenden äußersten Faserschichten ein, und man erzielt in Folge dessen die bestmögliche Ausnutzung des Materials. Wenn dagegen die Schwerpunktslage dieser Bedingung nicht entspricht, so wird bei der Belastung des Balkens entweder die Zugspannung in der convexen Schicht oder die Druckspannung

in der concaven Schicht zuerst den höchstens zulässigen Betrag  $s_z$  bezw.  $s_d$  erreichen, je nachdem das Verhältniß  $\frac{s_z}{e_z}$  oder  $\frac{s_d}{e_d}$  den kleineren Werth hat.

Man hat daher in diesem Falle die Tragfähigkeit des Balkens dadurch zu bestimmen, daß man in der allgemeinen Formel

$$M = s \frac{T}{e}$$

für  $\frac{s}{e}$  den kleineren der beiden Werthe  $\frac{s_z}{e_z}$  und  $\frac{s_d}{e_d}$  der Rechnung zu Grunde legt. Häufig pflegt man das Verhältniß  $v = \frac{s_d}{s_z} = 2$  voranzusetzen (s. Thl. I). Nach Mohr \*) kann man die zulässigen Spannungen für 1 qmm Querschnittsfläche zu

$$s_d = 10 \text{ kg und } s_z = 3\frac{1}{3} \text{ kg,}$$

also  $v = 3$  annehmen, und erhält günstige Verhältnisse des Querschnittes, wenn man, Fig. 177,

$$d = \frac{1}{15} H; d_d = \frac{1}{15} H \text{ und } d_z = \frac{2}{15} H$$

annimmt, für welche Verhältnisse sich

$$H = 1,5 \sqrt[3]{M} \text{ und } F = 0,48 \sqrt[3]{M^2} = 0,21 H^2$$

ermittelt. Was die zulässigen Spannungen  $s$  der verschiedenen Baumaterialien anbelangt, so kann man dafür etwa die in der folgenden kleinen Zusammenstellung angeführten Werthe in Rechnung setzen, wobei es kaum der Bemerkung bedarf, daß unter besonderen günstigen oder ungünstigen Verhältnissen in entsprechendem Maße nach der einen oder anderen Seite hin Abweichungen zulässig sein werden.

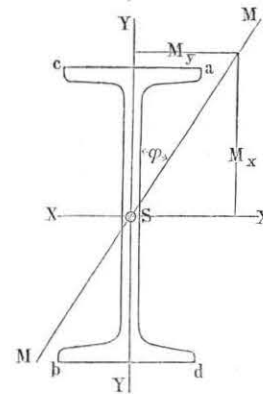
Zulässige Spannungen des Materials in Kilogrammen  
pro 1 qmm Querschnitt.

Material	Zugspannung	Druckspannung	Schubspannung
Schmiedeeisen . . . . .	7,5	7,5	5,25
Blech . . . . .	7,5	7,5	5,25
Draht . . . . .	12	—	—
Gußstahl . . . . .	30	30	22
Guß Eisen . . . . .	2,5	5	1,9
Eichen- und Buchenholz . .	1,2	0,66	—
Nadelholz . . . . .	0,8	0,6	—

\*) S. Technische Mechanik, bearb. u. herausgeg. vom Ingenieur-Verein am Polytechnicum zu Stuttgart.

**Schiefe Belastung.** Die in dem Vorhergehenden zur Anwendung §. 46. gebrachte Formel  $M = s \frac{W}{e}$  beruht auf der stillschweigenden Voraus-

setzung, daß die eine Schwerpunktschwerachse des Querschnittes, etwa die  $Y$  Achse, Fig. 178, in die Ebene der wirkenden Belastungen hineinfällt. Denkt man sich dagegen, daß die Belastungsebene  $MM$  gegen die  $Y$  Achse etwa um den Winkel  $\varphi$  geneigt sei, so kann man das wirkende Moment  $M$  in zwei Componenten



$M_y = M \sin \varphi$  und  $M_x = M \cos \varphi$  zerlegt denken, von denen das Moment  $M_y$  eine Biegung um die  $Y$  Achse und  $M_x$  eine Biegung um die  $X$  Achse anstrebt. In Folge dieser beiden Beanspruchungen werden sich die Spannungen in den äußersten Fasern bzw. zu

$$s_y = \frac{M \sin \varphi}{W_y} \text{ und } s_x = \frac{M \cos \varphi}{W_x}$$

bestimmen. Wie man aus der Figur erkennt, werden diese beiden Spannungen in der Kante  $a$  als Zugspannungen sich zu dem größten Werthe  $s = s_y + s_x$  addiren, und ebenso wird in  $b$  die größte Druckspannung von demselben Betrage sich einstellen, während in den Ecken  $c$  und  $d$  die entgegengesetzt gerichteten Spannungen  $s_y$  und  $s_x$  totale Anstrengungen gleich  $\pm (s_y - s_x)$  hervorrufen. Es ist von Interesse, zu untersuchen, in welchem Falle die am meisten gefährdeten Fasern in  $a$  und  $b$  der größten zulässigen Spannung ausgesetzt sind. Zu dem Ende hat man

$$s = s_y + s_x = \frac{M \sin \varphi}{W_y} + \frac{M \cos \varphi}{W_x}$$

oder, wenn man das Verhältniß  $\frac{W_x}{W_y} = v$ , also  $W_y = \frac{W_x}{v}$  einführt:

$$s = \frac{M}{W_x} (v \sin \varphi + \cos \varphi).$$

Diese Spannung wird zu einem Maximum für  $\frac{\partial s}{\partial \varphi} = 0$ , d. h. für  $v \cos \varphi = \sin \varphi$  oder  $\tan \varphi = v$ , und zwar erhält man mit diesem Werthe von  $\varphi$  die absolut größte Faserspannung in  $a$  oder  $b$ :

$$s_{\max} = \frac{M}{W_x} (\tan \varphi \sin \varphi + \cos \varphi) = \frac{M}{W_x \cos \varphi} = \frac{M}{W_y v \cos \varphi}.$$

Setzt man noch

$$\frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} = \sqrt{1 + v^2},$$

so kann man auch schreiben:

$$s_{\max} = \frac{M}{W_y} \sqrt{1 + \frac{1}{v^2}}.$$

Mit den äußersten Werthen von  $v$  aus der Tabelle A,  $v = 5,6$  und  $8,9$  erhält man

$$\sqrt{1 + \frac{1}{v^2}} = 1,015 \text{ und bezw. } 1,006.$$

Die größte Faserspannung wird daher für diese Träger bei schiefer Belastung nur um 1,5 bzw. 0,6 Proc. größer, als die Faserspannung

$$s = \frac{M}{W_y},$$

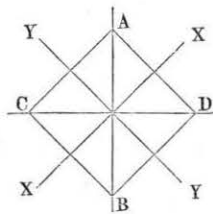
welche durch das Moment  $M$  in dem flach gelegten Träger hervorgerufen wird, d. h. wenn die Belastungsebene die Ase  $XX$  in sich aufnimmt. Man wird diese Vergrößerung der Spannung daher bei den in Tabelle A enthaltenen  $\Gamma$  Trägern vernachlässigen dürfen.

Beträchtlicher stellt sich diese durch schiefe Belastung hervorgerufene Vergrößerung der Kanten Spannung bei einem geringeren Werthe von  $v$  heraus, z. B. erhält man für das erste  $\square$  Eisenprofil der Tabelle B mit  $v = 1,54$ , die größte Kanten Spannung

$$s_{\max} = \frac{M}{W_y} \sqrt{1 + \frac{1}{1,54^2}} = 1,192 \frac{M}{W_y},$$

und zwar stellt sich diese Spannung ein, wenn die Belastungsebene um  $\varphi = \arctan 1,54 = 57^\circ$  von der  $Y$  Ase abweicht. Man hätte daher für eine derartige schiefe Belastung die Dimensionen aus der Formel  $1,192 M = s W_y$  zu bestimmen.

Fig. 179.



Am bedeutendsten wird die Spannungsvergrößerung für  $v = 1$ , d. h. für einen quadratischen Querschnitt, für denselben wird

$$\varphi = 45^\circ$$

und

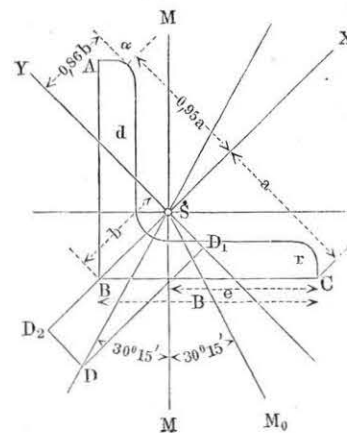
$$s_{\max} = \frac{M}{W} \sqrt{2} = 1,414 \frac{M}{W},$$

d. h. es findet die ungünstigste Belastung bei der in Fig. 179 dargestellten Lage statt, wenn die Belastungsebene mit der Diagonalebene  $AB$  zusammenfällt.

Eine besondere Berücksichtigung verdient die schiefe Belastung bei der Anwendung der Winkelseisen. Ein Auszug aus der für gleichschenkelige Winkelseisen in den Normalprofilen angegebenen Tabelle ist in der folgenden mit C bezeichneten Zusammenstellung gegeben.

Wenn die Winkelseisen gleichschenkelig sind, so halbiert die eine Schwerpunktschwerachse  $XX$  den rechten Winkel  $ABC$ , Fig. 180. Ist daher der eine Schenkel  $BC$  horizontal ge-

Fig. 180.



lagert und wirkt die Belastung in der verticalen Ebene  $MM$ , so zerlegt sich das Moment  $M$  in die beiden gleichen Seitenmomente

$$M \sin 45^\circ = M \cos 45^\circ = 0,707 M.$$

Setzt man die Abrundung der Ecke und der Schenkel so voraus, wie die Normalprofile bestimmen, d. h. nimmt man  $R = d$  und  $r = \frac{R}{2}$ , so findet die größte

Faserspannung bei A nicht in der Kante, sondern etwa in der Mitte der Abrundung in einem Punkte

$\alpha$  statt, welcher von der  $XX$  Ase den Abstand  $0,95 a$  und von der  $YY$  Ase denjenigen  $0,86 b$  hat. Es bestimmt sich daher die größte Faserspannung in diesem Punkte vermöge der beiden Seitenmomente  $0,707 M$  zu

$$s_{\max} = 0,707 \left( \frac{M}{T_x} 0,95 a + \frac{M}{T_y} 0,86 b \right) = 0,707 \left( \frac{0,95 M}{W_x} + \frac{0,86 M}{W_y} \right),$$

oder, wenn wieder  $v = \frac{W_x}{W_y}$  eingeführt wird, zu

$$s_{\max} = 0,707 \frac{M}{W_x} (0,95 + 0,86 v).$$

Für die Ecke B hat man dagegen, da hierfür das um die  $XX$  Ase biegende Moment eine Spannung nicht erzeugt, die Spannung

$$s = 0,707 \frac{M}{W_y} = 0,707 v \frac{M}{W_x}.$$

Nimmt man beispielsweise aus der Tabelle für das Winkelseisen von 80 mm Schenkellänge und 10 mm Stärke den Werth



## C. Normalprofile für gleichschenkelige L-Eisen (Fig. 180).

$d = 0,1 B$  für  $B < 100$  mm;  $R = d$ ;  $r = \frac{d}{2}$ ;  $d = \frac{1}{11} B$  für  $B > 100$  mm;

B mm	d mm	F cm	G kg	e mm	a mm	b mm	T <sub>x</sub> cm	W <sub>x</sub> cm	$\eta_x$	T <sub>y</sub> cm	W <sub>y</sub> cm	$\eta_y$	$\frac{W_x}{W_y} = v$
20	4	1,44	1,12	1,35	1,41	0,92	0,792	0,563	0,277	0,209	0,226	0,223	2,49
25	4	1,84	1,44	1,73	1,77	1,09	1,64	0,926	0,284	0,432	0,397	0,243	2,34
30	6	3,24	2,53	2,02	2,12	1,30	4,01	1,89	0,277	1,05	0,755	0,220	2,50
40	6	4,41	3,46	2,77	2,83	1,74	10,2	3,00	0,289	2,68	1,54	0,247	2,34
50	7	6,51	5,1	3,49	3,54	2,14	23,5	6,64	0,288	6,18	2,89	0,251	2,30
60	8	8,96	7,0	4,21	4,24	2,53	47,2	11,1	0,292	12,4	4,90	0,258	2,26
70	9	11,8	9,2	4,92	4,95	2,94	84,8	17,2	0,295	22,3	7,58	0,259	2,26
80	10	15,0	11,7	5,63	5,66	3,35	141	24,9	0,293	37,1	11,1	0,262	2,24
90	11	18,6	14,5	6,35	6,36	3,75	222	34,9	0,295	58,4	15,6	0,264	2,24
100	12	22,6	17,6	7,06	7,07	4,15	333	47,1	0,295	87,7	21,2	0,265	2,22
120	13	29,5	23,0	8,52	8,48	4,93	634	74,9	0,299	167	33,8	0,270	2,21
150	16	45,4	35,4	10,7	10,6	6,14	1525	144	0,299	401	65,3	0,271	2,20

$$v = \frac{24,9}{11,1} = 2,24$$

an, so erhält man für den Punkt  $\alpha$  die Spannung

$$s_{max} = 0,707 (0,95 + 0,86 \cdot 2,24) \frac{M}{W_x} = 2,03 \frac{M}{W_x},$$

also mehr als doppelt so groß wie diejenige größte Spannung ist, die dasselbe Moment  $M$  hervorrufen würde, wenn es eine Biegung um die  $X$  Ase anstreben, d. h. wenn die Belastung die Richtung der  $Y$  Ase haben würde.

Es ist auch leicht zu ersehen, daß ein Winkelisen, dessen einer Flansch  $BC$  horizontal gelagert ist und welches durch vertical in der Ebene  $MM$  wirkende Belastungen angegriffen wird, eine Durchbiegung in einer von der verticalen abweichenden Richtung annehmen muß. Es läßt sich nämlich die Durchbiegung  $f$  eines Balkens in einem gewissen Punkte nach den in §. 35 angegebenen Formeln allgemein durch

$$f = k \frac{M}{T}$$

ausdrücken. Hierin bedeutet  $k$  eine von der Länge und Unterstützungsart abhängige Constante, z. B. für die Mitte eines auf zwei Punkten frei aufliegenden Balkens von der Länge  $l$ , der in der Mitte durch  $K$  belastet ist, hat man

$$f = \frac{K}{48 TE} l^3 = \frac{l^2}{12 E} \frac{Kl}{4 T} = \frac{l^2}{12 E} \frac{M}{T},$$

also

$$k = \frac{l^2}{12 E}.$$

Demgemäß wird das erwähnte Winkelisen durch die beiden um die  $X$  Ase und  $Y$  Ase biegenden Seitenmomente

$$M \sin 45^\circ = M \cos 45^\circ = 0,707 M$$

zwei Durchbiegungen nach den zu einander senkrechten Richtungen  $SY$  und  $SX$  erleiden, für welche man hat

$$f_x = S D_1 = k \frac{0,707 M}{T_x}$$

und

$$f_y = S D_2 = k \frac{0,707 M}{T_y},$$

so daß die aus  $f_1$  und  $f_2$  resultirende Gesamtbiegung

$$f = S D = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$$

nach einer Richtung  $SD$  erfolgt, die mit der  $Y$  Ase einen Winkel  $\beta$ , also

mit der Verticalen  $MM$  einen Winkel  $\beta = 45^\circ$  einschließt, für welchen man hat:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f_y}{f_x} = \frac{T_x}{T_y}.$$

Bei den der Tabelle C zu Grunde gelegten Verhältnissen ergibt sich für alle Querschnitte fast genau

$$\frac{T_x}{T_y} = 3,8,$$

so daß man

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 3,8 = 75^\circ 15',$$

also die Abweichung der Biegungsebene dieser Winkelisen von der Vertical-ebene zu

$$DSM = \beta - 45^\circ = 30^\circ 15'$$

erhält.

Will man eine vertical gerichtete Durchbiegung des mit einem Schenkel horizontal gelagerten Winkelisens erreichen, so hat man  $f_x = f_y$  zu setzen und erhält, wenn jetzt  $M_x$  und  $M_y$  wieder allgemein die beiden Momente darstellen, welche um die  $X$  Ase und bezw.  $Y$  Ase zu biegen streben:

$$k \frac{M_x}{T_x} = k \frac{M_y}{T_y},$$

d. h.

$$\frac{M_x}{M_y} = \frac{T_x}{T_y},$$

also für die Winkelisen der Tabelle C

$$\frac{M_x}{M_y} = 3,8 = \operatorname{tg} 75^\circ 15'.$$

Betrachtet man die beiden Momente  $M_x$  und  $M_y$  als die Seitenmomente, in welche das Belastungsmoment  $M$  bei rechtwinkliger Zerlegung nach den Hauptaxen zerfällt, so folgt, daß dieses Moment in einer Richtung  $SM_0$  wirksam sein müsse, deren Neigung  $M_0SY = \varphi$  gegen die  $Y$  Ase durch

$$\cotg \varphi = \frac{M_x}{M_y} = 3,8 \text{ zu } \varphi = 14^\circ 45'$$

ausgedrückt ist, oder es muß die Ebene, in welcher das Moment  $M$  wirksam ist, gegen die Verticale um einen Winkel

$$MSM_0 = 45^\circ - \varphi = 30^\circ 15'$$

geneigt sein, wenn das Winkelisen in einer verticalen Ebene sich durchbiegen soll. Denkt man sich daher dieses biegender Moment durch eine Kraft  $K$  in der Ebene  $SM_0$  dargestellt, so ergibt sich, daß in Folge der Abweichung dieser Kraft  $K$  von der Verticalrichtung auf das Winkelisen ein

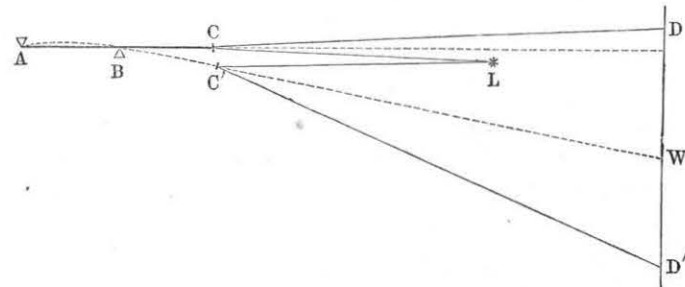
horizontaler Druck  $H$  und ein verticaler Druck  $V$  ausgeübt wird, für welche man hat

$$H = V \operatorname{tg} 30^\circ 15' = 0,58 V.$$

Man kann den Zustand daher auch dadurch kennzeichnen, daß auf das betreffende, durch eine Verticalkraft  $V$  belastete Winkelisen noch ein horizontaler Zwang (etwa durch Führungen u.) von dem Betrage 0,58  $V$  ausgeübt werden muß, wenn die Durchbiegung in verticaler Ebene erfolgen soll.

Die vorstehend angegebenen Resultate sind von D. Inge durch sehr schöne Versuche mit einem sinnreichen Apparate in der Versammlung deutscher Ingenieure zu Stuttgart, 1881, bestätigt worden. Der dazu dienende Apparat bestand im Wesentlichen aus einem bei  $A$  und  $B$ , Fig. 181, unterstützten Winkelisen  $AC$  von 2 m Länge, welches an seinem freien Ende  $C$  durch ein Gewicht  $K$  belastet wurde. Die hierdurch hervorgerufene

Fig. 181.



Biegung des Stabes, welcher dadurch etwa in die punktierte Lage  $ABC'$  gelangt, wurde mit Hilfe eines Spiegels zur Anschauung gebracht, der am freien Ende  $C$  des Stabes normal zu dessen Ase befestigt war, und daher an der Neigungsveränderung theil nahm, welche dem freien Stabende in Folge der Durchbiegung mitgetheilt wurde. Ein bei  $L$  aufgestelltes Drummond'sches Kalklicht wurde von dem Spiegel nach  $D$  und bezw.  $D'$  auf eine 14 m entfernte Wand  $W$  projectirt, und auf diese Weise nicht nur die lineare Durchbiegung in vergrößertem Maßstabe, sondern auch die Abweichung der Biegungsebene von der Belastungsebene zur Anschauung gebracht, wenn der letzteren verschiedene Richtungen gegeben wurden. Hinsichtlich der näheren Erörterung dieser interessanten Versuche, welche gleichzeitig zur Ermittlung des Elasticitätsmoduls des angewandten Materials benutzt wurden, muß auf die angezeigte \*) Quelle verwiesen werden.

\*) Zeitschr. d. Ber. deutsch. Ingenieure, 1881, October.

§. 47. Reducirte Querschnitte. Ist  $abcd$ , Fig. 182, ein beliebiger, hier der Einfachheit halber rechteckig vorausgesetzter Querschnitt eines Balkens von der Breite  $b$  und Höhe  $h = 2e$ , so erzeugt ein in diesem Querschnitte wirksames Biegemoment  $M$  in der äußersten Faserschicht  $ab$  oder  $cd$  eine spezifische Faserspannung  $s$ , welche nach dem Vorstehenden durch

$$s = \frac{M}{W} = \frac{Mc}{T}$$

ausgedrückt ist. Die Spannung in irgend welchem anderen, von der neutralen Axe  $NN$  um  $y$  entfernten horizontalen Streifen  $fg$  ist durch

$s_y = s \frac{y}{e}$  dargestellt, und daher die daselbst durch einen unendlich schmalen

Streifen von der Höhe  $\partial y$  geäußerte Kraft durch  $s_y b \partial y = sb \frac{y}{e} \partial y$  gegeben. Zieht man die Diagonalen  $ac$  und  $bd$  in dem Querschnitte, so ist  $f_1 g_1 = b \frac{y}{e}$ , und also hat man die von dem betrachteten Streifen geäußerte Spannkraft auch gleich  $s \cdot f_1 g_1 \cdot \partial y$ , d. h. gleich der Kraft, welche ein Streifen von der Breite  $f_1 g_1$  und der Höhe  $\partial y$  äußern würde, der gleichmäßig über seine Fläche der Spannung  $s$  der äußersten Faser ausgesetzt wäre. Da dies für jeden beliebigen positiven oder negativen Abstand  $y$  gilt, so ersieht man hieraus, daß man die Wirkungen der ganzen Querschnittsfläche  $abcd$  ersetzt denken kann durch diejenigen der mit der Spannung  $s$  gleichmäßig behafteten, in der Figur schraffirten Fläche  $abmde$ , und zwar derart, daß die von der oberhalb der neutralen Axe gelegenen Fläche  $dcm$  geäußerte Spannung derjenigen entgegengesetzt ist, welche von der unterhalb der neutralen Axe gelegenen Fläche  $abm$  ausgeübt wird. Ist  $\mu = m_1 m_2$  der Abstand der Schwerpunkte  $m_1$  und  $m_2$  dieser beiden Flächenstücke und  $f$  der Inhalt eines jeden derselben, so hat man das Moment des durch die beiden gedachten Spannkraften gebildeten Kräftepaares gleich

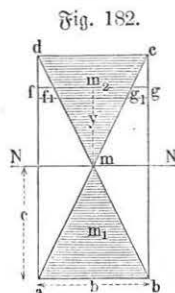
$$\mu fs = W = M.$$

Wenn der Balkenquerschnitt, wie hier vorausgesetzt, ein Rechteck ist, hat man

$$\mu = 2 \frac{2}{3} \frac{h}{2} = \frac{2}{3} h$$

und

$$f = \frac{1}{2} b \frac{h}{2} = \frac{bh}{4},$$

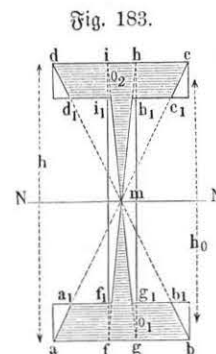


folglich das gedachte Moment

$$\frac{2}{3} h \frac{bh}{4} s = \frac{bh^2}{6} s,$$

entsprechend dem Widerstandsmomente des rechteckigen Querschnittes  $W = \frac{bh^2}{6}$  (f. §. 45).

Die so erhaltene Fläche  $abmde$  nennt man die reducirt Fläche des Querschnittes, und es ist leicht ersichtlich, wie man für jede beliebige andere Form des Balkenquerschnittes zu der reducirten Fläche desselben einfach dadurch gelangt, daß man die horizontale Breite an jeder um  $y$  von der neutralen Axe entfernten Querschicht in dem Verhältnisse  $\frac{y}{e}$  verringert, unter



$e$  den Abstand derjenigen äußersten Faser von der neutralen Axe verstanden, für welche die spezifische Spannung gleich  $s$  angenommen ist. Hieraus ergibt sich z. B. für den symmetrischen I förmigen Querschnitt  $abcd$ , Fig. 183, die reducirt Querschnittsfläche, wenn man durch die Mitte  $m$  sowohl die Diagonalen  $ac$  und  $bd$  sowie auch diejenigen  $fh$  und  $gi$  zieht, indem dann  $abb_1a_1$  und  $cd d_1 c_1$  den beiden Flanschen zugehören, während  $f_1 g_1 m h_1 i_1$  für die Mittelrippe gilt.

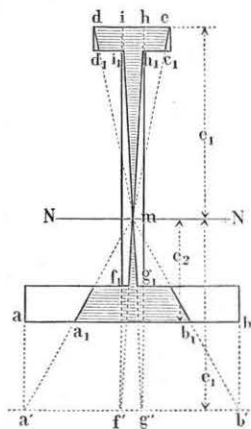
Ist der I förmige Querschnitt, wie dies bei gußeisernen Balken zu sein pflegt, unsymmetrisch, Fig. 184 und 185 (a. f. S.), derart, daß die Abstände der äußersten Fasern  $e_1$  und  $e_2$  sind, und daher die Spannungen daselbst  $s_1$  und  $s_2$  in dem Verhältnisse  $\frac{s_1}{s_2} = \frac{e_1}{e_2}$  stehen, so kann man die Reduction der Querschnittsfläche ebensowohl auf die Faserspannung  $s_1$  wie auf diejenige  $s_2$  vornehmen. Im ersteren Falle macht man  $a'b' = ab$  im Abstände  $e_1$  von  $NN$ , Fig. 184, und zieht von  $m$  nach  $a'$ ,  $b'$ ,  $f'$  und  $g'$  gerade Linien, während man, wenn der Reduction die Spannung  $s_2$  in  $ab$ , Fig. 185, zu Grunde gelegt werden soll,  $d'c' = dc$  im Abstände  $e_2$  von  $NN$  zu machen, und von  $m$  durch  $d'$ ,  $c'$ ,  $h'$  und  $i'$  zu ziehen hat. Die reducirten Flächen sind in beiden Figuren durch Schraffirung hervorgehoben.

Aus diesen Figuren ersieht man, daß bei Balken mit I förmigen Querschnitten, wie Fig. 183, die mittlere Wand viel weniger ausgenutzt wird, als die von der neutralen Axe entfernteren Flanschen. Es wird daher vortheilhaft sein, das zur Ausführung des Trägers zu verwendende Material



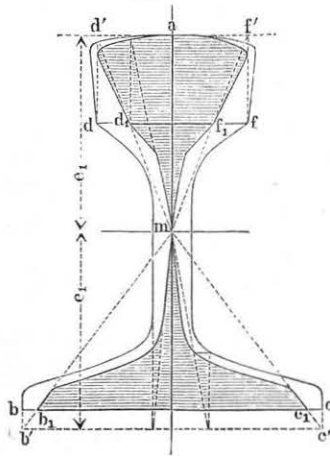
möglichst an den günstigeren Stellen, d. h. zur Bildung der Flanschen anzubringen, und der Mittelwand nur die durchaus erforderliche Dicke  $d$  zu geben. In welcher Weise diese Dicke zu bestimmen ist, wird sich aus den folgenden Paragraphen ergeben.

Fig. 184.



Wenn die Stärke  $d$  der Mittelwand nur gering ist, wie dies z. B. bei den später näher zu betrachtenden Blechträgern der Fall ist, so kann man annähernd genug den Theil  $f_1 g_1 m h_1 i_1$  der reducirten Querschnittsfläche

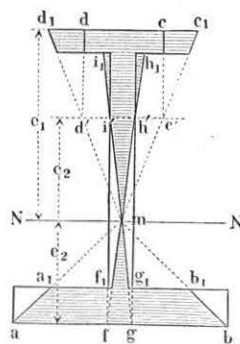
Fig. 186.



als klein vernachlässigen und für den Fall, daß auch die Dicke  $d_1$  der Flanschen nur unbedeutend ist im Vergleich zur Höhe  $h$  des Querschnittes, darf man den Querschnitt  $b d_1$  eines Flanschen für die reducirten Querschnittsflächen  $a b b_1 a_1$  bzw.  $c d d_1 c_1$ , Fig. 183, setzen. Jeder dieser Flanschen äußert demnach eine Spannkraft gleich  $s b d_1$ , und da man diese Kräfte in den Mitten der Flanschen, also im Abstände  $h_0 = h - d_1$  von einander annehmen darf, so erhält man das Widerstandsmoment für einen solchen Querschnitt zu

$$W = s b d_1 h_0.$$

Fig. 185.



Für Blech- und Fachwerksträger (s. unten) kann man in den meisten Fällen von dieser angenäherten Formel Gebrauch machen.

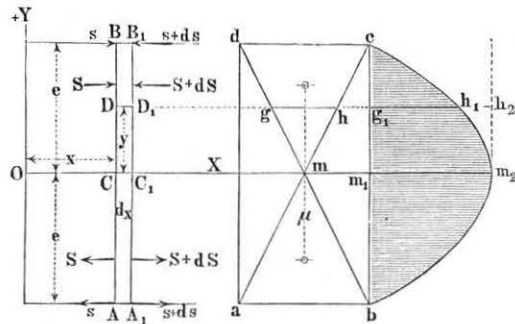
Aus dem Angeführten ergibt sich auch leicht die Construction, welche dazu dienen kann, für irgend welchen beliebigen Querschnitt, z. B. den einer Eisenbahnschiene  $a b c$ , Fig. 186, die reducirte Fläche  $a d_1 m b_1 c_1 f_1$  zu bestimmen. Man hat dazu nur nöthig, eine genügende Anzahl von Breiten, wie z. B.  $d f$  in dem Verhältnisse  $\frac{y}{c_1}$  zu reduciren, indem man  $d f$  auf die Horizontale durch  $a$  gleich  $d' f'$  projectirt und die Geraden  $m d'$  und  $m f'$  zieht, welche die zugehörige reducirte Breite  $d_1 f_1$  zwischen sich einschließen. Ebenso macht man wieder  $b' c' = b c$  im Abstände  $e_1$  von der neutralen Ase und zieht von  $m$  nach  $b'$  und  $c'$ , um  $b_1 c_1$  zu erhalten u. s. f.

**Horizontale und verticale Schubspannungen.** Bisher wurden §. 48. ausschließlich die Wirkungen der biegenden Momente  $M$  auf die Balken betrachtet, wodurch in den einzelnen Elementen irgend eines Querschnittes gewisse auf dieser Querschnittsebene normale Zug- und Druckspannungen  $s$  erzeugt werden, als deren Resultat ein Kräftepaar auftritt, welches mit dem biegenden Momente im Gleichgewichte ist. Nun wirkt aber in jedem Balkenquerschnitte auch eine gewisse verticale Scherkraft  $V$ , deren Ermittlung für die verschiedenen Belastungsfälle der Balken im Vorhergehenden gezeigt wurde. Diese Vertikalkraft  $V$  ist bestrebt, den Balken in dem betreffenden Querschnitte in zwei Theile zu trennen, derart, daß sie das eine Stück an dem anderen entlang der Querschnittsebene vertical zu verschieben trachtet. Einer solchen Trennung widersteht das Material vermöge seiner Cohäsion, und zwar dadurch, daß in den einzelnen Elementen des besagten Querschnittes verticale, also in die Querschnittsebene hineinfallende Reactionen rege werden, welche für jedes der beiden Balkenstücke solche Richtung haben, daß sie der auf dieses Balkenstück einwirkenden Vertikalkraft  $V$  das Gleichgewicht halten. Die so in dem Querschnitte auf das diesseits desselben gelegene Balkenstück ausgeübten Reactionen sind daher denjenigen genau gleich und entgegengerichtet, welche in denselben Punkten auf das jenseits des Querschnittes befindliche Balkenstück wirken, so daß in jedem Querschnitte diese tangentialen Spannungen als innere Kräfte sich ebenso gegenseitig aufheben, wie dies auch für die auf beide Seiten des Querschnittes wirkenden normalen Zug- und Druckspannungen  $s$  gilt. Man nennt diese, in die Schnittfläche hineinfallenden tangentialen Kräfte die Schubspannungen, und es sollen dieselben fernerhin, bezogen auf die Flächeneinheit (1 qmm), mit  $\sigma$  bezeichnet werden, zum Unterschiede von den normalen Schub- und Druckspannungen  $s$ . Ebenso soll, dem Früheren entsprechend, eine Schubkraft positiv heißen, wenn sie die Richtung der vertical aufwärts gedachten

positiven  $Y$  Axe hat, und umgekehrt. Die  $X$  Axe soll hier wie früher vom Anfangspunkte nach rechts gerichtet positiv genannt werden.

Wie sich aus dem Folgenden ergeben wird, stellen sich nicht nur die zum Gleichgewichte mit  $V$  erforderlichen verticalen Schubkräfte in den Querschnittsflächen ein, sondern auch in horizontalen sowie in schräg geneigten Schnitten des Balkens treten Schubkräfte auf, so daß man in irgend welchem Punkte im Innern eines Balkens Schubspannungen nach allen möglichen Richtungen parallel mit der Belastungsebene des Balkens anzunehmen hat. Senkrecht zu dieser Belastungsebene kommen keinerlei Spannungen vor, wenn, wie hier immer stillschweigend geschehen soll, in diese Belastungsebene

Fig. 187.



Schwerpunktschubspannungen der Querschnitte hineinfallen. Es sollen im Folgenden speciell die verticalen Schubspannungen mit  $\sigma_v$  bezeichnet werden, während der Buchstabe  $\sigma_h$  für die horizontalen, also die mit der geraden Balkenaxe parallelen Schubspannungen gewählt werden mag. Zur Ermittlung der einzelnen Schubspannungen kann folgende Betrachtung dienen.

In dem Querschnitte  $AB$  eines Balkens, Fig. 187, im Abstände  $x$  vom Anfangspunkte, für welchen die reducirte Querschnittsfläche durch  $abmc$  gegeben sein mag, findet, unter  $M$  das Biegemoment für den Querschnitt  $AB$  verstanden, in den äußersten Fasern bei  $A$  und  $B$  die Spannung

$$s = \frac{M}{W} \quad (1)$$

statt, wenn  $W = \frac{T}{e}$  das Widerstandsmoment des Querschnittes ist. Wenn ferner  $f$  die reducirte Fläche  $abm = cdm$  zu jeder Seite der neutralen Axe ist, so kann man nach dem vorigen Paragraphen die ganze auf eine Hälfte des Querschnittes zu jeder Seite der neutralen Axe wirkende normale Spannkraft

$$S = fs = \frac{f}{W} M \quad (2)$$

setzen.

Dieselben Gleichungen gelten für den um  $\partial x$  entfernten Querschnitt  $A_1 B_1$ , für welchen  $f$  und  $W$  dieselben Werthe haben, für welchen jedoch das von  $x$  abhängige Moment der biegenden Kräfte durch  $M + \partial M$  ausgedrückt ist. Also hat man für diesen Querschnitt  $A_1 B_1$ :

$$s + \partial s = \frac{M + \partial M}{W} \quad (3)$$

und

$$S + \partial S = f(s + \partial s) = \frac{f}{W} (M + \partial M) \quad (4)$$

Aus (4) und (2) erhält man durch Subtraction den Ueberschuß der auf den Querschnitt  $A_1 B_1$  zu jeder Seite der neutralen Axe wirkenden Zug- oder Druckspannung:

$$\partial S = f \partial s = \frac{f}{W} \partial M \quad (5)$$

Dieser Ueberschuß  $\partial S$  strebt die obere Hälfte  $CB_1$  des betrachteten unendlich kleinen Balkenstückes von der Länge  $\partial x$  auf der neutralen Faser schiebt  $C_1 C$  von rechts nach links zu verschieben, und es muß, damit diese Verschiebung nicht eintrete, der untere Balkentheil in der Berührungsfläche  $CC_1$  eine gleiche, von links nach rechts gerichtete Reaction auf den oberen Balkentheil ausüben, d. h. es müssen in  $CC_1$  Schubspannungen erregt werden, welche auf den oberen Balkentheil von  $C$  nach  $C_1$  gerichtet sind. Selbstredend gilt die gleiche Betrachtung in Hinsicht auf eine Verschiebung des unteren Balkentheiles, dessen von links nach rechts angestrebte Verschiebung durch eine von dem oberen Balkentheile geäußerte Schubspannung im Sinne von  $C_1$  nach  $C$  und im Betrage  $\partial S$  verhindert werden muß. Hieraus geht hervor, daß in der horizontalen Fläche  $CC_1$  eine Schubkraft im Betrage  $\partial S$  erregt wird. Die Größe dieser Anhaftungsfläche  $CC_1$  ist bei einer Breite des Balkens  $= b$  durch  $b \partial x$  gegeben, und daher hat man, wenn  $\sigma$  die Spannung in  $CC_1$  pro Flächeneinheit bezeichnet, den ganzen Betrag der Schubkraft gleich  $\sigma b \partial x$  zu setzen, woraus

$$\partial S = \sigma b \partial x \quad (6)$$

folgt. Aus (5) und (6) ergibt sich nun einfach

$$\sigma b \partial x = \frac{f}{W} \partial M,$$

und da bekanntlich

$$\frac{\partial M}{\partial x} = V \text{ und } W = \mu f$$

ist, so erhält man

$$\sigma b = \frac{f}{W} V = \frac{V}{\mu} \quad \dots \quad (7)$$

In dieser Formel bedeutet  $\sigma b$  die Schubspannung für eine Längeneinheit in der Richtung der Aze, und man ersieht daraus, daß diese Spannung, also auch die spezifische Schubspannung  $\sigma$  in der neutralen Aze des Balkens proportional mit der verticalen Scheerkraft  $V$ , proportional mit der Größe der reducirten Querschnittsfläche  $f$ , und umgekehrt proportional mit dem Widerstandsmomente  $W = \frac{T}{c}$  des Querschnittes ist.

Beispielsweise hat man für den rechteckigen Querschnitt von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$

$$f = \frac{1}{2} b \frac{h}{2} = \frac{bh}{4} \text{ und } W = \frac{bh^3}{6},$$

daher ist für denselben die Schubkraft in der neutralen Aze pro Längeneinheit des Balkens

$$\sigma b = \frac{f}{W} V = \frac{3}{2h} V.$$

Es ist leicht ersichtlich, daß die horizontale Schubkraft  $\sigma_y$  in einem Längenschnitte  $DD_1$ , welcher nach der einen oder anderen Seite von der neutralen Aze um  $CD = y$  entfernt ist, durch dieselbe Formel (7) ausgedrückt ist, wenn man nur darin unter  $f$  den Querschnitt desjenigen Stückes  $ghcd$  der reducirten Fläche versteht, welcher auf der einen Seite des betreffenden Längenschnittes gelegen ist. Wenn man nämlich für diesen Längenschnitt dieselbe Betrachtung anstellt, wie hier für den Schnitt  $CC_1$  in der neutralen Aze geschehen, so findet sich, daß der einzige Unterschied darin besteht, daß nunmehr die Spannkraft  $S$  des einerseits der Schnittfläche gelegenen Theiles, gleichviel ob  $DB$  oder  $DA$ , durch  $S = s.dcg h$  ausgedrückt ist. Man kann daher den Ausdruck (7) ganz allgemein für die horizontale Schubspannung in irgend welchem Längenschnitte anwenden, wenn man unter  $f$  denjenigen Theil der algebraisch gedachten reducirten Querschnittsfläche versteht, welcher einerseits von dem Längenschnitte gelegen ist.

Aus (7) ergibt sich daher, daß die horizontale Schubkraft zu Null wird nicht nur für alle Punkte desjenigen Querschnittes, in welchem  $V = 0$ , also  $M$  ein Maximum ist, sondern auch für die äußersten Punkte aller Querschnitte, weil für dieselben  $f$ , in dem gedachten Sinne genommen, verschwindet.

Man erhält ein anschauliches Bild von der Vertheilung der horizontalen Schubkräfte, wenn man in der Figur senkrecht zu  $bc$  in allen Punkten

Ordinaten aufgetragen denkt, welche nach einem beliebig gewählten Maßstabe die horizontalen Schubspannungen darstellen, die in der Höhe dieser Punkte auftreten. Dadurch erhält man als Begrenzung der in der Figur schraffirten Fläche eine Curve  $cm_2b$ , welche für den rechteckigen Querschnitt eine Parabel mit dem Scheitel in  $m_2$  ist. Hiervon überzeugt man sich leicht dadurch, daß, wenn  $m_1 m_2$  die Schubkraft in  $m$  und  $g_1 h_1$  diejenige in  $gh$  darstellt, man nach (7)

$$m_1 m_2 : g_1 h_1 = dcm : dchg,$$

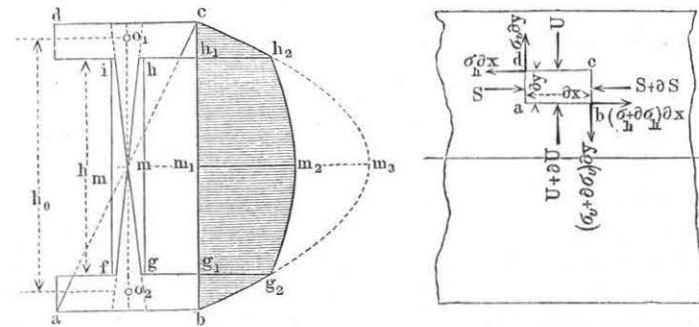
also

$$m_1 m_2 : h_1 h_2 = dcm : ghm = c^2 : y^2$$

hat. Ganz in derselben Weise erkennt man, daß das Diagramm der Schubspannungen für einen I förmigen Querschnitt  $abcd$ , Fig. 188, sich aus

Fig. 188.

Fig. 189.



den beiden Parabeln  $bm_2c$  und  $g_2 m_2 h_2$  zusammensetzt, welche den Rechtecken  $abcd$  und bezw.  $fghi$  entsprechen. Man ersieht auch, daß der mittlere Parabelbogen  $g_2 m_2 h_2$  um so flacher ausfällt, je dünner die Mittelwand  $gh$  ist, so daß man bei den Blechträgern mit genügender Genauigkeit die Schubkraft für alle Punkte der Mittelwand gleich dem größten Werthe  $m_1 m_2$  in der neutralen Aze annehmen darf.

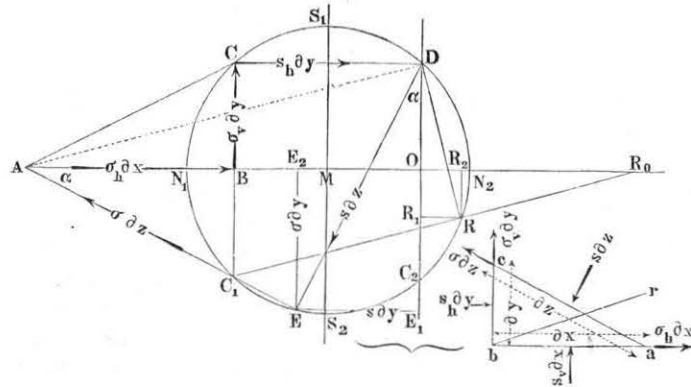
Denkt man sich, Fig. 189, im Innern eines Balkens an beliebiger Stelle ein unendlich kleines Parallelepiped von der Grundfläche  $abcd$  mit der horizontalen Seite  $dx$  und der verticalen Höhe  $dy$  und von der Länge senkrecht zur Bildebene gleich Eins, so muß dasselbe unter dem Einflusse sämtlicher auf dasselbe wirkenden Kräfte im Gleichgewichte stehen. Diese Kräfte sind zunächst die auf die vier Seitenflächen wirkenden Normalkräfte und die in diesen vier Flächen thätigen horizontalen und verticalen Schubkräfte. Die Normalkräfte  $S$  und  $S + dS$  auf die Flächen  $ad$  und  $bc$  heben sich gegenseitig auf, da sie nur um die gegen  $S$  verschwindend kleine Größe  $dS$





bekannt; dieselbe hängt von der Art ab, in welcher die verticale Belastung an dem Trägerquerschnitte angreift, und man kann in den gewöhnlichen Fällen eine solche Anordnung voraussetzen, vermöge deren die Spannung  $s_v$  auf  $ab$  zu Null wird. Wenn diese Annahme\*) gemacht wird, so ist die Aufgabe, aus den drei bekannten Kräften  $s \partial y$ ,  $\sigma_h \partial x$  und  $\sigma_v \partial y$  die Spannungen  $s$  und  $\sigma$ , oder die totalen Kräfte  $s \partial z$  und  $\sigma \partial z$  zu ermitteln, einfach auf die Verzeichnung des betreffenden Kräftepolygons zurückgeführt.

Fig. 190.



Trägt man nämlich in  $ABCD$  die drei Kräfte  $\sigma_h \partial x$ ,  $\sigma_v \partial y$  und  $s_h \partial y$  ihrer Richtung und Größe nach an einander an, so erhält man in der Schlußlinie  $DA$  die Resultirende aus den beiden die Fläche  $ac$  angreifenden Kräften  $\sigma \partial z$  und  $s \partial z$ , und diese Kräfte selbst, wenn man durch  $A$  eine Parallele  $AE$  mit  $ac$  und durch  $D$  eine zu  $AE$  senkrechte Gerade zieht. Dann ist nach dem gewählten Kräftemaßstabe

$$DE = s \partial z \text{ und } EA = \sigma \partial z.$$

Projicirt man den Punkt  $E$  auf  $AB$  und auf die Verticale  $DO$  durch  $D$  nach  $E_2$  und  $E_1$ , so ist leicht zu erkennen, daß

\*) Diese Voraussetzung trifft, wie eine nähere, hier nicht weiter durchzuführende Untersuchung ergibt, dann zu, wenn die Belastung den Querschnitt in einer solchen Weise angreift, daß die Vertheilung nach demselben Gesetze erfolgt, welches vorstehend für die Vertheilung der verticalen Schubkraft auf die Querschnittsfläche gefunden wurde. Danach würde bei Blechträgern annähernd eine gleichmäßig auf die Mittelwand vertheilte Uebertragung stattfinden müssen, wie sie der wirklichen Ausführung auch meistens entspricht. S. Ritter, Lehrb. der Ingenieurmechanik.

$$EE_2 = \sigma \partial z \cdot \sin \alpha = \sigma \partial y$$

und

$$EE_1 = s \partial z \cdot \sin \alpha = s \partial y$$

ist. Verbindet man jetzt  $A$  mit  $C$ , so hat man auch  $CAB = \alpha$ , denn für diesen Winkel ist wegen der Gleichheit von  $\sigma_h$  und  $\sigma_v$ :

$$\operatorname{tg} CAB = \frac{\sigma_v \partial y}{\sigma_h \partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Verlängert man daher  $CB$  bis zum Durchschnitte  $C_1$  mit  $AE$ , so ist auch  $BC = BC_1$ . Die drei Punkte  $D$ ,  $C$  und  $C_1$  liegen daher auf einem Kreise, für welchen wegen des rechten Winkels bei  $C$  die Gerade  $DC_1$  ein Durchmesser ist, und welcher Kreis wegen des rechten Winkels bei  $E$  auch diesen Punkt  $E$  in sich aufnimmt. Man muß bemerken, daß dieser Kreis von der Neigung  $\alpha$  der Fläche  $ac$  ganz unabhängig ist, und jederzeit für den Punkt  $b$  construirt werden kann, indem man, wenn  $\partial y$  gleich der Längeneinheit vorausgesetzt wird,  $BC = BC_1$  gleich der horizontalen Schubspannung  $\sigma_h$  und  $CD$  gleich der horizontalen Zug- oder Druckspannung  $s_h$  nach einem beliebigen Kräftemaßstabe anträgt. Unter dieser Voraussetzung,  $\partial y$  gleich Eins, erhält man alsdann nach eben diesem Maßstabe in  $EE_1$  die spezifische Normalspannung  $s$  und in  $EE_2$  die spezifische Schubspannung  $\sigma$  für diejenige ebene Schnittfläche, welche parallel mit  $EC_1$  durch den betrachteten Punkt  $b$  hindurchgelegt gedacht wird.

Der Kreis durch  $D$ ,  $C$  und  $C_1$  zum Mittelpunkte  $M$  giebt daher ohne Weiteres die Normal- und Schubspannung jeder beliebigen durch das Element  $b$  gelegten Schnittfläche in den Ordinaten, welche in Bezug auf die Axen  $OA$  und  $OD$  demjenigen Punkte  $E$  entsprechen, in welchem der Kreisumfang durch eine Parallele mit der betreffenden Schnittfläche getroffen wird, die man durch den Punkt  $C_1$  führt. Will man z. B. für eine durch das Element  $bc$ , oder was damit gleichbedeutend ist, durch den Punkt  $b$  gelegte Schnittfläche  $br$  die Spannungen finden, so legt man durch  $C_1$  eine mit  $br$  parallele Gerade, welche den Kreis in  $R$  schneidet, und erhält in den Ordinaten  $RR_1 = s_r$  und  $RR_2 = \sigma_r$  die spezifischen Spannungen für die Schnittfläche  $br$ . Man erkennt auch, daß die Normalspannung  $RR_1$  dieser Schnittfläche und diejenige  $EE_1$  der Fläche  $ac$  auf entgegengesetzten Seiten der Axe  $DO$  gelegen sind, wodurch ein entgegengesetzter Sinn der Spannungen angedeutet ist. Während nämlich die Normalspannung auf die Fläche  $ac$  eine in das Prisma  $abc$  hinein gerichtete, durch  $DE$  angezeigte Pressung ist, wird die Fläche  $br$  durch eine von dem Prisma  $abc$  fort gerichtete, durch  $DR$  angegebene Zugspannung angegriffen. In welcher Richtung eine Spannung überhaupt wirkt, davon kann man in





gung der Horizontalen  $C_1 C_2$  in dem einen oder anderen Sinne rückt der Durchschnitt dieser Geraden mit der Axe  $N_1 N_2$  auf der linken oder rechten Seite aus der Unendlichkeit in endliche Entfernung heran, dadurch andeutend, daß die resultirende Wirkung auf diese Schnittfläche von  $D$  aus nach links oder nach rechts hin gerichtet ist.

Eine zweite Schnittfläche, für welche ebenfalls die Normalspannung  $s$  zu Null wird, erhält man in der Richtung des Durchmessers  $C_1 D$ , und es bilden daher, wie schon bemerkt, die Flächen  $C_1 D$  und  $C_1 C_2$  die Grenzen für die positiven und negativen Werthe von  $s$ , indem für jede in den Winkel  $DC_1 C_2$  fallende Richtung  $s$  eine Zugspannung, für jede in den Nebenwinkel  $DC_1 F$  fallende  $s$  eine Druckspannung bedeutet.

Wenn man für irgend eine Fläche, z. B.  $C_1 G$ , deren normale Spannung  $s = G G_1$  mit ihrer Schubspannung  $\sigma = G G_2$  zu einer Mittelfraft zusammensetzt, so erhält man in dem von  $O$  aus nach dem Schnittpunkte  $G$  gezogenen Radiusvector  $OG$  die totale Anstrengung  $t$  der Fläche pro Flächeneinheit. Es ist nun aus der Figur ersichtlich, daß dieser Radius seinen größten Werth in  $ON_1$  übereinstimmend mit  $s_{max}$  erreicht, man wird daher bei der Bestimmung der Querschnittsdimensionen diese größte Normalspannung zu Grunde zu legen haben, welche nach (1) und (2) für jeden Punkt allgemein durch

$$s_{max} = -\frac{s}{2} \pm \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \dots \dots \dots (4)$$

ausgedrückt werden kann. Hierin bedeutet  $s$  die Zug- oder Druckspannung und  $\sigma$  die Schubspannung des betreffenden Punktes, welche beide jederzeit leicht aus  $M$  und  $V$  ermittelt werden können. Von den beiden durch (4) gelieferten Werthen hat man den absolut größeren der Querschnittsbestimmung zu Grunde zu legen, indem man diesen Werth gleich dem für das Material höchstens zulässigen Spannungscoefficienten setzt.

Es kann bemerkt werden, daß dieser größte Werth der Spannung normal zu der Fläche gerichtet ist, da die Schubspannungen für die Richtungen  $CN_1$  und  $CN_2$  gleich Null sind.

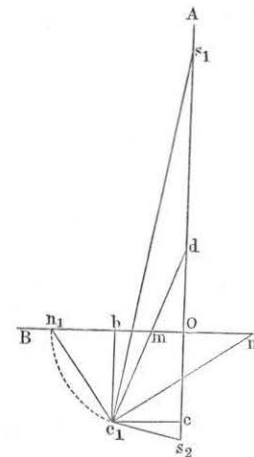
Man erhält von der Art, wie die Spannungen im Innern eines Balkens wirken, eine anschauliche Darstellung durch die Verzeichnung der sogenannten Spannungstrajektorien, das sind Linien, welche die Richtungen derjenigen Flächen in jedem Punkte angeben, die den größten Werthen der Spannungen ausgesetzt sind. Denkt man sich, um eine solche durch irgend einen Punkt  $a$  in dem Querschnitte  $f$  eines Balkens gehende Linie zu zeichnen, für diesen Punkt die Richtung der Fläche, in welcher  $s$  ein Maximum wird, nach Anweisung der Fig. 191 gefunden, und bestimmt man in derselben Art für denjenigen Punkt  $a_1$ , in welchem die gefundene Richtung

einen benachbarten Querschnitt  $f_1$  trifft, wiederum die Richtung der Fläche für  $s_{max}$ , und fährt so fort, so erhält man ein Polygon  $aa_1 \dots$ , welches bei sehr geringen Abständen der Querschnittsflächen  $ff_1$  in eine Curve, die gesuchte Spannungstrajectorie für  $s_{max}$  übergeht. In den zur Richtung der Fläche für  $s_{max}$  Senkrechten ist auch nach dem Vorigen die Richtung der Flächen für  $s_{min}$  gefunden, während die Winkelhalbirenden zugleich die Richtungen der Schubkraftmaxima ergeben.

Zur Bestimmung dieser Richtungen für irgend einen Punkt ist es nach Fig. 191 erforderlich, die in diesem Punkte zur Wirkung kommende horizontale Zug- oder Druckspannung  $s$  und die Schubkraft  $\sigma$  zu kennen, in welchem Falle die folgende einfache Construction zum Ziele führt, deren Richtigkeit aus dem Vorhergehenden sich leicht ergibt.

Man trägt auf einem rechtwinkligen Axenkreuze  $AOB$ , Fig. 192, auf der verticalen Axe  $OA$  nach beiden Seiten  $Od = Oc = \sigma$ , und horizontal  $Ob = s$  an, und verbindet  $d$

Fig. 192.



mit dem durch die Ordinaten  $Ob$  und  $Oc$  gegebenen Punkte  $c_1$ , um im Durchschnittspunkte  $m$  den Mittelpunkt des in Betracht kommenden Kreises vom Halbmesser  $mc_1$  zu finden. Es ist nicht nöthig, diesen Kreis selbst zu zeichnen, sondern es genügt,  $mn_1 = mc_1$  zu machen, um in  $c_1 n_1$  die Flächenneigung für  $-s_{max}$ , und in der dazu Senkrechten  $c_1 n_2$  diejenige für  $+s_{max}$  sowie in den Winkelhalbirenden  $c_1 s_1$  und  $c_1 s_2$  die Richtungen der größten Schubspannungen  $\sigma_{max}$  zu erhalten. Hierbei ist es nicht nöthig, die Spannungen  $s$  und  $\sigma$  für jeden Punkt immer von Neuem zu berechnen, vielmehr genügt es, diese

Größen nur für einen Punkt zu bestimmen, indem man sich dann mit Vortheil für die übrigen Punkte des Diagramms für die Momente  $M$  und die verticalen Scheerkräfte  $V$  bedienen kann, wie an einem Beispiele hier gezeigt werden mag.

Es sei  $AB$ , Fig. 193 (a. f. S.), ein bei  $A$  und  $B$  frei aufliegender, gleichmäßig über seine Länge  $l$  mit dem Gewichte  $q l$  belasteter Balken von rechteckigem Querschnitte mit der Höhe  $h$  und Breite  $b$ , so findet man die größte Zug- oder Druckspannung in der Mitte  $CC_1$  zu

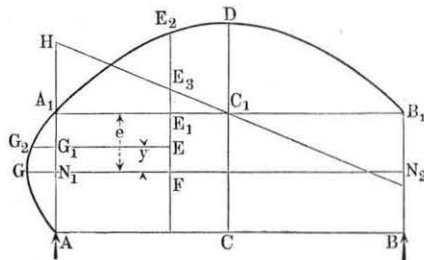
$$s = \frac{M}{W} = \frac{1/8 q l^2}{1/6 b h^2} = 3/4 \frac{q l^2}{b h^2},$$

und die Schubspannung an den Enden bei  $N_1$  oder  $N_2$  nach §. 48 (7) zu

$$\sigma = \frac{f}{bW} V = \frac{1/4 bh}{b^{1/6} h^2} q \frac{l}{2} = 3/4 \frac{ql}{bh}.$$

Denkt man sich nun nach einem beliebigen Kräftemaßstabe diese Größen  $s = C_1 D$  und  $\sigma = N_1 G$  aufgetragen, und construirt durch  $A$ ,  $G$  und

Fig. 193.



$A_1$  einen Parabelbogen mit dem Scheitel in  $G$ , so ist nach dem vorigen Paragraphen die Schubspannung in irgend einem Punkte  $G_1$  des Endquerschnittes durch  $G_1 G_2$  gegeben. Will man daher für irgend einen Punkt wie  $E$  in demselben Abstände von der neutralen Ase  $N_1 N_2$  wie  $G_1$  die Schubkraft finden, so hat man nur  $G_1 G_2$  in dem Verhältnisse zu reduciren, in welchem die Verticalkraft im Querschnitte durch  $E$  kleiner ist, als diejenige in  $A$ , d. h. also im Verhältnisse von  $E_1 E_3 : A_1 H$  oder von  $C_1 E_1 : C_1 A_1$ , welche Reduction durch eine sehr einfache Hilfsconstruktion jederzeit leicht ausführbar ist.

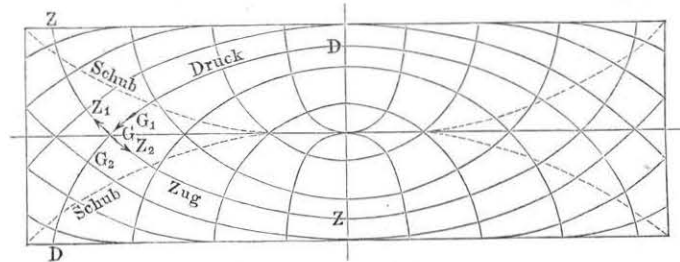
Denkt man ferner durch  $A_1$ ,  $D$  und  $B_1$  ebenfalls eine Parabel mit dem Scheitel in  $D$  gezeichnet, so sind deren Ordinaten nach dem früher über die Momentendiagramme Angeführten den Biegemomenten  $M$  der zugehörigen Querschnitte, folglich auch den Normalspannungen  $s$  in den äußersten Fasern daselbst proportional. Da nun  $C_1 D$  dieser äußersten Faser Spannung in der Mitte gleich gemacht wurde, so erhält man in  $E_1 E_2$  die Spannung der äußersten Faser in dem Querschnitte durch  $E$ , und in  $E$  selbst daher eine in dem Verhältnisse  $\frac{FE}{FE_1} = \frac{y}{e}$  verringerte Zugspannung.

In dieser Weise sind in Fig. 194 die Trajektorien\*) für einen auf zwei Stützen ruhenden, gleichmäßig belasteten Balken von rechteckigem Querschnitte gezeichnet worden. Die beiden Curvensysteme für  $\pm s_{max}$  schneiden sich nach dem Vorstehenden überall unter rechten Winkeln. Da nun in den Flächen für  $s_{max}$  nach dem Obigen die Schubkraft gleich Null ist, so folgt,

\*) Unter den Spannungstrajektorien werden, wie bereits bemerkt, die Linien verstanden, welche für jeden ihrer Punkte die Richtung der größten Druck-, Zug- oder Schubspannung durch ihre Tangente daselbst angeben.

daß in jeder Curve des einen Systems, wie z. B. derjenigen  $DGD$ , in irgend einem Elemente  $G_1 G_2$  nur eine normal zu diesem Elemente wirkende Spannung thätig sein kann, d. h. eine Spannung, welche nach der Tangente  $Z_1 Z_2$  der durch diesen Punkt  $G$  hindurchgehenden Curve  $ZGZ$  des anderen

Fig. 194.



Systems gerichtet ist. Man hat sich daher diese beiden Curvensysteme als solche zu denken, in welchen lediglich Spannungen nach der Richtung dieser Curven auftreten, etwa wie bei Seilcurven, wenn, wie in  $Z$  diese Spannungen Zugspannungen sind, oder wie bei Gewölben, wenn, wie in der Curve  $D$  Druckspannungen auftreten. Beispielsweise mag man sich vorstellen, daß in dem Punkte  $G$  drei Kräfte einander das Gleichgewicht halten, von denen die eine, in der Richtung von  $G_1$  nach  $G_2$  wirkende, in den beiden von  $G$  ausgehenden Seilstücken  $GZ_1$  und  $GZ_2$  Zugspannungen hervorruft, deren Resultante zusammen mit der in der Richtung  $G_1 G_2$  wirkenden Kraft das Element  $G G_1$  comprimirt.

**Verzahnte Balken.** Bei den gewöhnlichen hölzernen und eisernen §. 50. Trägern, welche aus einem einzigen Stücke bestehen, ist der Einfluß der Schubspannungen  $\sigma$  im Vergleiche mit den Biegespannungen in der Regel so gering, daß man die ersteren unbeachtet lassen darf. Dies ist nicht mehr zulässig, sobald die Träger aus mehreren mit einander verbundenen Theilen zusammengesetzt sind, wie dies bei manchen Holzconstruktionen, z. B. den verzahnten Trägern, und bei den aus Blechplatten und Winkeleisen bestehenden Blechträgern der Fall ist. Bei den letzteren erfordert auch die Feststellung der immer nur geringen Dicke der Mittelwand eine Untersuchung, um die Schubspannung in dieser Mittelwand nicht übermäßig groß werden zu lassen.

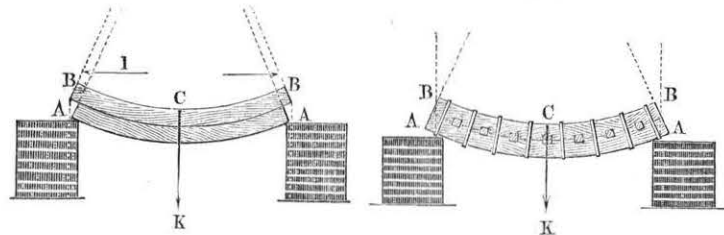
Hölzerne Balken, welche für eine gegebene Tragweite und Belastung nicht in genügender Stärke aus einem Stamme geschnitten werden können, stellt man zuweilen wohl aus mehreren übereinander gelegten Balken von recht-

edigem Querschnitte her, welche mit einander so zu vereinigen sind, daß die ganze Verbindung gegen die biegenden Momente wie ein einziger aus einem Stücke bestehender Träger sich verhält.

Wenn man zwei Balken *A* und *B*, Fig. 195, von rechteckigem Querschnitte einfach über einander legt und durch eine Kraft *K* belastet, so nimmt jeder Balken eine Biegung unabhängig von derjenigen des anderen an, und indem man sich vorzustellen hat, daß jeder Balken das halbe Biegungs-

Fig. 195.

Fig. 196.



moment aufnimmt, d. h. die Hälfte der Last *K* trägt, bestimmen sich die Breite *b* und Höhe *h* für den Querschnitt jedes der beiden Balken durch

$$\frac{1}{2} M = \frac{1}{2} \frac{Kl}{4} = s \frac{bh^2}{6},$$

oder

$$K = \frac{4}{3} s b h^2 \quad \dots \quad (1)$$

Denkt man sich jedoch die beiden Balken so mit einander vereinigt, daß eine Verschiebung des einen gegen den anderen ebensowohl wie eine Trennung der Balken von einander ausgeschlossen ist, so tritt die Biegung nach Fig. 196 wie diejenige eines einfachen Balkens von der Breite *b* und Höhe *2h* des Querschnittes ein, so daß jetzt die Bedingung

$$M = \frac{Kl}{4} = s \frac{b(2h)^2}{6},$$

oder

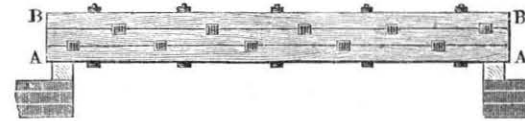
$$K = \frac{8}{3} s b h^2 \quad \dots \quad (2)$$

gilt. Der Balken in Fig. 196 hat daher bei gleichen Dimensionen die doppelte Tragfähigkeit von derjenigen der einfach über einander gelegten Balken in Fig. 195. Ebenso findet sich, daß ein aus drei, vier oder allgemein *n* Einzelbalken vereinigter Träger, Fig. 197, die drei, vier oder allgemein *n* fache Tragfähigkeit der einfach über einander liegenden Balken von gleichen Dimensionen besitzt.

Um dieses Resultat zu erzielen, muß die Art der Vereinigung zunächst eine Verschiebung der einzelnen Balken auf einander verhindern, was man

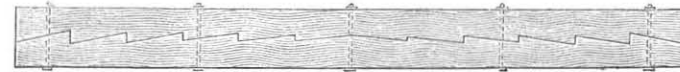
entweder durch zwischen die Balken eingeschobene Keile oder Dübel (Fig. 196 und 197) erreicht, verdübelte Träger, oder dadurch, daß man die

Fig. 197.



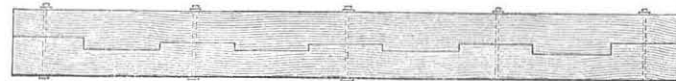
Balken nach den Figuren 198 und 199 mit schrägen oder geraden gegen einander passenden Zähnen versieht, welche sich einer Verschiebung entgegensetzen. Außerdem pflegt man durch übergeschobene Bänder, Fig. 196, oder durchgezogene Schraubenbolzen, Fig. 197, eine Trennung der Balken

Fig. 198.



zu verhindern, welche sich deshalb einstellen würde, weil bei gleicher Gestalt der elastischen Linien in den Mittellinien beider Balken die unterste Faserschicht des oberen Balkens größere Krümmungshalbmesser annimmt, als die oberste Faserschicht des unteren Balkens. Durch die Einschnitte für die Dübel

Fig. 199.



und Zähne sowie durch die Bolzenlöcher werden natürlich die Balken entsprechend geschwächt, wodurch der Gewinn an Tragfähigkeit wieder herabgezogen wird und worauf bei der Berechnung gerücksichtigt werden muß. Auch wirft man diesen Balken vor, daß das Holz in den Einschnitten in Folge von Feuchtigkeit einer schnellen Fäulniß ausgesetzt ist, wodurch die Widerstandsfähigkeit der Zähne gegen Verschiebung bedenklich beeinträchtigt wird. Aus diesem Grunde und wegen der heutzutage wohlfeilen Herstellung eiserner Bauconstructionen wendet man verzahnte und verdübelte Träger nur noch selten und nur etwa da an, wo durch die besonderen Verhältnisse die Verwendung von Holz bedingt ist. Bei eisernen Trägern verwendet man Verzahnungen niemals und Dübel oder Keile nur selten, indem man sich zur Verbindung bei Schmiedeeisen fast ausschließlich der Nieten, bei Gußeisen der Schraubenbolzen bedient.



Die zwischen zwei auf einander liegenden Balken angebrachten Zähne müssen der an der Vereinigungsstelle auftretenden horizontalen Schubkraft widerstehen, welche letztere nach §. 48, Gleichung (7) durch

$$\sigma = \frac{1}{b} \frac{f}{W} V$$

zu bestimmen ist. Hierin bedeutet  $f$  den einerseits der Berührungsfäche gelegenen Theil der reducirten Querschnittsfäche, deren Widerstandsmoment mit  $W$  bezeichnet ist. Demgemäß hat man, unter  $b$  die Breite und  $h$  die Höhe

des Querschnittes von jedem einzelnen Balken verstanden, den Werth von  $\frac{f}{W}$  bei einem:

a) zweifachen Balken, Fig. 200,

$$\frac{f}{W} = \frac{\frac{1}{2} b h}{\frac{1}{6} b (2h)^2} = \frac{3}{4h} = \frac{3}{2H};$$

b) dreifachen Balken, Fig. 201,

$$\frac{f}{W} = \frac{(1 - \frac{1}{9}) \frac{1}{2} b \cdot \frac{3}{2} h}{\frac{1}{6} b (3h)^2} = \frac{4}{9h} = \frac{4}{3H};$$

c) vierfachen Balken, Fig. 202, in der Fuge  $mm$ :

$$\frac{f}{W} = \frac{b h}{\frac{16}{6} b h^2} = \frac{3}{8h} = \frac{3}{2H'}$$

und in der Fuge  $nn$ :

$$\frac{f}{W} = \frac{\frac{3}{4} b h}{\frac{16}{6} b h^2} = \frac{9}{32h} = \frac{9}{8H'}.$$

Der durch obige Formel  $\sigma = \frac{1}{b} \frac{f}{W} V$  bestimmten Schubspannung muß das Holz durch seine Scheerfestigkeit in allen Punkten widerstehen können, und man hat selbstredend bei dieser Untersuchung diejenigen Stellen ins Auge zu fassen, für welche  $V$  ein Maximum ist, also die Endpunkte des auf zwei Stützen aufliegenden Balkens. Dieser Schubkraft wird das Holz bei den gewöhnlichen Ausführungen meistens widerstehen können. Es mag hierbei bemerkt werden, daß die Schubspannungen um so größer ausfallen

Fig. 200.

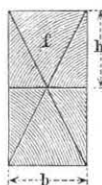


Fig. 201.

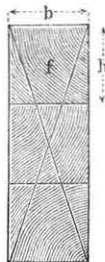
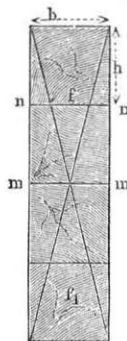


Fig. 202.



müssen, je größer die Vertikalkraft  $V$ , d. h. je größer die Belastung  $K$  und je kleiner die Länge  $l$  des Balkens ist, über welche sich doch die Schubkraft vertheilt. Die Zähne müssen aber auch eine bestimmte Tiefe  $cd = \delta$ , Fig. 203, erhalten, so daß der spezifische Druck auf die verticale Stoßfläche

Fig. 203.



$cd$  das für die Druckfestigkeit zulässige Maß  $s_a$  nicht übersteigt. Bezeichnet  $\lambda = ac$  die Länge eines Zahnes, so ist die von dem letzteren aufzunehmende Schubkraft durch  $\lambda b \sigma$  ausge-

drückt, und da die diesen Druck aufnehmende Fläche  $cd$  die Größe  $\delta b$  hat, so erhält man die auf die letztere entfallende Druckkraft pro Flächeneinheit durch

$$\lambda b \sigma = \delta b s \text{ zu } s = \frac{\lambda}{\delta} \sigma = n \sigma,$$

wenn das Verhältniß  $\frac{\lambda}{\delta}$  der Länge zur Höhe eines Zahns durch  $n$  ausgedrückt wird. In der Regel wird dieses Verhältniß zwischen 5 und 10 angenommen.

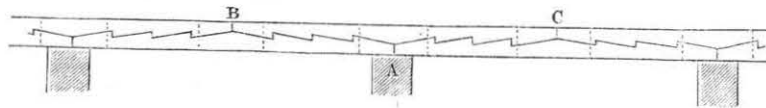
Da die Hölzer durch die Zähne um so mehr geschwächt werden, je größer deren Tiefe  $\delta$  ist, so erscheint es zweckmäßig, den Zähnen nur die durch die Größe des Schubes bedingte, also an verschiedenen Stellen wegen der Veränderlichkeit der Schubkraft eine verschieden große Höhe zu geben. Insbesondere wird es sich empfehlen, in der Mitte zwischen den Stützen, wo das Moment  $M$  ein Maximum und die Vertikalkraft  $V = 0$  ist, den Zähnen nur eine geringe Höhe  $\delta$  zu geben, und diese Höhe nach den Enden hin dem Wachstum von  $V$  entsprechend zu vergrößern. Pieg der Balken an diesen Enden frei auf Stützen, so ist die Verschwächung durch hohe Zähne an diesen Stellen nicht bedenklich, da das Biegemoment daselbst bis zu Null abnimmt. Wenn jedoch der Träger an den Enden eingemauert ist, oder wenn er als continuirlicher Balken über die Stützen hinwegreicht, so hat man an diesen Stellen mit Rücksicht auf die daselbst auftretenden Biegemomente eine beträchtliche Verschwächung durch tiefe Zähne möglichst zu vermeiden.

Bei schrägen Zähnen ist natürlich deren Richtung derjenigen der wirkenden Schubkraft entsprechend anzuordnen, also sind von dem Querschnitte des Maximalmomentes aus, wo die Schubkraft Null ist, nach beiden Seiten entgegengesetzte Richtungen anzunehmen, wie in Fig. 198. Wenn diese Stelle des Maximalmomentes ihren Platz ändert, wie dies in §. 36 für mobile Belastungen gezeigt worden ist, so werden gerade Zähne nach Fig. 199 den schrägen vorzuziehen sein, da die ersteren nach beiden Seiten wirksam sind.

Bei langen verzahnten Trägern, besonders bei continuirlichen über mehrere Stützen wegreichenden, wird man oft genöthigt sein, jeden der einzelnen Balken

aus mehreren Hölzern darzustellen; dabei wird man die Stoßfugen möglichst an solchen Stellen anzuordnen haben, wo das zu stoßende Stück einer Pressung ausgesetzt ist, also z. B. in Fig. 204 das untere Holz über der Zwischenstütze *A*, das obere in den Mitten *B* und *C* der Oeffnungen.

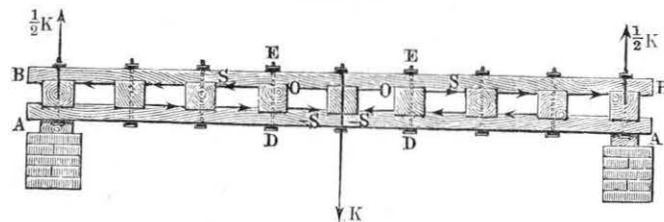
Fig. 204.



Jedenfalls wird man bei einer größeren Anzahl von mit einander zu verbindenden Hölzern niemals zwei derselben in demselben Querschnitte, sondern immer in gehöriger Abwechselung zusammenstoßen und für die Tragfähigkeit des aus *n* einfachen Balken bestehenden Trägers nur *n* — 1 Balken in Rechnung bringen.

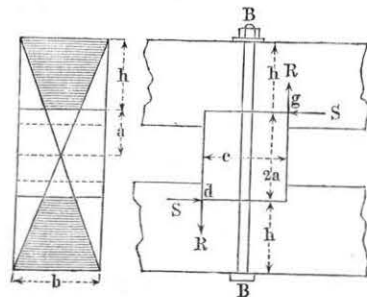
In ähnlicher Art, wie die verzahnten und verdübelten Balken sind auch die nach Fig. 205 aus zwei Längshölzern und zwischengelegten Holzklößen *O*

Fig. 205.



durch Schrauben *ED* zusammengebolzten Träger zu beurtheilen, wobei die Holzklöße *O* die Schubkraft aufzunehmen haben und gewissermaßen als Dübel anzusehen sind.

Fig. 206.



Bezeichnet hier wieder, Fig. 206, *b* die Breite und *h* die Höhe eines der Längshölzer an der durch einen Klotz verschwächten Stelle und *2a* die Höhe dieses Klotzes, so hat man hier die halbe reducirte Querschnittsfläche nach der Figur zu

$$f = \frac{b}{2} (a + h) - \frac{b}{2} \frac{a}{a + h} a = \frac{bh}{2} \frac{2a + h}{a + h}$$

und das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{12} b \frac{S(a + h)^3 - 8a^3}{a + h} = \frac{2}{3} b \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{a + h},$$

woraus die Schubspannung pro Längeneinheit

$$\sigma b = \frac{f}{W} V = \frac{3h}{4} \frac{2a + h}{3a^2h + 3ah^2 + h^3} V$$

folgt. Ist *λ* die Entfernung zweier Klöße und *σ* die in der Mitte eines Klotzes wirkende spezifische Schubkraft, so ist der Klotz einem Schube jedes der Längshölzer von der Größe

$$S = \lambda b \sigma$$

ausgesetzt. Diese beiden nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte *S* erzeugen in den Ecken *d* und *g* zwei verticale Reactionen *R* von solcher Größe, daß, unter *c* die Länge eines Klotzes verstanden,

$$Rc = Sa$$

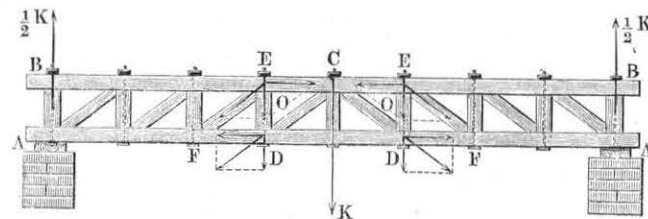
ist, und daher müssen die Schraubenbolzen dem Zuge

$$R = S \frac{a}{c}$$

durch ihre absolute Festigkeit widerstehen.

Um diesem Bestreben zum Drehen der Klöße oder Bolzen kräftig entgegen zu wirken, ordnet man wohl nach Fig. 207 zwischen den Längsbalken

Fig. 207.



noch Streben *CD* und *EF* an, und setzt auch wohl Kreuz- oder Gegenstreben ein, so daß der Zwischenraum zwischen je zwei Bolzen durch ein sogenanntes Andreaskreuz ausgefüllt ist. Derartige Constructionen sind wie die Fachwerke zu beurtheilen, über welche weiter unten das Nähere angegeben ist.

Beispiel. Ein verzahnter Balken von 6 m freier Länge dient als Unterzug unter den Balken einer Etage, durch welche eine gleichmäßig vertheilte Last von 1200 kg auf jeden laufenden Meter der Trägerlänge übertragen wird. Wie stark müssen die beiden, den Träger bildenden Hölzer werden, wenn denselben eine Breite von 0,20 m gegeben wird?

Das größte Biegemoment stellt sich hier in der Mitte zu

$$M = q \frac{l^2}{8} = 1200 \frac{36}{8} = 5400 \text{ mkg.}$$

Nimmt man an, daß die Bolzen 20 mm stark sind, also nur eine wirkame Breite von  $200 - 20 = 180 \text{ mm}$  verbleibt, und setzt man voraus, daß in der Mitte des Balkens eine Verschwächung durch Zähne nicht stattfindet, so erhält man die Höhe  $2h$  des verzahnten Trägers durch

$$M = s W = s \frac{1}{6} 0,180 (2h)^2,$$

woraus mit  $s = 1 \text{ kg pro Quadratmeter}$

$$2h = \sqrt{\frac{M}{s \cdot 0,03}} = \sqrt{\frac{5400}{1 \cdot 1000000 \cdot 0,03}} = 0,424 \text{ m}$$

folgt. Gibt man daher jedem der beiden Balken eine Höhe von  $0,212 \text{ m}$  und den Zähnen eine Tiefe  $\delta = 0,024 \text{ m}$ , so hat man für die Träger an den Enden das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{12} 0,180 \frac{0,424^3 - 0,024^3}{0,212} = 0,005391$$

und die reducirte Querschnittsfläche jeder Querschnittshälfte

$$f = \frac{1}{2} \cdot 0,180 \left( 0,212 - \frac{0,012}{0,212} 0,012 \right) = 0,09 \cdot 0,211 = 0,019.$$

Da ferner für die Enden des Trägers

$$V = q \frac{l}{2} = 1200 \cdot 3 = 3600 \text{ kg}$$

ist, so erhält man die Schubspannung daselbst pro Quadratmeter zu

$$\sigma = \frac{1}{b} \frac{f}{W} Q = \frac{1}{0,180} \frac{0,019}{0,005391} 3600 = \frac{68400}{0,970} = 70516 \text{ kg}$$

oder pro 1 qmm  $\sigma = 0,07 \text{ kg}$ , eine Beanspruchung, welche das Holz noch mit Sicherheit verträgt. Gibt man den Zähnen eine Länge  $\lambda = 0,200 \text{ m}$ , macht man also

$$n = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{0,200}{0,024} = 8,33,$$

so werden die Hirnenden der Zähne mit

$$s = n \sigma = 8,33 \cdot 0,07 = 0,56 \text{ kg}$$

gebrückt.

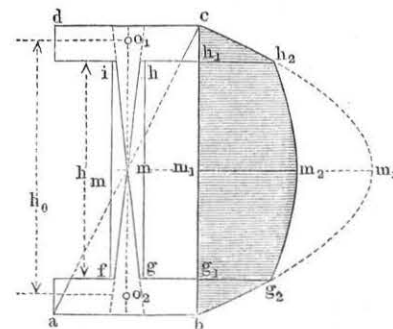
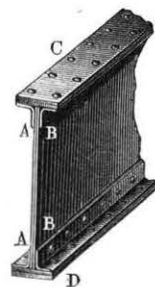
§. 51. **Blecbalken.** Da bei allen der Biegung unterworfenen Balken das Material um so vorteilhafter ausgenutzt wird, in je größerer Entfernung von der neutralen Axe dasselbe angebracht ist, so ist man bei allen größeren Trägern, wie sie für Brücken und Ueberdachungen ausgeführt werden, dazu übergegangen, das den Zug bzw. Druck vornehmlich aufnehmende Material in zwei zu beiden Seiten der neutralen Axe angeordneten Längsbändern oder sogenannten Gurtungen (Streckbäumen) unterzubringen. Diese Gurtungen, welche gewissermaßen den Flanschen der I förmigen Träger entsprechen, sind durch zwischen denselben anzubringende Füllungs- glieder

derart mit einander in Verbindung zu bringen, daß das ganze System sich wie ein einziger Balken gegen die Biegung verhält, und jede Gurtung dadurch verhindert ist, sich selbständig wie ein einfacher Balken durchzubiegen.

Das einfachste und zuerst hierzu angewandte Füllungs- oder Zwischenglied besteht in einer verticalen Blechwand  $AB$ , Fig. 208, welche aus Eisenblechtafeln von 6 bis 25 mm Stärke zusammengesetzt und oben und unten mittelst Winkleisen mit den aus gewalzten Eisenplatten bestehenden

Fig. 208.

Fig. 209.



Gurtungen  $C$  und  $D$  vernietet ist. Bezeichnet man mit  $h_m$  die Höhe und  $d$  die Dicke dieser mittleren Blechwand, und mit  $b$  die Breite und  $d_g$  die Dicke des als Rechteck zu denkenden Querschnittes einer jeden Gurtung, so ist der ganze Trägerquerschnitt durch

$$F = h_m d + 2 b d_g = F_m + 2 F_g \dots \dots \dots (1)$$

gegeben, wenn man mit  $F_m$  den Querschnitt der Mittelwand und mit  $F_g$  den einer jeden Gurtung bezeichnet.

Nach dem in §. 47 Gesagten ist die halbe reducirte Querschnittsfläche  $f_m = m h i$  der Mittelwand eines I förmigen Querschnittes, Fig. 209, bei geringer Dicke der Mittelwand gegen diejenige  $f_g = d c h i$  einer Gurtung nur gering, so daß in allen Fällen der Praxis  $f_m$  gegen  $f_g$  vernachlässigt und

$$f = f_g = F_g = b d_g \dots \dots \dots (2)$$

gesetzt werden kann.

Nimmt man demgemäß an, daß eine Gurtung in allen Punkten ihres Querschnittes einer und derselben Spannung ausgesetzt ist, so hat man den Schwerpunkt aller dieser Spannungen in demjenigen  $o$  des Gurtungsquerschnittes anzunehmen und erhält daher das Widerstandsmoment des Querschnittes zu



$$W = F_g \cdot o_1 o_2 = b d_g (h_m + d_g) = b d_g h_0 \dots (3)$$

wenn man die Entfernung  $o_1 o_2 = h_m + d_g$  zwischen den Mitten der Gurtungsquerschnitte mit  $h_0$  bezeichnet.

Mit Hilfe dieser Formeln bestimmt sich nun für irgend welchen Querschnitt des Blechbalkens, welcher dem Bieugungsmomente  $M$  und der Verticalkraft  $V$  ausgesetzt ist, die größte Biegungsspannung in den Gurtungen zu

$$s = \frac{M}{W} = \frac{M}{b d_g h_0} = \frac{M}{F_g h_0} \dots (4)$$

und die Schubspannung in der neutralen Ase pro Flächeneinheit, wenn man in (7) des §. 48 für  $b$  die Dicke  $d$  der Mittelwand setzt:

$$\sigma = \frac{1}{d} \frac{f}{W} V = \frac{1}{d} \frac{b d_g}{b d_g h_0} V = \frac{V}{d h_0} \dots (5)$$

Dieser Gleichung gemäß hat man die Dicke  $d$  der Blechwand zu bestimmen, indem man für  $\sigma$  die höchstens zulässige Schubspannung des Eisens und für  $V$  die größte Verticalkraft einsetzt.

Die Schubspannung nimmt zwar von der neutralen Ase nach den äußersten Fasern hin bis auf Null ab, doch lehrt die Figur, daß diese Abnahme von der Mitte  $m$  bis an die Stelle  $h i$  hin, wo die Gurtung sich an die Mittelwand anschließt, nur sehr gering ist, da der die Schubspannungen der Mittelwand darstellende Parabelbogen  $h_2 m_2 g_2$  sehr flach ist. Man kann daher mit genügender Genauigkeit die Schubspannung in  $h i$  gleich derjenigen nach (5) bestimmten in der neutralen Ase voraussetzen.

Um nun auch den Gurtungsquerschnitt  $F_g$  zu bestimmen, hat man zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der größte Werth des Bieugungsmomentes  $M$  mit dem größten Werthe der Verticalkraft  $V$  in demselben Querschnitte zusammentrifft oder nicht.

Der letztere Fall stellt sich ein bei einem auf zwei Stützen frei aufliegenden, dazwischen belasteten Träger, der erste Fall bei einem an den Enden eingeklemmten Balken, sowie bei einem an dem einen Ende eingemauerten Consolträger. Es mögen diese beiden Fälle hier gesondert betrachtet werden.

Liegt ein Blechbalken von der Länge  $l$  frei auf zwei Stützen auf, und ist derselbe etwa durch eine gleichmäßig vertheilte Belastung  $q l$  angegriffen, so tritt das größte Bieugungsmoment  $M = \frac{q l^2}{8}$  in der Mitte auf, während die größte Verticalkraft in den Querschnitten durch die Stützen wirkt, wo sie durch  $V = q \frac{l}{2}$  dargestellt ist. In Folge des Momentes tritt in den Gurtungen des mittleren Querschnittes eine Biegungsspannung nach (4) von

$$s = \frac{M}{W} = \frac{1}{8} \frac{q l^2}{F_g h_0} \dots (6)$$

auf, während in diesem Querschnitte die Schubspannung in allen Punkten gleich Null ist. Die Schubspannung erreicht dagegen ihr Maximum in den Querschnitten durch die Stützen nach (5) im Betrage

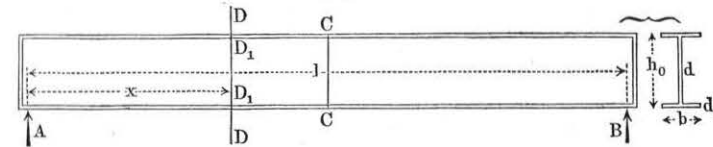
$$\sigma = \frac{V}{d h_0} = \frac{1}{2} \frac{q l}{d h_0} \dots (7)$$

während in diesen Querschnitten die Biegungsspannung gleich Null ist. Man kann daher bei einer angenommenen oder vorgeschriebenen Höhe  $h_0$  des Trägers aus (5) die Dicke  $d$  der Mittelwand und aus (4) die Größe  $F_g$  des Gurtungsquerschnittes in der Mitte berechnen, indem man in beiden Formeln für  $\sigma$  bzw.  $s$  die für das Material höchstens zulässigen Werthe einsetzt.

Nach der Gleichung (4) würde der mit  $M$  proportionale Querschnitt  $F_g$  der Gurtung von dem für die Balkenmitte berechneten Werthe nach den Enden hin bis auf Null abnehmen dürfen, vorausgesetzt, daß in dem Balken überhaupt nur Biegungsspannungen vorkämen. Wegen der Schubspannungen ist eine derartige Verminderung des Gurtungsquerschnittes aber nicht angängig, ohne die Materialbeanspruchung übermäßig zu steigern, wie die folgende Untersuchung zeigt, für welche zunächst ein überall gleicher Querschnitt  $F_g$  der Gurtung vorausgesetzt sein mag.

Gesetzt, der auf zwei Stützen  $A$  und  $B$  ruhende gleichmäßig belastete Balken, Fig. 210, sei so angeordnet, daß den vorstehenden Formeln (6) und (7) gemäß sowohl die äußerste Biegungsspannung in der Mitte  $CC$ , als

Fig. 210.



auch die Schubspannung in der Mittelwand bei  $A$  und  $B$  gerade den noch zulässigen Werth  $s_1$  für das Material erreicht, so daß man also hat

$$s_1 = \frac{1}{8} \frac{q l^2}{F_g h_0} = \frac{1}{2} \frac{q l}{d h_0} \dots (8)$$

In irgend welchem anderen Querschnitte  $DD$  im Abstände  $x$  von  $A$  wird offenbar die größte Spannung an denjenigen Stellen  $D_1$  eintreten, in welchen die Mittelwand sich an die Gurtung anschließt, denn eine in dieser Anschlußfläche liegende Faser wird als zur Gurtung und zur Mittelwand gehörig, sowohl der Biegungsspannung  $s$  der ersteren wie auch der Schub-

Spannung  $\sigma$  der letzteren unterworfen sein. Die maximale Anstrengung dieser Faser bestimmt sich daher nach (4) in §. 49 dem absoluten Werthe nach zu

$$s_{max} = \frac{s}{2} + \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad (9)$$

Hierin bedeuten  $s$  und  $\sigma$  die gedachten, in dem Querschnitte  $x$  bei  $D_1$  und  $D_1$  auftretenden Bieungs- und Schubspannungen. Man findet dieselben durch

$$s = \frac{M_x}{W} = \frac{q \frac{l}{2} x - q \frac{x^2}{2}}{F_g h_0} = \frac{q}{2 F_g h_0} (l - x) x$$

und

$$\sigma = \frac{V_x}{d h_0} = \frac{q \left(\frac{l}{2} - x\right)}{d h_0}.$$

Hieraus erhält man mit Rücksicht auf (8) auch

$$s = 4 \frac{l x - x^2}{l^2} s_1 \quad (10)$$

und

$$\sigma = \frac{l - 2x}{l} s_1 \quad (11)$$

so daß man mit diesen Werthen aus (9) die gesuchte größte Anstrengung der Faser in dem Querschnitte  $x$  bei  $D_1$  erhält:

$$s_{max} = s_1 \left[ 2 \frac{l x - x^2}{l^2} + \sqrt{\left(\frac{l - 2x}{l}\right)^2 + \left(2 \frac{l x - x^2}{l^2}\right)^2} \right].$$

Den Werth der Wurzel findet man durch Ausrechnung zu:

$$\sqrt{\left(1 - 2 \frac{l x - x^2}{l^2}\right)^2} = 1 - 2 \frac{l x - x^2}{l^2},$$

und daher erhält man

$$s_{max} = s_1 \left( 2 \frac{l x - x^2}{l^2} + 1 - 2 \frac{l x - x^2}{l^2} \right) = s_1.$$

Diese Rechnung besagt also, daß, wenn der Gurtungsquerschnitt der gemachten Voraussetzung gemäß überall dieselbe Größe hat, die absolut größte Spannung in allen Querschnitten ebenfalls denselben Werth  $s_1$  annimmt, und zwar in denjenigen Fasern, in welchen die Mittelwand sich an die Gurtungen anschließt. Es geht hieraus hervor, daß es nicht gestattet ist, den Querschnitt der Gurtungen nach den Stützen hin zu verkleinern, weil sonst, wie man leicht erkennt, die vorstehende

Rechnung für jeden Querschnitt  $x$  in den Punkten  $D_1$  eine Spannung  $s_{max} > s_1$  liefern müßte, indem nunmehr bei der Zusammensetzung der Bieungs- und Schubspannung  $\sigma$ , wie sie durch (9) dargestellt ist, ein größerer Werth von  $s$  erscheint, als der unter der Annahme gleicher Gurtungsquerschnitte in (10) berechnete.

Wenn der Balken anderenfalls nicht frei aufliegt, sondern an den Enden eingespannt ist, so stellen sich die größte Bieungs- und Schubspannung  $s$  und die größte Schubspannung  $\sigma$  in einem und demselben Querschnitte, nämlich an der Befestigungsstelle ein. Es genügt daher jetzt nicht mehr, wie im vorhergehenden Falle geschehen, den Gurtungsquerschnitt lediglich unter Berücksichtigung der Bieungs- und Schubspannung  $s$ , und die Mittelwand mit Rücksicht auf die Schubspannung  $\sigma$  allein so festzustellen, daß jede dieser Spannungen höchstens den zulässigen Betrag  $s_1$  annimmt. Man muß hier vielmehr die maximale Spannung in Betracht ziehen, welche sich in dem Querschnitte an der Befestigungsstelle und zwar wieder da einstellt, wo die Gurtung sich an die Mittelwand anschließt, indem an diesem Punkte die größte Bieungs- und Schubspannung  $\sigma$  zusammenstößt. Diese größte resultirende Spannung  $s_{max}$  findet man wieder nach (9) zu

$$s_{max} = \frac{s}{2} + \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2},$$

in welchen Ausdruck man in jedem besonderen Falle

$$s = \frac{M}{W} = \frac{M}{F_g h_0} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{V}{d h_0}$$

einzuführen hat, so daß man erhält

$$s_{max} = \frac{M}{2 F_g h_0} + \sqrt{\left(\frac{V}{d h_0}\right)^2 + \left(\frac{M}{2 F_g h_0}\right)^2} \quad (12)$$

Aus der Belastungsart sind  $M$  und  $V$  für die Befestigungsstelle immer bekannt, und wenn noch die Trägerhöhe  $h_0$  gegeben ist, so kann man aus der Gleichung (12), wenn  $s_{max} = s_1$  gesetzt wird, von den beiden Größen  $F_g$  und  $d$  die eine bestimmen, wenn die andere beliebig angenommen wird. Da man hierbei hinsichtlich der Wahl der einen Größe noch vollkommen frei ist, so kann man noch eine andere Bedingung stellen, z. B. diejenige, die Verhältnisse so zu wählen, daß das Gewicht des Balkens, d. h. der Querschnitt  $F = 2 F_g + h d$  ein Minimum wird. Um diese Aufgabe zu lösen, hätte man diesen Ausdruck für  $F$  nach  $d$  zu differentiren, nachdem darin zunächst aus (12) der Gurtungsquerschnitt  $F_g$  als Function von  $d$  eingeführt worden ist, und in bekannter Weise zu verfahren.

In welchem Betrage die Anstrengung des Materials in dem vorliegenden Falle durch das Zusammentreffen der größten Schub- und der größten

Biegungsspannung vergrößert wird, ist aus der Gleichung (9) ersichtlich. Gesezt, man hätte den Trägerquerschnitt so bestimmt, daß die größte Biegungsspannung  $s$  an der Befestigungsstelle ebensoviel wie die größte Schubspannung  $\sigma$  daselbst gleich dem zulässigen Werthe  $s_1$  wäre, so fände man mit  $s = \sigma = s_1$  aus (9):

$$s_{max} = s_1 \left( \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \right) = 1,618 s_1 \dots (13)$$

Das Material würde daher an der mehrfach gedachten gefährdeten Stelle, wo die Mittelwand sich an die Gurtung anschließt, eine im Verhältnisse 1,618 mal zu große Anstrengung zu erleiden haben, und man hätte deshalb, um die Anspannung an dieser Stelle jedenfalls nicht über  $s_1$  wachsen zu lassen, bei der Berechnung des Gurtungsquerschnittes nach (4) und der Stärke  $d$  der Mittelwand nach (5) nicht den Werth  $s_1$ , sondern nur

$$\frac{1}{1,618} s_1 = 0,62 s_1 \dots (14)$$

als zulässig in Rechnung zu bringen.

Es ist klar, daß bei den Verbindungen der einzelnen Platten und Eiskeisen mit einander durch Vernietung die an der betreffenden Stelle auftretenden Spannungen ebenfalls durch die Nietbolzen aufgenommen werden müssen. Danach ist auch ersichtlich, daß eine in horizontaler Richtung angeordnete Nietreihe, wie sie beispielsweise die Verbindung der Eiskeisen mit der Mittelwand oder mit den Deckplatten der Gurtungen bewirkt, nur durch die horizontale Schubkraft beansprucht wird, welche nach §. 48 pro Längeneinheit durch

$$b\sigma = \frac{f}{W} V$$

zu bestimmen ist. Wird daher unter  $\delta$  der Durchmesser der Nietbolzen und unter  $s'$  die zulässige Abscherungsspannung verstanden, so erhält man die Anzahl  $n$  der Nietbolzen für jede Längeneinheit der Fuge durch

$$n \frac{\pi \delta^2}{4} s' = \frac{f}{W} V \dots (15)$$

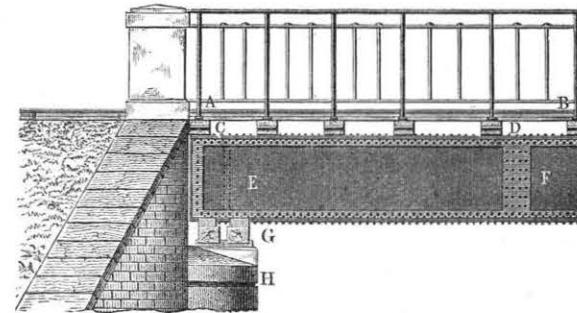
Dagegen sind die Nieten für verticale Nietfugen, wie sie z. B. bei dem Zusammenstoßen der die Mittelwand bildenden Platten entstehen, einer Einwirkung sowohl der horizontalen Biegungsspannung  $s$  wie auch der verticalen Schubspannung  $\sigma$ , also einer totalen Spannung gleich  $\sqrt{s^2 + \sigma^2}$  ausgesetzt.

Ueber die Verhältnisse, welche für die Nietungen gelten, muß auf das in Thl. I, Abschn. IV, Cap. 3 darüber Gesagte verwiesen werden. In Betreff der Gurtungsquerschnitte hat man bei den einer Zugspannung ausgesetzten Gurtungen die durch das Nietloch beanspruchte Querschnitts-

fläche  $d_1 \delta$  als eine Verschwächung in Abzug zu bringen, während bei den gedrückten Gurtungen eine Schwächung durch die Nietlöcher nicht stattfindet, da die gut passenden Nietbolzen die Druckübertragung ebenso gut übernehmen, wie das Material der Gurtung. Jedenfalls wird man dafür sorgen, daß in irgend welchem Querschnitte jede Gurtung durch höchstens ein Nietloch verschwächt wird. Zu den Gurtungsquerschnitten werden bei der praktischen Ausführung der Rechnung außer den Durchschnitten der horizontalen Deckplatten auch die Querschnitte der beiden Winkelseisen gerechnet, welche diese Deckplatten mit der Mittelwand verbinden.

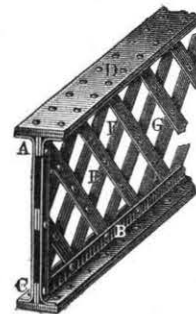
Eine einfache Blechträgerbrücke für Eisenbahnen ist theilweise in Fig. 211 dargestellt. Die ganze Bahn  $AB$  ruht hier mittelst Querschwellen  $CD$ ... auf sechs I förmigen Blechträgern wie  $EF$  von 1 bis 1,5 m Höhe, welche unter sich selbst wieder durch mehrere Querbalken von Eisenblech verbunden

Fig. 211.



sind. Die Hauptträger liegen auf Holzschwellen  $G$ , die durch eiserne Stähle auf den Pfeilern  $H$  ruhen. Bei einer von Engel entworfenen Eisenbahnbrücke über die Aar unweit Olten in der Schweiz hat man auch bogen-

Fig. 212.



förmige Blechträger angewendet. Diese Brücke besteht aus drei Oeffnungen von 31,5 m Spannung und 5,1 m Bogenhöhe, und jede Oeffnung wird durch fünf Blechbögen von 0,9 m Höhe und fünf unmittelbar unter der 7,2 m breiten zweigleisigen Bahn liegenden geraden Blechbalken von 0,6 m Höhe überspannt.

Anstatt der Blechwand hat man auch die Füllung zwischen den Gurtungen durch ein aus Diagonalstangen  $AB$ ,  $CD$ ..., Fig. 212, zusammengesetztes Gitterwerk gebildet, indem man diese Diagonalstäbe nicht nur mit den Eiskeisen der



Gurtungen, sondern auch unter sich in den Kreuzungspunkten  $E, F, G \dots$  vernietet. Die Wirkungsweise dieser Gitter kann in ähnlicher Art untersucht werden, wie die der weiter unten näher behandelten Fachwerksträger.

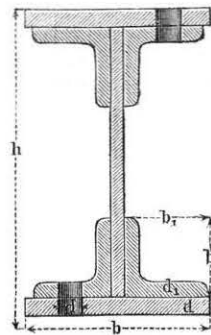
Beispiele: 1. Für eine Eisenbahnbrücke sollen die 3,6 m langen Querträger als Blechbalken konstruiert werden, und es sind die Dimensionen entsprechend einer Belastung des Querträgers gleich 24 000 kg zu ermitteln. Setzt man die Belastung als gleichmäßig über die Trägerlänge verteilt voraus, so ist das größte Biegemoment für die Mitte durch

$$M = 24\,000 \cdot \frac{3,6}{8} = 10\,800 \text{ mkg}$$

gegeben. Nimmt man für den Querträger eine ganze Höhe  $h = \frac{l}{10} = 0,36 \text{ m}$  an und stellt als Abstand der Gurtungsschwerpunkte etwa die Höhe  $h_0 = 0,32 \text{ m}$  in Rechnung, so erhält man mit einer zulässigen Spannung  $s = 6 \text{ kg pro Quadratmillimeter}$  nach (6) die Größe des wirkamen Querschnittes für jede Gurtung:

$$F_g = \frac{M}{s h_0} = \frac{10\,800}{6\,000\,000 \cdot 0,32} = 0,005625 \text{ qm} = 5625 \text{ qmm.}$$

Bildet man die Gurtung nach Fig. 213 aus einer Deckplatte von der Breite  $b = 160 \text{ mm}$  und zwei gleichschenkeligen Eiseilen von  $b_1 = 60 \text{ mm}$  Schenkellänge und  $d_1 = 12 \text{ mm}$  Schenkelfstärke, so ergibt sich mit Rücksicht auf die Verschwächung durch ein 20 mm weites Nietloch die erforderliche Dicke  $d$  der Deckplatte durch



zu

$$F_g = 5625 = 2(60 + 48)12 - 20 \cdot 12 + (160 - 20)d$$

$$d = \frac{5625 - 2352}{140} = 23,3 \text{ mm}$$

Dieser Querschnitt ist mit Rücksicht auf das oben Gesagte den Gurtungen überall zu geben.

Da die verticale Schubkraft an den Enden 12 000 kg beträgt, so ermittelt sich die geringste Stärke  $d_m$  der Blechwand, unter der Annahme einer höchstens zulässigen Schubspannung von 4 kg pro Quadratmillimeter, nach (7) zu

$$d_m = \frac{V}{\sigma h_0} = \frac{12\,000}{4\,000\,000 \cdot 0,32} = 0,0094 \text{ m,}$$

wofür man rund 10 mm annehmen wird.

Die Anstrengung der Nieten, welche die Eiseilen mit der Mittelwand verbinden, ist, wie diejenige der Zähne oder Dübel der verzahnten Balken, an den Enden des Balkens am größten. Nimmt man daher daselbst für die Nietbolzen 25 mm Durchmesser, also einen Querschnitt von 491 qmm an, und setzt eine Schubspannung von 4 kg als zulässig voraus, so vermag jeder Niet, da er in zwei Querschnitten abgescheert werden würde, mit einer Kraft von  $2 \cdot 4 \cdot 491 = 3928 \text{ kg}$  zu widerstehen. Da nun die Schubkraft an den Enden für eine Längeneinheit, d. h. etwa für  $\lambda = 1 \text{ mm}$  Trägerlänge durch

$$\sigma d_m \lambda = \lambda \frac{V}{h_0} = 0,001 \frac{12\,000}{0,32} = 37,5 \text{ kg}$$

bestimmt ist, so kann daselbst die Entfernung zweier Nieten zu

$$\frac{3928}{37,5} = 104,7 \text{ mm}$$

angenommen werden. Nach der Mitte hin dürfen die Nieten wegen der geringeren Schubkraft weiter von einander entfernt gesetzt werden. Dasselbe gilt auch für diejenigen Nieten, welche die Gurtungsdeckplatten mit den Eiseilen verbinden, da diese Nieten einer in dem Maße geringeren Schubkraft ausgesetzt sind, in welchem die Größe  $f$  in der allgemeinen Formel (5) für die Deckplatte allein kleiner ist, als für die ganze Gurtung. Da einer der vorstehend berechneten Nietbolzen für die Eiseilen von 25 mm Stärke seine ganze Kraft auf die geringe Druckfläche von  $10 \times 25 = 250 \text{ qmm}$  der Mittelwand zu übertragen hat, so erkennt man hieraus die Zweckmäßigkeit einer Vergrößerung dieser besagten Druckfläche, wie man sie etwa durch Unterlagsplatten erreichen kann, die an den Enden des Trägers zwischen den Eiseilen und der Mittelwand angebracht werden.

2. Ein Fußgängerbankett soll zur Seite einer eisernen Brücke durch an dem betreffenden Hauptträger befestigte Consolen von 1,6 m Ausladung unterstützt werden. Welche Dimensionen haben diese als Blechbalken auszuführenden Consolenträger zu erhalten, wenn die auf einen entfallende gleichmäßig verteilte Last 1000 kg beträgt, und die Consolen an der Befestigungsstelle eine Höhe von 0,32 m erhalten sollen.

Hier tritt das größte Biegemoment  $M = 1000 \cdot \frac{1,6}{2} = 800 \text{ mkg}$  mit der größten Verticallast  $V = 1000 \text{ kg}$  gleichzeitig an der Befestigungsstelle auf, und man hat daher, wenn die höchste Materialspannung den Werth  $s_1 = 6 \text{ kg pro Quadratmillimeter}$  nicht übersteigen soll, und  $h_0 = 0,3 \text{ m}$  gesetzt wird, nach (12):

$$6 \cdot 1000\,000 = \frac{800}{0,6 F_g} + \sqrt{\left(\frac{1000}{d_m 0,3}\right)^2 + \left(\frac{800}{0,6 F_g}\right)^2}$$

Nimmt man auch hier wegen der Witterungseinflüsse die Dicke  $d_m$  der Mittelwand gleich 0,010 m, so schreibt sich diese Gleichung auch

$$\left(6\,000\,000 - \frac{8000}{6 F_g}\right)^2 = \frac{1\,000\,000^2}{9} + \left(\frac{8000}{6 F_g}\right)^2,$$

woraus

$$36 - \frac{1}{9} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 8}{6 \cdot 1000 F_g},$$

oder

$$F_g = \frac{0,016}{35,889} = 0,000446 \text{ qm} = 446 \text{ qmm.}$$

Wollte man die Dimensionen nach (14) unter Zugrundelegung einer Anstrengung  $s = \sigma = 0,62$   $s_1 = 0,62 \cdot 6 = 3,72 \text{ kg}$  berechnen, so erhielt man mit diesem Werthe aus (4)

$$F_g = \frac{M}{s h_0} = \frac{800}{3,72 \cdot 1000\,000 \cdot 0,3} = 716 \text{ qmm,}$$

und aus (5)

$$d_m = \frac{V}{\sigma h_0} = \frac{1000}{3,72 \cdot 1000\,000 \cdot 0,3} = 0,0009 \text{ m,}$$

oder noch nicht 1 mm. Diese Anordnung würde, abgesehen davon, daß sie nicht ausführbar ist, ökonomisch vortheilhaft sein, weil bei derselben der Gesamtquerschnitt, also das Trägergewicht, wesentlich kleiner ausfallen würde ( $F = 2 \cdot 716 + 300 \cdot 0,9 = 1702 \text{ qmm}$ ), als bei der oben für eine Stärke  $d_m = 10 \text{ mm}$  ermittelten Construction, für welche der Trägerquerschnitt an der Befestigungsstelle durch

$$F = 2 \cdot 446 + 300 \cdot 10 = 3892 \text{ qmm}$$

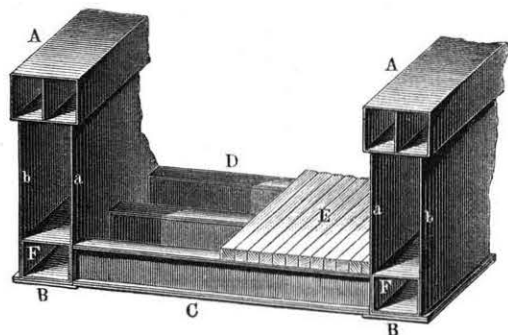
folgt. Mit Rücksicht auf das Kosten des Eisens pflegt man indessen die Blechstärken bei Brücken nicht unter 10 mm anzunehmen.

§. 52. **Röhrenträger.** Um bei größeren Brücken den Blechbalken auch gegen seitliche Ausbiegungen, wie sie durch Erschütterungen und durch den Winddruck angestrebt werden, eine größere Widerstandsfähigkeit zu geben, ist zuerst von R. Stephenson die kasten- oder röhrenförmige Gestalt der Träger angewendet worden, und es sind daraufhin die sogenannten Röhrenbrücken von R. Stephenson und W. Fairbairn entstanden.

Bei den Fairbairn'schen Ausführungen wird die Brücke von zwei parallelepipedischen Röhrenbalken getragen, während Stephenson die ganze Brücke zu einer parallelepipedischen Röhre gestaltete, in deren Innerem die Fahrbahn sich befand.

Eine einfache, durch zwei Röhrenträger  $AB$  getragene Brücke zeigt Fig. 214. Jeder der Träger ist hierbei aus zwei verticalen Blechwänden

Fig. 214.

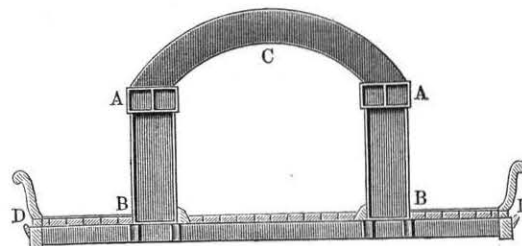


$a$  und  $b$  gebildet, welche als Gurtungen oben und unten mit den Röhren  $A$  und  $B$  von viereckigem Querschnitte verbunden sind. Der unteren Gurtung  $B$  hat man dabei durch eine Bodenplatte und der oberen  $A$  durch eine eingekietete Zwischenwand die nöthige Versteifung gegeben. Die Brückenbahn  $E$  liegt hierbei auf einzelnen I förmigen Blechträgern  $C, D$ , welche beiderseits mit den inneren Wänden der Hauptträger vernietet sind. Auch verbindet man wohl die beiden Hauptträger, wie aus Fig. 215 ersichtlich, ober-

halb zur größeren Versteifung durch eiserne Bögen wie  $C$ , und ordnet seitlich der Hauptträger auf consolartig ausragenden Blechträgern  $BD$  besondere Fußwege an.

Die Construction einer Röhrenbrücke von Stephenson, welche die Fahrbahn ganz umschließt, ist aus Fig. 216 zu ersehen. Die ganze Brücke

Fig. 215.



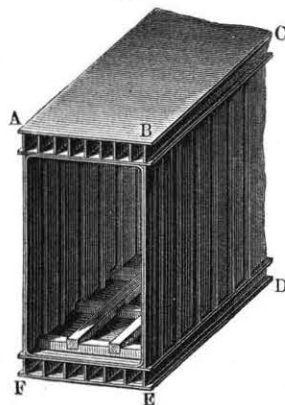
besteht aus einem hohlen Parallelepiped  $ABCD$ , welches aus Blechstücken von 1,2 bis 4 m Länge, 0,6 m Breite und 10 bis 20 mm Dicke

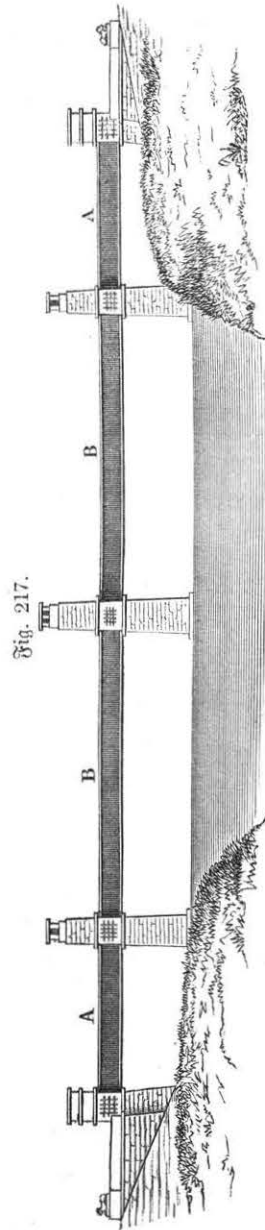
mittelfst 25 mm starker Bolzen zusammen-genietet ist. Zur Erhöhung der Tragfähigkeit ist diese Röhre sowohl mit einem doppelten Boden wie auch mit einer doppelten Decke versehen, und die dadurch gebildeten Hohlräume  $AB$  und  $EF$  sind durch verticale Scheidewände in Zellen getheilt, um ein Einknicken der breiten horizontalen Platten zu verhindern. Auch den hohen Tragwänden, wie  $BD$ , hat man dadurch noch eine besondere Steifigkeit ertheilt, daß die in verticalen Stoßfugen zusammenstoßenden Blechplatten auf beiden Seiten mit I förmigen Laschen zusammen-genietet worden sind, welche innen und außen vorstehende verticale Versteifungsrippen bilden.

Die Figur zeigt auch die Quer- und Längsschwellen für eine durch die Röhre zu führende Eisenbahn. Ueberdies sind noch diejenigen Stellen der Röhre, wo dieselbe aufruhrt, von innen mit gußeisernen Rahmen abgesteift und ebenso sind die Wände der unteren Zellenreihe daselbst durch gußeiserne Träger gestützt.

Es gehören zu diesen Stephenson'schen Röhrenbrücken insbesondere die Conway-Brücke und die Britannia-Brücke. Die erstere besteht aus zwei

Fig. 216.





neben einander liegenden Röhren<sup>1</sup>, wovon jede 129 m lang, 4,5 m breit, 6,85 m hoch an den Enden und 7,75 m hoch in der Mitte ist, und ein Gewicht von 1470 Tonnen (à 1000 kg) hat. Die Britannia-Brücke, welche wie die Telford'sche Kettenbrücke, über den Menai-Meerestrom führt, besteht aus vier Brückenöffnungen *ABBA*, Fig. 217, zwei von je 140 m und zwei von je 70 m Länge, und hat im Ganzen eine Länge von 460 m. Die Breite dieser Brücke ist 4,5 m, die Höhe derselben an den Enden 6,94 m und in der Mitte 9,14 m. Zu jeder Röhre waren nöthig 2875 Tonnen ebenes Eisenblech, 604 Tonnen Winkelisen, 425 Tonnen  $\perp$  Rippen, 340 Tonnen (882 000 der Zahl nach) Nieten, und außerdem noch 1016 Tonnen gußeiserne Rahmen u. s. w., so daß eine Röhre im Ganzen 5260 Tonnen wiegt.

Damit diese langen Röhrenbalken bei wechselnder Temperatur sich ungehindert ausdehnen und wieder zusammenziehen können, ruhen ihre Enden nicht unmittelbar auf den Pfeilern, sondern durch Vermittelung einer größeren Anzahl gußeiserner Walzen (bei der Britannia-Brücke 24 Paar von 0,15 m Durchmesser und 0,60 m Länge), welche sich zwischen einer auf dem Pfeiler befestigten gußeisernen Sohlplatte und einer eben solchen am Röhrenträger von unten befestigten Lagerplatte bewegen können.

Man hat auch den Röhrenträgern eine kreisrunde oder elliptische Querschnittsgestalt gegeben, namentlich hat Brunel cylindrische Blechröhrenträger für die Chepstow-Eisenbahnbrücke angewendet, an welchen die Brückenbahn aufgehängt ist. Die Kreisform des Querschnittes gewährt jedoch keine vortheilhafte Benutzung des Materials (s. §. 45), auch haben die Versuche von Fairbairn gezeigt, daß sich die Röhrenträger mit kreisrundem Querschnitt leicht zusammendrücken, wobei sie an den Enden breiter und niedriger, in der Mitte höher und

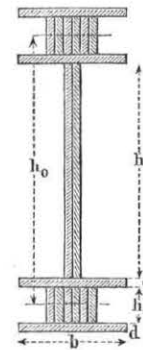
schmäler werden. Diesen Mangel einer Veränderung der Querschnittsform zeigen auch die Träger von elliptischen Querschnitten, wenn auch in geringerem Maße als die von kreisrunder Querschnittsgestalt.

Anmerkung. Bei den Festigkeitsversuchen, welche Hodgkinson an Röhren von kreisförmigen, elliptischen und rectangulären Querschnitten angestellt hat, wurde nicht nur bestätigt, daß die letzteren unter übrigens gleichen Umständen mehr Stärke besitzen als die ersteren, sondern auch noch dargethan, daß die an beiden Enden ausliegende und in der Mitte belastete Röhre von oben herein, also durch Zerdrücken und nicht durch Zerreißen zerbricht. Es hat daher das Schmiedeeisen mit dem Holze die Eigenschaft gemein, daß es gegen Zerreißen mehr widersteht, als gegen Zerdrücken, während es bei dem Gußeisen umgekehrt ist. Deshalb versieht man auch die Decke der Röhre mit mehr Zellen, als den Boden.

Die Tragfähigkeit eines Röhrenträgers läßt sich wie diejenige eines Blechträgers von  $\perp$  förmigem Querschnitte berechnen, indem man als den Gurtungsquerschnitt denjenigen der den Boden und die Decke bildenden Zellenwänden und als Entfernung der Gurtungsschwerpunkte den Abstand der Mitten dieser Zellen ansieht.

Ist  $h$  die Höhe der Blechwände oder der Röhre im Lichten, und  $h_1$  die lichte Höhe der Zellen, sowie  $b$  die Breite der Gurtungen und  $n$  die Anzahl der verticalen Zellenwände, und nimmt man alle Blechstärken gleich  $d$  an, so hat man einen Gurtungsquerschnitt nach Fig. 218 zu

Fig. 218.



$$F_g = 2bd + nh_1d = (2b + nh_1)d, \quad (1)$$

den Abstand der Mitte der Gurtungen von einander

$$h_0 = h + h_1 + 2d \quad (2)$$

und den ganzen Querschnitt des Röhrenträgers

$$F' = 2F_g + F_m = 2(2b + nh_1 + h)d, \quad (3)$$

daher das Gewicht der ganzen Röhre von der Länge  $l$  bei dem specifischen Gewichte  $\gamma$  gleich

$$G = F'\gamma l \quad (4)$$

Ist dann noch die Belastung durch die Brückenbahn und die bewegliche Last pro Längeneinheit gleich  $k$ , so hat man bei voller Belastung der Brücke das Moment für die Mitte durch

$$M = \frac{ql^2}{8} = (k + F'\gamma) \frac{l^2}{8}, \quad (5)$$

woraus der Gurtungsquerschnitt durch

$$M = (k + F'\gamma) \frac{l^2}{8} = s_1 F_g h_0 \quad (6)$$



$$F_g = \frac{k + F\gamma}{s_1 h_0} \frac{l^2}{8} \dots \dots \dots (7)$$

und die Durchbiegung in der Mitte zu

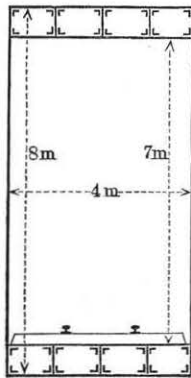
$$a = \frac{5}{384} \frac{(k + F\gamma) l^4}{E F_g h_0} \dots \dots \dots (8)$$

folgt.

Die Anwendung der Röhrenträger zu größeren Brücken findet heute nicht mehr statt, da die Verwendung des Materials bei denselben wenig vorthellhaft ist. Da nämlich bei fast allen Brücken die durch die Querträger aufgenommene Last auf die Hauptträger in einzelnen Punkten concentrirt übertragen werden muß, so erfordern die Blechwände an diesen Stellen Verstärkungen und es findet eine ungünstige mehr oder minder auf Biegung wirkende Beanspruchung der Construction zwischen den Anheftungspunkten der Querträger statt. Derselbe Uebelstand haftet den nach Fig. 212 ausgeführten engmaschigen Gitterträgern an, außerdem ist bei den letzteren die Untersuchung der Inanspruchnahme der einzelnen Gitterstäbe wegen deren vielfacher Vernietung mit einander eine schwierige und unzuverlässige. Diese Uebelstände sind vermieden bei den im Folgenden zu behandelnden Fachwerksconstructionen, welche in neuerer Zeit ganz allgemein für alle größeren Spannweiten die Blech-, Röhren- und engmaschigen Gitterbalken verdrängt haben. Nur für Zwischenconstructionen, z. B. für Schwellenträger und Querträger der Eisenbahnbrücken, sowie auch für Constructionen mit möglichst gleichmäßig verteilter Belastung, z. B. kleine Chausseebrücken, Unterzüge in Speichern und Fabrikräumen u. finden die Blechträger noch häufigere Verwendung.

Beispiel. Für eine eingleisige Eisenbahn soll eine Röhrenbrücke von 80 m Spannweite ausgeführt werden. Der Röhrenträger, Fig. 219, solle eine äußere

Fig. 219.



Höhe  $H = 8$  m, eine innere Höhe  $h = 7$  m, daher eine Höhe der Zellen in dem Boden und der Decke von  $h_1 = 0,5$  m, sowie eine Breite von 4 m erhalten. Wenn jede der beiden Gurtungen durch drei Zwischenwände in vier Zellen getheilt wird, und für die verticalen Blechwände wegen der Schubspannungen eine Blechstärke von 15 mm angenommen wird, so sind die Querschnittsdimensionen der Gurtungen unter der Bedingung zu ermitteln, daß die Verkehrslast  $k = 4000$  kg pro laufenden Meter beträgt und die höchste Spannung den Betrag  $s = 6$  kg pro Quadratmillimeter nicht übersteigt.

Zur Ausbildung der Gurtungen sind im Innern der Zellen 16 Winkelleisen erforderlich, deren Schenkellänge zu 60 mm bei einer Stärke von 12 mm angenommen werde. Nach Abzug eines Nietloches für

die 20 mm dicken Nietbolzen verbleibt für jedes dieser Winkelleisen ein wirksamer Querschnitt von

$$(60 + 60 - 12 - 20) 12 = 1056 \text{ qmm} = 0,001056 \text{ qm},$$

daher für 16 Winkelleisen

$$16 \cdot 0,001056 = 0,0169 \text{ qm}.$$

Bezeichnet man mit  $d$  die gesuchte Stärke der Zellenwände, so hat man den wirksamen Querschnitt einer Gurtung

$$F_g = (2 \cdot 4 + 5 \cdot 0,5) d + 0,0169 = 10,5 d + 0,0169,$$

und den Querschnitt des ganzen Trägers

$$F = 2 F_g + 2 \cdot 7 \cdot 0,015 = (21 d + 0,2438) \text{ qm}.$$

Nimmt man das spezifische Gewicht 7,5 des Eisens mit Rücksicht auf Niete und Verstärkungen um 20 Proc. größer, also zu  $1,2 \cdot 7,5 = 9$  an, so erhält man das Trägergewicht pro laufenden Meter zu:

$$G = (21 d + 0,2438) 9000 \text{ kg} = \text{rot } 189\,000 d + 2200 \text{ kg}.$$

Das Maximalmoment in der Mitte findet sich, wenn man noch für die Schienen und Schwellen 200 kg für den laufenden Meter rechnet, zu:

$$M = (4000 + 200 + 2200 + 189\,000 d) \frac{80^2}{8} = 5120\,000 + 151\,200\,000 d.$$

Man erhält daher nach (6)

$$5120\,000 + 151\,200\,000 d = 6\,000\,000 \cdot (10,5 d + 0,0169) 7,5,$$

oder

$$5,120 - 0,7605 = 472,5 d - 151,2 d;$$

woraus

$$d = \frac{4,3595}{321,3} = 0,0136 = \text{rot } 14 \text{ mm}$$

folgt.

Mit diesem Werthe ergibt sich nun

$$F_g = 10,5 \cdot 0,014 + 0,0169 = 0,1639 \text{ qm}$$

und

$$G = 189\,000 \cdot 0,014 + 2200 = 4846 \text{ kg};$$

folglich erhält man nach (8) die Durchbiegung der belasteten Brücke in der Mitte bei einem Elasticitätsmodul  $E = 20\,000$  (für Millimeter) zu:

$$a = \frac{5}{384} \frac{4200 + 4846}{20\,000 \cdot 1000^2 \cdot 0,1639 \cdot 7,5} \frac{80^4}{18 \cdot 163,9} = \frac{9,046 \cdot 64}{18 \cdot 163,9} = 0,196 \text{ m}.$$

**Fachwerke.** Um bei der Ausführung größerer Träger das Material §. 53. möglichst vollständig auszunutzen, was nach dem früher Bemerkten nur bei gleichmäßiger Anstrengung aller Fasern eines Stückes durch Zug- oder Druckkräfte, nicht aber bei Biegungen möglich ist, sind die Fachwerke entstanden. Ein Fachwerksträger besteht im Allgemeinen aus zwei Stäben oder Stangen, den sogenannten Gurtungen, Längsbändern oder Streckbäumen, welche durch ein System von Zwischenstäben derart zu einem steifen Träger verbunden sind, daß in Folge der Belastung in allen Stäben nur Kräfte hervorgerufen werden, welche nach den Längsaxen

dieser Stäbe gerichtet sind, die letzteren daher nur auf einfachen Zug oder Druck, nicht aber auf Biegung beanspruchen. Um dies zu erreichen, müssen die einzelnen Glieder der Construction unter sich zu Dreiecken derartig verbunden sein, daß in den Ecken dieser Dreiecke, den sogenannten Knotenpunkten, eine gewisse Drehbarkeit der einzelnen Dreiecksseiten gegen einander wie um Charniere ermöglicht ist. Nur unter dieser Voraussetzung kann jedes einzelne Glied unter Einfluß der auf dasselbe wirkenden Zug- oder Druckkraft eine Längenänderung annehmen, ohne einen Zwang in Form einer Biegung auf die Nachbarglieder auszuüben, wie dies in dem Falle einer steifen, nicht drehbaren Verbindung in den Ecken der Fall sein müßte. Bei sehr vielen Constructionen bildet man in der That die Knotenpunkte zu Charnieren aus, in welchen ein Drehbolzen die in diesem Knoten zusammenstreichenden Glieder vereinigt. Bei größeren Spannweiten und Kräften dagegen würde sich oft die erforderliche Haltbarkeit durch einen einzigen Bolzen praktisch nicht erreichen lassen, in welchen Fällen man daher zu einer steifen Verbindung durch mehrere Nieten gezwungen ist. Hierdurch werden allerdings auf die in einem Knotenpunkte zusammentreffenden Glieder durch die Längenänderung eines derselben biegende Einwirkungen ausgeübt, doch fallen dieselben im Verhältnisse zu der Gesamtanstrengung um so geringer aus, je größer die Längen der einzelnen Glieder und des ganzen Fachwerkes sind. Man kann daher bei allen größeren Constructionen von diesen Biegungen, deren Bestimmung sich übrigens der Rechnung entziehen würde, absehen, und es soll im Folgenden immer eine drehbare, charnierartige Verbindung in den Knotenpunkten vorausgesetzt werden. Jedenfalls muß bei der Ausführung des Fachwerkes sorgsam darauf Bedacht genommen werden, daß in jedem Knotenpunkte die geometrischen Axen der sämmtlichen von demselben ausgehenden Glieder oder Stäbe sich thatsächlich genau in einem Punkte schneiden.

Aus der gegebenen Bedingung, daß kein Glied einer anderen als einer axial gerichteten Kraft ausgesetzt sein soll, ergibt sich weiter, daß die äußeren angreifenden Kräfte, also die Belastungen und Auflagerreactionen immer in den Knotenpunkten zum Angriffe gebracht werden müssen. Wenn zuweilen auch ein Glied, z. B. eine Stange, zwischen ihren Endpunkten von einer Kraft ergriffen wird, so ist es doch nöthig, daß die Richtung der Stange mit derjenigen dieser Kraft zusammenfällt, daß also beispielsweise eine Gewichtsbelastung in dieser Weise nur an einer verticalen Stange (Hängestange) angreifen darf, während horizontale oder geneigte Glieder nur in den End- oder Knotenpunkten belastet werden dürfen. Man erreicht bei den Fachwerksträgern für Brücken diese Belastungsart dadurch, daß man das Gewicht der Fahrbahn nebst der mobilen Belastung durch kleinere Quer- oder Zwischenträger aufnimmt, von welchen jeder an den beiden Enden mit

den correspondirenden Knotenpunkten von zwei parallelen Hauptfachwerksträgern in Verbindung steht, sei es, daß diese Querträger direct auf den Hauptträgern ruhen, oder daß durch verticale Pfosten oder Hängeeisen die Last der Querträger auf die Knotenpunkte übertragen wird. Hierbei hängt es von den örtlichen Verhältnissen, namentlich von der Höhenlage der Fahrbahn ab, ob die Belastung auf die Knotenpunkte der oberen oder der unteren Gurtung übertragen wird. Bei den Dachstühlen wird die durch das Eigengewicht der Deckfläche gebildete Belastung durch die Sparren auf die sogenannten Pfetten übertragen, welche, entsprechend den Querträgern der Brücken, direct die Knotenpunkte und zwar hier ausschließlich diejenigen des oberen Streckbaumes belasten, während unter Umständen auch noch durch verticale Hängeeisen das Gewicht von etwa zu tragenden Zwischendecken auf die Knotenpunkte übertragen wird.

Das Eigengewicht der das Fachwerk bildenden einzelnen Stangen wird natürlich bei allen nicht verticalen Gliedern immer eine Biegung derselben aufstreben, doch wird diese Anstrengung im Verhältnisse zu der durch die Last der ganzen Construction erzeugten als gering zu vernachlässigen sein, da die einzelnen Glieder meistens nur geringe Längen erhalten. Man pflegt daher auch das Eigengewicht der Fachwerksconstruction als in den Knotenpunkten vereinigt zu denken, wie es im Folgenden immer geschehen soll. In Betreff der Vertheilung der Last pflegt man dieselbe, sowohl das Eigengewicht der Construction wie auch die zufällige oder Verkehrslast, als über die Horizontalprojection des Bauwerkes gleichmäßig vertheilt zu denken, und es sollen im Folgenden wieder unter  $p$  und  $k$  diese specifischen Belastungen und unter  $q = p + k$  die Totalbelastung pro Längeneinheit des Fachwerksträgers verstanden werden. Hierbei muß bemerkt werden, daß eine gleichmäßige Vertheilung der Verkehrslast zwar bei den Brücken streng genommen nicht stattfindet, indem hierbei die Lasten der Fahrzeuge sich in den Berührungspunkten der Räder mit der Bahn concentriren, doch ist dieser Umstand nur für kleinere Brücken von einiger Bedeutung, in welchen Fällen man daher

Fig. 220.

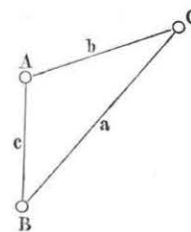
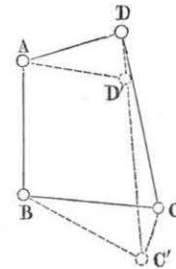


Fig. 221.



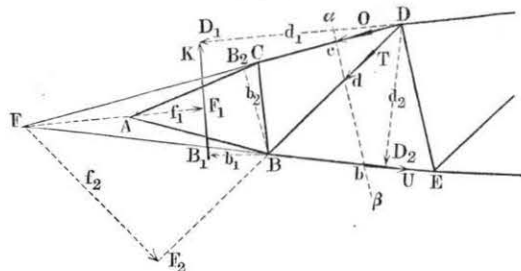
auch die jeweilige Lastvertheilung der Rechnung zu Grunde zu legen hat.

Aus dem Vorhergehenden folgt auch, warum die einzelnen Glieder eines Fachwerkes Dreiecke bilden müssen, denn nur in diesem Falle ist die relative Lage der einzelnen Knotenpunkte A, B und C, Fig. 220, durch

die Längen  $a$ ,  $b$  und  $c$  der einzelnen Stücke unverrückbar festgestellt, und eine Formänderung des Dreiecks kann nur in Folge elastischer Verlängerungen und Verkürzungen dieser Stücke eintreten. Bei mehr als drei Seiten, z. B. bei dem Viereck  $ABCD$ , Fig. 221 (a. v. S.), dagegen ist vermöge der Drehbarkeit in den Eckpunkten die gegenseitige Lage der letzteren zu einander vollkommen unbestimmt, und es kann diese Construction sehr viele andere Lagen, wie z. B.  $ABC'D'$ , annehmen.

Um nun ein Fachwerk hinreichend fest auszuführen, damit es den auf dasselbe wirkenden äußeren Kräften, welche in jedem Falle der Ausführung gegeben sind, mit genügender Sicherheit widerstehen kann, hat man für jedes Constructionsglied diejenige Anstrengung, Zug- oder Druckspannung, zu ermitteln, welcher dieses Glied in dem für dasselbe ungünstigsten Belastungszustande ausgesetzt ist. Kennt man diese Anstrengung, so ist es nach den in Thl. I, Abschn. IV angegebenen Regeln leicht, die Querschnittsdimensionen für das Element so zu bestimmen, daß dasselbe die gefundene Spannung mit Sicherheit zu äußern vermag. Wie sich aus dem Folgenden ergeben wird,

Fig. 222.



tritt diese ungünstigste Anstrengung der einzelnen Glieder keineswegs für alle verschiedenen Stücke bei derselben Belastung ein, und es ist daher nöthig, vor der gedachten Ermittlung der betreffenden Anstrengung in einem Gliede denjenigen Belastungszustand des ganzen Fachwerkes festzustellen, für welchen jene Anstrengung den größtmöglichen Werth erreicht. Ist diese Belastung festgestellt, so gelangt man zur Kenntniß der gesuchten Spannung im Allgemeinen in folgender Weise.

Gelegt  $A, B, C, D, E, \dots$ , Fig. 222, seien die Knotenpunkte irgend eines wie vorstehend beschriebenen Fachwerkes, welches in der Ebene der Zeichnung ganz beliebigen äußeren Kräften, etwa Belastungen und Auflagerreactionen, ausgesetzt sein mag, und es handele sich darum, die innere Spannkraft zu bestimmen, welche beispielsweise in der Stange  $BD$  durch diese Belastungen hervorgerufen wird. Man denkt sich dann durch einen beliebigen ebenen

oder gekrümmten Schnitt, etwa in der Richtung  $\alpha\beta$ , das ganze Fachwerk in zwei Theile zerlegt, und betrachtet z. B. in der Figur denjenigen  $Acdh$ . Wenn man an den Schnittstellen  $c$ ,  $d$  und  $h$  der durchschnittenen Glieder solche Kräfte  $O, T, U$  angebracht denkt, welche der Richtung und Größe nach genau mit denjenigen inneren Spannkraften übereinstimmen, die vor der Durchschneidung von dem anderen Theile des Fachwerkes  $cDEhd$  auf das betrachtete Stück  $Acdh$  ausgeübt wurden, so wird offenbar an dem Gleichgewichtszustande des letzteren nichts geändert. Man hat daher lediglich die Gleichgewichtsbedingungen für den betreffenden Fachwerkstheil  $Acdh$  zu untersuchen, welcher außer den Spannungen  $O, T$  und  $U$  noch gewissen äußeren, auf dieses Stück wirkenden Kräften ausgesetzt ist. Diese letzteren Kräfte können nach dem Vorangehenden nur in den Knotenpunkten wie  $A, B, C$  angreifen und sämmtlich in der Zeichnungsebene liegen; dieselben lassen sich, als bekannte Kräfte, jederzeit zu einer Mittelkraft zusammensetzen, welche im Allgemeinen nicht durch einen Knotenpunkt gehen wird, und welche in der Figur etwa durch  $K$  der Richtung und Größe nach vorgestellt sein mag.

Es handelt sich also jetzt einfach darum, die drei der Richtung nach bekannten Kräfte  $O, T$  und  $U$  ihrer Größe nach so zu bestimmen, daß sie mit der bekannten Kraft im Gleichgewichte sind; mit anderen Worten, die Kraft  $K$  nach den drei Richtungen von  $O, T$  und  $U$  zu zerlegen. Diese Aufgabe ist immer in bestimmter Weise zu lösen, vorausgesetzt, daß nicht etwa drei der Kräfte sich in einem Punkte schneiden, was hier nicht vorausgesetzt werden soll.

Die gedachte Aufgabe kann nach Thl. I analytisch dadurch gelöst werden, daß man die Summe der verticalen und die Summe der horizontalen Componenten aller Kräfte, sowie die Summe von deren Momenten um einen beliebigen Punkt einzeln gleich Null setzt, und die drei dadurch erhaltenen Gleichungen, in denen  $O, T$  und  $U$  als Unbekannte vorkommen, nach diesen Größen auflöst. Diese Lösung, die immer zum Ziele führt, ist zwar nicht schwierig, aber umständlich in der Ausführung, da die Auflösung der drei Gleichungen wegen der in ihnen vorkommenden trigonometrischen Functionen zu Unbequemlichkeiten der Rechnung führt.

Man kann aber noch in einfacherer Art zur Bestimmung der gesuchten Spannungen  $O, T$  und  $U$  gelangen, und zwar ebensowohl durch Rechnung wie auf graphischem Wege. Wählt man nämlich zum Momentenmittelpunkte den Durchschnitt von zweien der unbekannten drei Kräfte, so ist hierfür das Moment dieser beiden Kräfte gleich Null, und man erhält eine Gleichung zwischen der dritten Kraft und der Mittelkraft  $K$  der äußeren Kräfte, woraus die dritte Kraft ohne Weiteres folgt. So z. B. erhält man



für die Spannkraft  $O$  die Momentengleichung in Bezug auf den Durchschnittpunkt  $B$  von  $T$  und  $U$ :

$$K.BB_1 = O.BB_2, \text{ also } O = K \frac{b_1}{b_2},$$

wenn die Abstände  $BB_1$  mit  $b_1$  und  $BB_2$  mit  $b_2$  bezeichnet werden. In gleicher Weise liefert der Durchschnittpunkt  $D$  zwischen  $O$  und  $T$  für  $U$  die Gleichung:

$$K.DD_1 = U.DD_2, \text{ oder } U = K \frac{d_1}{d_2}$$

und endlich der Durchschnittpunkt  $F$  zwischen  $O$  und  $U$  für  $T$  die Gleichung:

$$K.FF_1 = T.FF_2, \text{ also } T = K \frac{f_1}{f_2}.$$

Man erhält also jede der gesuchten Kräfte direct proportional mit der Mittelkraft  $K$ , und zwar ist das Verhältniß durch zwei Gerade wie  $b_1$  und  $b_2$ ,  $d_1$  und  $d_2$ ,  $f_1$  und  $f_2$  gegeben, welche man entweder unmittelbar aus der Zeichnung abgreifen oder auch leicht aus den Längen und Neigungen der einzelnen Constructionsglieder durch Rechnung bestimmen kann. Diese Methode der statischen Momente ist zuerst von Ritter aufgestellt und in dessen Werke\*) consequent durchgeführt worden, worauf wegen des Näheren verwiesen werden mag. Bei der Führung des Schnittes  $\alpha\beta$  hat man nur darauf zu achten, daß man nicht mehr als drei Constructionsglieder durchschneidet, deren Spannungen noch unbekannt sind.

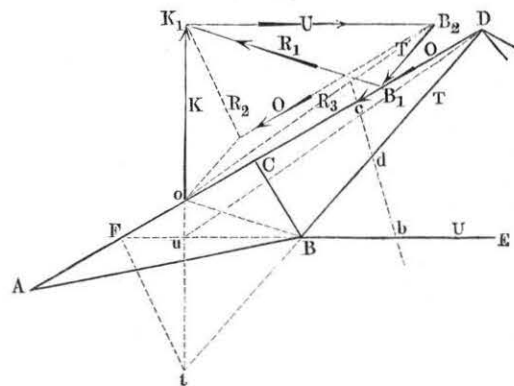
Die Feststellung der Richtungen dieser Spannkraft, d. h. die Bestimmung, ob dieselben die Constructionstheile auf Zug oder Druck beanspruchen, ist immer leicht aus ihrer Drehungsrichtung zu bewirken. Beispielsweise sucht die Kraft  $K$  das abgeschnittene Stück in der Figur um den Punkt  $B$  rechts um zu drehen, folglich muß die Kraft  $O$  im linksdrehenden Sinne auf das betrachtete Stück  $ACB$  wirken, d. h.  $Cc$  auf Druck beanspruchen. Ebenso findet in  $Bb$  ein Zug statt wegen des linksdrehenden Sinnes, welchen  $U$  in Bezug auf  $D$  haben muß, und  $BD$  wird auf Druck in Anspruch genommen, da die Kraft  $K$  um den Punkt  $F$  linksdrehend wirkt, folglich zum Gleichgewichte eine rechtsdrehende Spannung  $T$  in  $d$  erfordert.

Will man die unbekannten Spannkraft auf graphischem Wege bestimmen, so ist die Ermittlung nicht minder einfach. Es sei wieder durch einen Schnitt  $b c$ , Fig. 223, ein Stück  $ACBbdc$  von einem beliebigen Fachwerke

\*) Elementare Theorie u. Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen von Aug. Ritter, 1863.

getrennt und die Resultirende aller äußeren Kräfte durch  $K$  dargestellt. Vier Kräfte, wie  $K$ ,  $O$ ,  $T$  und  $U$  können nur im Gleichgewichte sein, wenn irgend zwei von ihnen eine Mittelkraft geben, welche mit der Mittelkraft der beiden anderen in derselben Geraden gleich und entgegengesetzt ist. Denkt man sich daher die gegebene Kraft  $K$  mit einer der unbekannten Spannungen, z. B.  $O$ , zu einer Resultirenden zusammengesetzt, welche bekanntlich durch den Schnittpunkt  $o$  geht, so muß diese Resultirende auch den Durchschnitt  $B$  der beiden anderen Spannungen  $T$  und  $U$  in sich aufnehmen, da deren Mittel-

Fig. 223.

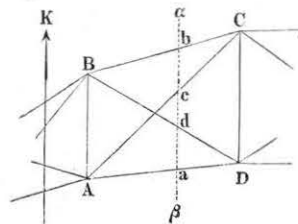


kraft durch diesen Punkt  $B$  geht, und beide Mittelkräfte nach dem eben Gesagten in einander fallen. Daraus ergibt sich ohne Weiteres die folgende Construction. Man zerlegt  $K$  in zwei Seitenkräfte, von denen die eine in die Richtungslinie der zu suchenden Spannung, etwa  $O$ , hineinfällt, während die andere von dem Durchschnitte  $o$  dieser Spannung mit der gegebenen Kraft  $K$  nach dem Durchschnitte  $B$  der beiden anderen Spannungen  $T$  und  $U$  gerichtet ist. Trägt man beispielsweise von dem Durchschnittpunkte  $o$  zwischen  $K$  und  $O$  die Strecke  $oK_1 = K$  auf, und zieht durch  $K_1$  eine Parallele  $K_1B_1$  zu  $OB$ , so erhält man in  $oB_1$  die von  $K$  in dem Stücke  $CD$  erzeugte Kraft, welcher in der Schnittstelle  $c$  eine entgegengesetzte Kraft  $B_1o$  das Gleichgewicht hält, d. h. das Glied  $CD$  wird durch die Kraft  $O = B_1o$  gedrückt. Das Dreieck  $oB_1K_1$  liefert ferner in der dritten Seite  $B_1K_1$  die andere Componente  $R_1$ , welcher die beiden Spannkraft  $U$  und  $T$  das Gleichgewicht halten müssen; man hat daher nur nöthig, diese Kraft  $B_1K_1 = R_1$  nach den Richtungen von  $U$  und  $T$  zu zerlegen, indem man durch  $K_1$  eine Parallele mit  $BE$  und durch  $B_1$  eine Parallele mit  $BD$  zieht. Man erhält dann  $U = K_1B_2$  als eine in  $BE$  wirkende Zugspannung, während  $T = B_2B_1$  als Druckspannung in der Strebe  $DB$  sich ergibt. Man

gelangt natürlich zu denselben Resultaten, wenn man die Kraft  $K$  nach der Richtung von  $T$  oder  $U$  und der entsprechenden Verbindungslinie  $tF$  und bezw.  $uD$  zerlegt, in welchen Verbindungslinien zwei andere Mittelkräfte  $R_2$  und  $R_3$  wirken. Die betreffenden Constructionen sind in der Figur punktiert angegeben. Man wird natürlich in jedem einzelnen Falle die am bequemsten ausführbare Zerlegung vornehmen.

Im Vorstehenden wurde immer vorausgesetzt, daß das Fachwerk sich in zwei Theile durch einen Schnitt zerlegen lasse, welcher nur drei Constructionsglieder trifft. Diese Bedingung ist aber nicht immer erfüllt, es kommen vielmehr, wie die folgenden Beispiele zeigen werden, vielfach Constructionen vor, bei denen der Schnitt mehr als drei Glieder trennt. Wenn in einem solchen Falle, für welchen etwa  $n$  die Anzahl der Schnittstellen ist, die vorliegende Aufgabe zu bestimmten Werthen für die gesuchten Spannkraften führen soll, so muß es möglich sein, durch anderweite Bedingungen die Spannungen in  $n - 3$  Gliedern festzustellen, da durch die vorstehend angegebene Ermittlung immer nur die Feststellung von drei Bestimmungsstücken (Kraftgrößen) geschehen kann. Ist eine solche anderweite Feststellung der Spannungen in einzelnen Gliedern nicht möglich, so muß die Aufgabe überhaupt als unbestimmt angesehen werden. Ein solcher Fall liegt z. B. vor in Fig. 224, in welcher das Trapez  $ABCD$  durch zwei diagonale

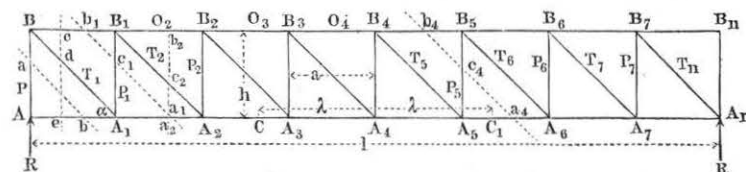
Fig. 224.



Glieder  $AC$  und  $BD$  durchsetzt ist. Irgend ein durch dieses Trapez geführter Schnitt wie  $\alpha\beta$  trifft vier Glieder in  $a, b, c, d$  und es ist klar, daß die drei allgemeinen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der Kräfte in einer Ebene unzureichend sind zur Bestimmung der vier unbekannten Kräfte an den Schnittstellen. Man würde demnach auch, wenn man etwa nach der obigen Methode der statischen Momente den Durchschnitt zweier der Kräfte als Momentenmittelpunkt annehmen wollte, eine Momentengleichung erhalten, welche noch die beiden anderen Kräfte als Unbekannte enthielte, folglich eine Bestimmung derselben nicht zuließe. Dieser Fall hat ein besonderes Interesse wegen seines häufigen Vorkommens bei Fachwerkträgern für Brücken, bei denen in Folge der Bewegung der Last gewisse Glieder abwechselnd gezogen und gedrückt werden. Wenn man in solchen Fällen die beiden Diagonalglieder  $AC$  und  $BD$  ihrer Anordnung zufolge mit der Fähigkeit begabt denkt, nur Zugkräften aber keinen Druckkräften widerstehen zu können, so wird dadurch die erwähnte Unbestimmtheit gehoben, indem diejenige Diagonale, von welcher bei der vorausgesetzten Belastungsart eine Druckwirkung erfordert würde, als

nicht vorhanden angesehen werden muß, und man es daher nur mit drei Gliedern zu thun hat, deren Spannungen nach dem Vorangehenden immer in bestimmter Art ermittelt werden können. Das Nähere über die Wirkung solcher sogenannter Gegenstreben wird in dem Nachfolgenden aus den einzelnen Beispielen sich ergeben, welche nunmehr näher ins Auge gefaßt werden sollen.

**Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen.** Eine für Brücken- §. 54. bauten und ähnliche Ausführungen häufige Construction stellen die Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen, Parallelträger, dar. Ein solcher Träger besteht in seiner einfachsten Anordnung aus zwei horizontalen Streckbäumen oder Gurtungen  $AA_n$  und  $BB_n$ , Fig. 225, welche in



gleichen Abständen durch eine Anzahl verticaler Ständer oder Pfosten  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$  mit einander verbunden sind. In die so entstehenden rechteckigen Felder sind ferner diagonale Stangen  $A_1B, A_2B_1, A_3B_2, \dots$  eingesetzt, welche Streben oder Bänder genannt werden, je nachdem sie gedrückt oder gezogen werden. Zwei solcher Träger, welche, an den Enden bei  $A$  und  $A_n$  auf festen Pfeilern aufliegend, parallel neben einander die zu überbrückende Oeffnung überspannen, tragen die Last der Brückenbahn in oben besprochener Art mit Hilfe von Querträgern, die in den unteren oder oberen Knotenpunkten  $A, A_1, A_2, \dots$  bezw.  $B, B_1, B_2, \dots$  auf den Hauptträgern aufliegen. Es möge zunächst eine Belastung der unteren Knotenpunkte  $A$  vorausgesetzt werden. Ist die ganze der Rechnung zu Grunde zu legende Spannweite oder horizontale Entfernung  $AA_n$  der beiden Stützen durch  $l$  ausgedrückt, so soll die Länge  $a$  jedes Trägerfeldes, bei  $n$  Feldern also  $a = \frac{l}{n}$ , als Einheit angenommen werden, indem die auf ein solches Feld entfallende totale Belastung durch  $q$  bezeichnet werde, welche sich zusammensetzt aus dem Eigengewichte  $p$  und der Verkehrslast  $k$  eines Brückenfeldes von der halben Breite der Brücke. Es ist ersichtlich, daß jeder Knotenpunkt zwischen den Stützen eine Belastung gleich  $q$ , dagegen jeder der Endpunkte  $A$  und  $A_n$  nur eine Belastung gleich  $\frac{q}{2}$  empfängt, wenn, wie

zunächst angenommen werden soll, die ganze Brücke gleichförmig mit der Verkehrslast  $nk$  bedeckt ist. Für diesen Fall bestimmen sich die Druckkräfte auf die Stützen  $A$  und  $A_n$  und die denselben gleichen und entgegengesetzten Reactionen der Pfeiler zu je  $\frac{nq}{2}$ . Man kann indessen bemerken,

daß von jeder Pfeilerreaction ein Theil gleich  $\frac{q}{2}$  direct durch die in  $A$  und  $A_n$  wirkende Belastung im Gleichgewichte gehalten wird, so daß man sich vorzustellen hat, der Träger werde an jedem Ende durch eine vertical aufwärts gerichtete Reaction

$$R = \frac{n-1}{2} q \quad (1)$$

angegriffen. Diese Reactionen und die Belastungen  $q$  der  $n-1$  zwischenliegenden Knotenpunkte sind daher als die einzigen äußeren Kräfte für den Träger anzusehen, wenn von der Einwirkung des Winddruckes abgesehen wird. Um die diesen äußeren Kräften das Gleichgewicht haltenden inneren Kräfte der einzelnen Fachwerkglieder zu bestimmen, denkt man sich in der im vorigen Paragraphen angegebenen Art den Träger an den entsprechenden Stellen durch Schnitte in zwei Theile zerlegt. Hiernach erhält man dann die Spannkraften in folgender Art, wobei bemerkt werden soll, daß mit  $P$  die Kräfte in den Pfosten, mit  $T$  die in den Diagonalen und mit  $O$  die in den oberen, mit  $U$  die in den unteren Gurtungstheilen bezeichnet werden sollen.

Ein Schnitt nach  $ab$  schneidet von dem Träger das Dreieck  $aAb$  ab, auf welches als einzige äußere Kraft die Pfeilerreaction

$$R = \frac{n-1}{2} q$$

wirkt, welcher Kraft daher die in  $a$  wirkende Druckkraft

$$-R = -\frac{n-1}{2} q$$

das Gleichgewicht hält; mit anderen Worten, der Endpfosten  $AB$  wird durch eine Kraft

$$P = R = \frac{n-1}{2} q \quad (2)$$

auf Druck beansprucht. In dem Gurtungstheile  $AA_1$  findet keinerlei Spannung statt, da eine horizontale Kraft nicht vorhanden ist, welche aufgehoben werden müßte.

Ein Schnitt nach  $cde$  liefert zwei Kräfte  $O_1$  in  $c$  und  $T_1$  in  $d$ , welche sich durch die Momentengleichungen in Bezug auf  $A_1$  und  $B_1$  als Drehpunkte bestimmen, und zwar folgt für  $A_1$  als Momentenmittelpunkt:

$$Ra + O_1 h = 0; O_1 = -R \frac{a}{h} = -\frac{a}{h} \frac{n-1}{2} q \quad (3)$$

wenn mit  $h$  die verticale Entfernung der Schwerpunkte beider Gurtungen bezeichnet wird. Das negative Zeichen in (3) deutet darauf hin, daß die Spannkraft  $O_1$  in  $c$  nach links gerichtet, die Gurtung  $BB_1$  also gedrückt ist. In gleicher Weise erhält man für den Mittelpunkt der Momente in  $B_1$ :

$$Ra = T_1 a \sin \alpha,$$

woraus

$$T_1 = \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{n-1}{2 \sin \alpha} q \quad (4)$$

folgt, wenn  $\alpha = BA_1A$  die Neigung der Diagonalen gegen den Horizont bedeutet.

Weiter ergibt ein Schnitt  $a_2 c_2 b_2$  für den Mittelpunkt der Momente in  $A_2$  aus

$$R2a - qa = O_2 h; O_2 = \frac{R2a - qa}{h} = \frac{M_2}{h},$$

wenn man das Biegemoment des Balkens in  $A_2$   $R2a - qa$  mit  $M_2$  bezeichnet, oder man hat allgemein

$$O_v = \frac{M_v}{h} \quad (5)$$

Es ist ohne Weiteres klar, daß die Spannung  $U_2$  in dem unteren Gurtungsstücke  $A_1 A_2$  der Spannung  $O_1$  in  $BB_1$  der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt ist, wie man durch einen Schnitt nach  $a_1 c_1 b_1$  erkennt, wenn man  $B_1$  als Momentenmittelpunkt annimmt, wodurch man aus

$$Ra = U_2 h; U_2 = R \frac{a}{h} = -O_1 = -\frac{M_1}{h}$$

erhält. Dies geht auch schon daraus hervor, daß von den fünf das Stück  $AA_1 a_1 c_1 b_1 B$  angreifenden Kräften  $R$ ,  $O_1$ ,  $P_1$ ,  $U_2$  und  $q$  (in  $A_1$ ) die beiden  $O_1$  und  $U_2$  horizontal, die übrigen drei vertical gerichtet sind, und aus dieser Betrachtung folgt daher auch für die Kraft  $P_1$  in dem Pfosten  $A_1 B_1$ :

$$P_1 = R - q = V_1 \quad (7)$$

wenn mit  $V_1$  die verticale Scheerkraft in  $A_1$  bezeichnet wird.

Da die letztere Betrachtung für jedes andere Balkenfeld, also z. B. für den Schnitt  $a_4 c_4 b_4$ , in gleicher Weise gilt, und man dafür

$$U_5 = -O_5 = -\frac{M_5}{h} \text{ und } P_5 = R - 5q = V_5$$



erhält, so kann man allgemein schreiben:

$$U_{\nu+1} = -O_{\nu} = \frac{M_{\nu}}{h} = q \frac{a}{h} \nu \frac{n-\nu^*)}{2}, \dots (8)$$

$$P_{\nu} = R - \nu q = V_{\nu} = q \frac{n-1-2\nu}{2} \dots (9)$$

Aus der Anstrengung der Pfosten ergibt sich nun ohne Weiteres wieder die Spannkraft der Diagonalen, denn es ist klar, daß in irgend einem Knotenpunkte der nicht belasteten Gurtung, wie z. B. in  $B_5$ , die verticale Componente der Strebenkraft  $T_6 \sin \alpha$  gerade gleich der Kraft  $P_5$  in dem daselbst sich anschließenden Pfosten sein muß. Man hat daher

$$T_6 = \frac{P_5}{\sin \alpha},$$

oder allgemein

$$T_{\nu} = \frac{P_{\nu-1}}{\sin \alpha} = \frac{V_{\nu-1}}{\sin \alpha} \dots (10)$$

Demgemäß erhält man nach (9) für das letzte Feld die Spannung im Pfosten  $A_7 B_7$  zu

$$P_{n-1} = R - (n-1)q = -\frac{n-1}{2}q = -R,$$

während in dem Endpfosten  $A_n B_n$  die Kraft gleich Null ist. Ebenso ist die Spannung in dem letzten Stücke der oberen Gurtung  $B_7 B_n$  nach (5) gleich Null, während die Strebenkraft in  $A_n B_7$  zu

$$T_n = \frac{P_7}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

sich ergibt. Aus (5) und (8) erkennt man zunächst, daß die Spannung in den Gurtungen in der Mitte, wo das Moment  $M$  ein Maximum ist, den größten Werth und zwar oben links und unten rechts von dem mittleren Pfosten  $A_4 B_4$  annimmt. Da ferner in diesem Pfosten die Vertikalkraft  $V$  ihre Richtung umkehrt, indem dieselbe links von  $A_4 B_4$  aufwärts und rechts von  $A_4 B_4$  abwärts gerichtet ist, so folgt aus (9) und (10) auch ein entgegengesetzter Sinn für die Kräfte in den Pfosten und Streben zu beiden Seiten dieses mittleren Querschnittes. Während z. B. die Diagonale  $A_4 B_3$  durch die Kraft

\*) Das Biegemoment  $M_{\nu}$  in dem um  $\nu$  Felder vom Auflager entfernten Knotenpunkte bestimmt sich bei voller Belastung des Trägers zu

$$\begin{aligned} M_{\nu} &= R \nu a - q[a + 2a + 3a + \dots + (\nu-1)a] = q \frac{n-1}{2} \nu a - q \frac{\nu-1}{2} \nu a \\ &= q a \nu \frac{n-\nu}{2} \dots (8a) \end{aligned}$$

$$T_4 = \frac{R-3q}{\sin \alpha} = \frac{q}{2 \sin \alpha}$$

gezogen wird, ist die folgende Diagonale  $A_5 B_4$  einer ebenso großen Druckkraft

$$T_5 = \frac{R_1-4q}{\sin \alpha} = -\frac{q}{2 \sin \alpha} = -T_4$$

ausgesetzt. Der mittlere Pfosten  $A_4 B_4$  wird durch die verticale Componente von  $T_5$  mit  $\frac{q}{2}$  gezogen, indem dieser Pfosten im Gleichgewichte ist, unter dem Einflusse der im unteren Knotenpunkte  $A_4$  angreifenden Belastung  $q$  und der in  $A_4$  und  $B_4$  nach oben wirkenden gleichen verticalen Componenten der Diagonalspannungen  $T_4$  und  $T_5$ , von denen diejenige von  $T_4$  direct durch die Last  $q$  aufgenommen wird, während die Componente von  $T_5$  erst durch Vermittelung des Pfostens auf den Lastpunkt übertragen wird, daher in dem Pfosten eine Spannung  $\frac{q}{2}$  hervorruft. Wenn man annimmt, daß die Belastung  $q$  nicht in den unteren Knotenpunkten  $A$ , sondern in den oberen  $B$  angreift, so findet sich sogleich, daß dadurch in den Spannungen der einzelnen Fachwerksglieder nur insofern eine Aenderung eintritt, als jeder der inneren Pfosten noch außerdem einer zusätzlichen rückwirkenden Pressung im Betrage  $q$  ausgesetzt ist, während für die Endpfosten  $AB$  und  $A_n B_n$  diese Vermehrung natürlich nur den Betrag  $\frac{q}{2}$  hat. Demgemäß bestimmt sich z. B. in dem Pfosten  $AB$  die rückwirkende Pressung in dem Falle der Belastung des oberen Streckbaumes zu  $P = R + \frac{q}{2} = \frac{n}{2}q$ , während sie in dem letzten Stiele  $A_n B_n$  nun nicht gleich Null, sondern gleich  $\frac{q}{2}$  anzunehmen ist. Ebenso ist der mittlere Pfosten  $A_4 B_4$  in diesem

Falle nicht einer Zug-, sondern einer Druckspannung  $\frac{q}{2}$  ausgesetzt. Für die Kräfte in den Gurtungen und Diagonalen jedoch macht es gar keinen Unterschied, ob der obere oder untere Streckbaum zur Aufnahme der Belastung dient, oder ob die Brückenbahn zwischen beiden an den verticalen Pfosten befestigt ist. In dem letzteren Falle gelten offenbar für die Pfostenstücke oberhalb der Fahrbahn diejenigen Spannungen, welche vorstehend unter Zugrundelegung einer Belastung des unteren Streckbaumes gefunden wurden, während für die unterhalb der Fahrbahn befindlichen Stücke der Pfosten für jeden inneren Stiel noch eine rückwirkende Pressung von  $q$  und für jeden Endstiel von  $\frac{q}{2}$  hinzuzufügen ist, wie dies einer Belastung der oberen Gurtung entsprechen würde.

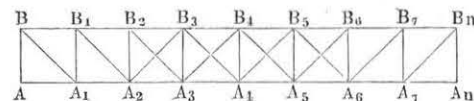
Aus dem Bemerkten ergibt sich, daß bei der in der Figur angenommenen Anordnung die Stiele links von der Mitte gedrückt und rechts von der Mitte gezogen werden, und daß umgekehrt die Diagonalen links von der Mitte als Zugbänder und rechts von der Mitte als Druckstreben wirken, welches Verhalten man so ausdrücken kann, daß bei einem Träger wie der vorliegende ist, in jeder Hälfte die Diagonalen gezogen werden, wenn sie nach dem zugehörigen Stützpunkte hin ansteigen, dagegen einer Pressung unterliegen, wenn sie nach der Mitte hin, also von dem zugehörigen Stützpunkte weg, ansteigen.

Derjenige Querschnitt, in welchem dieser Wechsel zwischen Zug- und Druckkräften in den Pfosten und Diagonalen eintritt, ist nach dem Vorhergehenden dadurch charakterisirt, daß in ihm die Verticalkraft  $V$  ihr Zeichen ändert oder durch Null geht, also in ihm auch das größte Moment  $M_{max}$  stattfindet. Dieser Querschnitt ist in der Mitte des Trägers nur dann gelegen, wenn, wie im Vorstehenden immer vorausgesetzt wurde, der Balken über seine ganze Länge gleichmäßig belastet ist. Wenn man dagegen eine nur theilweise Beschwering des Trägers durch die mobile Belastung annimmt, so fällt dieser Querschnitt des Maximalmomentes nicht mehr mit der Mitte zusammen. Es ist vielmehr in §. 36 gezeigt worden, daß bei dem Auffahren der mobilen Last auf den Träger etwa in der Richtung von  $A$  nach  $A_n$ , der gedachte Querschnitt für  $V = 0$  oder  $M = M_{max}$  aus der Trägermitte der ankommenden Last entgegengeht, bis er mit dem Anfangspunkte derselben in  $C$  in einem Abstände  $\lambda$  links von der Mitte zusammentrifft, um dann beim weiteren Fortschreiten der Last mit dieser zugleich nach der Mitte  $A_4$  und über diese hinaus bis zum Abstände  $\lambda = A_4 C_1$  sich zu bewegen und schließlich nach der Mitte zurückzukehren, sobald die ganze Trägerlänge mit der Last gleichmäßig bedeckt ist. Hieraus folgt daher, daß auch derjenige Querschnitt, in welchem ein Wechsel zwischen Zug- und Druckspannung der Füllungstheile eintritt, je nach der Bewegung der Last seine Lage innerhalb der Strecke  $CC_1$  verändert, oder daß die Pfosten und Diagonalen zu jeder Seite der Mitte in einem Abstände  $\lambda$  ebensowohl auf Druck wie auf Zug in Anspruch genommen werden.

Einen derartigen Wechsel in der Anstrengung der Diagonalen bald auf Zug bald auf Druck muß man nun mit Rücksicht auf die Verbindungen in den Knotenpunkten thunlichst vermeiden, und man pflegt die Anordnung so zu treffen, daß sämtliche Diagonalen entweder nur auf Druck oder nur auf Zug angesprochen werden können. Insbesondere pflegt man bei der Verwendung von Schmiedeeisen die Diagonalen immer so anzuordnen, daß sie als Bänder oder Zuganker zur Wirkung kommen, während man

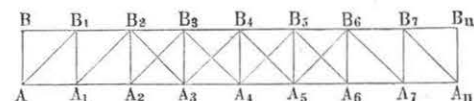
bei hölzernen Fachwerksträgern die Diagonalen meist als Druckstreben zur Wirkung bringt. Um dies zu erreichen, hat man nur das vorstehend ausgesprochene Gesetz zu berücksichtigen, wonach die Diagonalen in jedem der beiden Theile, in welche der Träger durch den Querschnitt des Maximalmomentes getheilt wird, entweder gezogen oder gedrückt werden, je nachdem sie nach dem zugehörigen Auflager hin ansteigen oder abfallen. Sollen daher die Diagonalen nur gezogen werden, so hat man sie nach Fig. 226 von dem unteren Knotenpunkte  $A_4$  aus beiderseits nach den Auflagern hin

Fig. 226.



ansteigen zu lassen, wie  $A_4 B_3$  und  $A_4 B_5$ , während eine Anordnung wie Fig. 227, bei welcher die Diagonalen von dem mittleren oberen Knotenpunkte nach den Auflagern hin abfallen, die Diagonalen als Druckstreben zur Wirkung bringt. Mit Rücksicht auf die angeführte, durch die Beweg-

Fig. 227.



lichkeit der Last erzeugte Verschiebung des Maximalmomentenquerschnitts aus der Mitte hat man daher, wenn die Diagonalen nur in einer Richtung widerstandsfähig sind, den mittleren Feldern bis zum Abstände  $\lambda$  zu jeder Seite der Mitte, Diagonalglieder nach beiden Richtungen, sogenannte Kreuz- oder Gegenstreben, zu geben, wie dies in den Figuren angedeutet ist. Selbstverständlich wird von diesen in den mittleren Feldern angeordneten gekreuzten Diagonalen immer nur die eine in Spannung versetzt, diejenige nämlich, in welcher eine solche Anstrengung (Zug oder Druck) hervorgerufen wird, gegen welche die Diagonalen vermöge ihrer Anordnung überhaupt nur reagiren können. Würde man annehmen müssen, daß diese Kreuzstangen eben so gut gegen Druck- wie Zugkräfte reagiren könnten, so würde nach dem im vorhergehenden Paragraphen Bemerkten die in jeder einzelnen Stange auftretende Kraft unbestimmt sein. Bei den schmiedeeisernen Fachwerken darf man annehmen, daß die Diagonalen von flacher bandförmiger Gestalt Druckkräften nicht zu widerstehen vermögen, indem sie zufolge ihrer größeren Länge einer seitlichen Ausbiegung unterworfen sind, weshalb man bei schmiedeeisernen Fachwerken solche Diagonalen als Zugbänder nach Fig. 226 anzuordnen hat. Bei hölzernen und gußeisernen,

zwischen die Gurtungen gespreizten Diagonalen sind dieselben wesentlich geeignet, Druckkräften zu widerstehen, und erfordern dieselben daher die durch Fig. 227 dargestellte Anordnung. Sollen schmiedeeiserne Fachwerkglieder, wie die oberen Gurtungsteile und Pfosten, druckfähig sein, so hat man natürlich denselben geeignete Querschnitte zu geben, welche vermöge ihrer Form die obgedachte seitliche Ausbiegung nicht zulassen, worüber später noch Näheres angegeben werden wird.

Die Anzahl der mittleren Felder, welche mit Gegenstreben zu versehen sind, findet man dadurch, daß man für das System einfacher, von der Mitte aus nach beiden Seiten gleichzeitig steigender (Schmiedeeisen) oder gleichzeitig abfallender (Holz, bzw. Gußeisen) Diagonalen in der sogleich zu besprechenden Weise die größte und die kleinste Anstrengung jeder Diagonale ermittelt und jedes Feld, für welches diese Anstrengungen entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, mit einer Gegenstrebe versehen. Man kann zu dieser Bestimmung auch durch Berechnung der in Fig. 225 mit  $\lambda$  bezeichneten Entfernung  $A_4C = A_4C_1$  gelangen, um welche der Querschnitt des Maximalmomentes unter dem Einflusse der mobilen Last sich aus der Mitte verschiebt. Man findet diese Größe  $\lambda$  nach dem im §. 36 darüber Angeführten durch Gleichsetzung der beiden entgegengesetzten abscheerenden Kräfte, welche in  $C$  durch das Eigengewicht der ganzen Construction  $lp$  und durch die bis zum Punkte  $C$  von  $A$  aus aufgefahrene mobile Last  $\left(\frac{l}{2} - \lambda\right)k$  erzeugt werden. Diese Bedingung liefert, wenn  $p$  und  $k$  die betreffenden Belastungen pro Längeneinheit vorstellen:

$$\frac{pl}{2} - p\left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = k\left(\frac{l}{2} - \lambda\right)\frac{\frac{l}{2} - \lambda}{2l},$$

oder, wenn  $\frac{l}{2} - \lambda = AC = A_nC_1 = c$  gesetzt wird:

$$c^2 + 2\frac{p}{k}lc = \frac{p}{k}l^2.$$

Setzt man noch das Verhältniß

$$\frac{\text{Eigengewicht}}{\text{Verkehrslast}} = \frac{p}{k} = n,$$

so folgt aus der gefundenen Gleichung:

$$\begin{aligned} c &= \left(\frac{l}{2} - \lambda\right) = -nl + \sqrt{n^2 + n}l^2 \\ &= l(-n + \sqrt{n^2 + n}) \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

Hieraus erhält man für:

$n = \frac{p}{k} =$	1	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$c = \frac{l}{2} - \lambda =$	0,414 l	0,366 l	0,348 l	0,325 l	0,290 l	0,232 l
$\lambda =$	0,086 l	0,134 l	0,152 l	0,175 l	0,210 l	0,268 l

Hätte man z. B. für einen Träger von 30 m Spannweite  $n = \frac{p}{k} = 0,3$ , so würde  $\lambda = 0,175 \cdot 30 = 5,25$  m folgen, und wenn der ganze Träger in 10 Felder von je 3 m Länge abgetheilt wäre, so müßten auf jeder Seite von der Mitte zwei, also im Ganzen vier Felder mit Gegenstreben versehen werden.

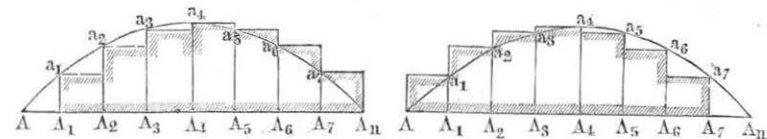
Bisher wurde immer eine volle Belastung des Trägers über seine ganze Länge angenommen und es bleibt daher noch zu untersuchen, ob dieser Belastungszustand auch der ungünstigste ist, welchem die größte Anstrengung der einzelnen Fachwerkglieder entspricht. In Betreff der Gurtungen ist dies allerdings der Fall, denn da nach (8) an irgend einem Pfosten  $A_r$  die Spannung der rechts unten bzw. links oben sich anschließenden Gurtung

$$U_{r+1} = O_r = \frac{1}{h} M_r,$$

ist, und da nach §. 36 das Biegemoment  $M$  in irgend einem Querschnitte seinen absolut größten Werth bei der vollen Belastung des Balkens erreicht, so folgt, daß die Gurtungen in allen Querschnitten ihre größten Spannungen bei voller Belastung des ganzen Trägers annehmen. Man kann daher die in §. 36 für die größten Momente angegebene Parabel ebenfalls als eine Darstellung für die Spannkraft in den Gurtungen und für die den Gurtungen zu gebenden Querschnitte ansehen. Wenn man nämlich in den Figuren 228 und 229 über

Fig. 228.

Fig. 229.



$AA_n = l$  die Parabeln aufträgt, für welche die Ordinaten in den Knotenpunkten  $A, A_1, A_2 \dots$  gleich den zugehörigen Momenten  $M, M_1, M_2$  des Fachwerksträgers, Fig. 225, bei voller Belastung sind, so ist nach dem Vorstehenden klar, daß jede dieser Ordinaten, z. B.  $A_3a_3$ , auch ein Maß



abgiebt für die Spannung also den Querschnitt der unteren Gurtung in dem Felde rechts von  $A_3 B_3$  und der oberen Gurtung in dem Felde links von  $A_3 B_3$ , weil nach (8)

$$U_4 = O_3 = \frac{1}{h} M_3 \text{ ist.}$$

Wenn man daher annimmt, daß die Querschnitte der Gurtungen, die innerhalb der einzelnen Felder constant sein müssen, von Knotenpunkt zu Knotenpunkt sich den daselbst auftretenden Spannungen gemäß ändern, so erkennt man, daß durch die schraffirten, aus einzelnen Rechtecken zusammengesetzten Flächen in Fig. 228 der Materialaufwand der unteren und in Fig. 229 derjenige der oberen Gurtung graphisch veranschaulicht wird.

In Betreff der Anstrengungen, welchen die Füllungslieder, die Pfosten und Diagonalen, ausgesetzt sind, erkennt man aus (9) und (10), daß diese mit der Verticalkraft  $V$  proportionalen Anstrengungen  $P$  und  $T$  ihre äußersten Werthe gleichzeitig mit den größten und kleinsten Werthen der Verticalkraft  $V$  annehmen. Nun ist aber in §. 36 gezeigt worden, daß in irgend einem Querschnitte die Verticalkraft  $V$  den größten positiven Werth annimmt, wenn die ganze Strecke zwischen diesem Querschnitte und dem jenseitigen Stützpunkte mit der beweglichen Last bedeckt ist, während der größte negative Werth von  $V$  sich einstellt, wenn die Strecke zwischen dem Querschnitte und dem diesseitigen Stützpunkte belastet ist. Will man also für irgend einen Knotenpunkt, z. B. für  $A_3$ , Fig. 225, die größte positive oder aufwärts gerichtete Verticalkraft  $V_{max}$  finden, so hat man die Strecke  $A_3 A_n$  als mit der mobilen Belastung bedeckt anzunehmen, und nach den bekannten Regeln die Scheerkraft in diesem Querschnitte als die aus der Gesamtbelastung des Trägers resultirende Auflagerreaction in  $A$ , vermindert um das Eigengewicht des Stückes  $A A_3$  zu bestimmen. Ebenso findet man die kleinste Schubkraft für  $A_3$  unter der Annahme, daß die bewegliche Last die Strecke von  $A$  bis  $A_3$  bedeckt.

Für das  $v$ te Feld, von dem Auflager  $A$  an gerechnet, findet man demnach die äußersten Scheerkräfte:

$$V_{rmax} = R_v - (v-1)p = \frac{n-1}{2} p + \frac{1+2+\dots+n-v}{n} k \\ - (v-1)p = \frac{n-2v+1}{2} p + \frac{n-v}{n} \frac{n-v+1}{2} k. \quad (12)$$

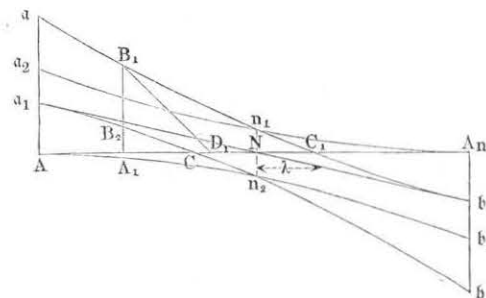
und

$$V_{rmin} = R_v - (v-1)q = \frac{n-1}{2} p + \frac{n-1+n-2+\dots+n-v+1}{n} k \\ - (v-1)p - (v-1)k = \frac{n-2v+1}{2} p - v \frac{v-1}{2n} k. \quad (13)$$

Aus diesen Grenzwerten der Scheerkraft  $V$  findet man daher nach (9) und (10) die äußersten Inanspruchnahmen  $P$  der Pfosten und  $T$  der Diagonalen.

Nach dem in §. 36 über die Maxima und Minima der verticalen Scheerkräfte Angeführten ist es nun auch leicht, die Anstrengungen der Füllungslieder graphisch zu veranschaulichen. Trägt man nämlich auf einer Aye  $AA_n = l$ , Fig. 230, die Strecke  $Aa_1 = A_nb_1 = p \frac{l}{2}$  ab und zieht die Gerade  $a_1 n b_1$ , so erhält man in dieser das Diagramm für die aus dem Eigengewichte herrührenden Scheerkräfte. Ferner erhält man die Begrenzung

Fig. 230.



der maximalen Schubkräfte, welche durch die mobile Belastung  $k$  erzeugt werden, in den beiden Parabeln  $a_2 n_1 A_n$  und  $A n_2 b_2$ , die ihren Scheitel bezw. in  $A_n$  und  $A$  haben, und deren zur Scheiteltangente  $AA_n$  senkrechte Ordinaten  $Aa_2 = A_nb_2 = k \frac{l}{2}$  sind. Eine Vereinigung dieser beiden

Diagramme für  $p$  und  $k$  durch Addition der Ordinaten führt dann zu den beiden Curven  $aC_1 b_1$  und  $a_1 C b$  derart, daß  $aC_1 b_1$  den größten und  $a_1 C b$  den kleinsten Schubkräften entspricht. Zeichnet man auf der Aye  $AA_n$  die den Knotenpunkten  $A_1, A_2, \dots$  entsprechenden Ordinaten, so findet man für jeden Knotenpunkt wie  $A_1$  zwei verschiedene Schubkräfte  $A_1 B_1$  und  $A_1 B_2$ . Von diesen ist die größere  $A_1 B_2$  der Dimensionirung des Pfostens zu Grunde zu legen. Zieht man dann noch durch  $B_1$  eine Gerade  $B_1 D_1$  unter dem Neigungswinkel  $\alpha$  der Diagonalen gegen die Horizontale, so giebt  $B_1 D_1$  das Maß für die in der Diagonale wirkende Kraft  $\frac{V}{\sin \alpha}$ , welche von dem unbelasteten Knotenpunkte des Pfostens  $A_1 B_1$  ausgeht. Das Diagramm giebt in der Strecke  $CC_1$  zwischen den Durchschnittpunkten der Aye mit den beiden Curven der maximalen Schubkraft

ebenfalls die Länge  $2\lambda$  in der Mitte des Trägers, für welche Gegenstreben anzuordnen sind, da in dieser Strecke die beiden gedachten Schubkräfte entgegengesetzte Vorzeichen annehmen.

Nach dem Vorstehenden ist es nun auch leicht, die Anstrengungen der einzelnen Glieder des Fachwerkes aus der Construction eines einfachen Kräftepolygons zu entnehmen. Nimmt man wieder volle Belastung des Trägers,

Fig. 231.

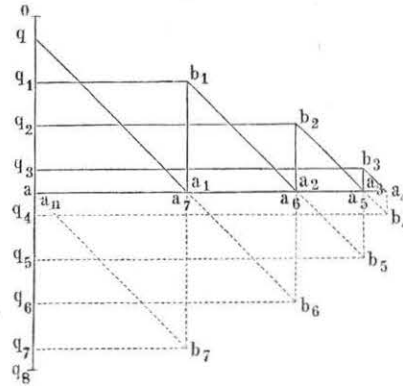
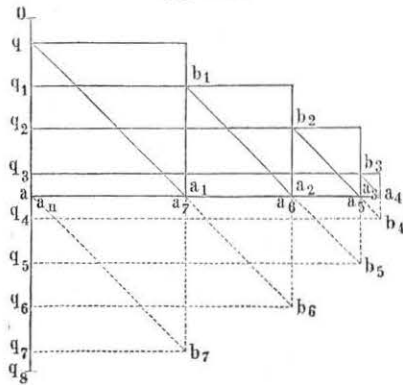


Fig. 232.



die größten Spannungen der Pfosten und Diagonalen bei theilweiser Belastung kennen lernen, so kann in der vorgedachten Weise die Fig. 230 hierzu dienen, wenn man in derselben die Verticalkraft  $Aa$  in den Auflagern gleich  $aq = aq_7$  der Figuren 231 und 232 macht, u. s. f.

Das hier erörterte Fachwerkssystem mit rechtwinkligen Dreiecken und Zugstreben heißt das Mohr'sche; bei dem Howe'schen Systeme wirken

Fig. 225, an, und trägt in Fig. 231 und 232 auf einer Verticallinie von  $o$  bis  $q_8$  die Belastungen der einzelnen Knotenpunkte gleich

$$\frac{q}{2}, q, q \dots \frac{q}{2}$$

auf, zieht durch die Mitte  $a$  dieser Kraftlinie die Horizontale  $aa_4$  und zerlegt nun die einzelnen Verticalkräfte horizontal und nach der Richtung der Diagonalen z. B.  $aq$  in  $aa_1$  und  $a_1q$ ,  $aq_1 = a_1b_1$  in  $a_1a_2$  und  $a_2b_1$  u. s. f., so erhält man das Diagramm in Fig. 231, wenn die unteren Knotenpunkte belastet sind, während Fig. 232 für die Anordnung gilt, bei der die Fahrbahn auf der oberen Gurtung ruht. Die Vergleichung der in die einzelnen Strecken eingetragenen Bezeichnung mit der übereinstimmenden in Fig. 225 läßt ohne Schwierigkeit die Anstrengung jedes einzelnen Gliedes bei voller Belastung erkennen. Will man dann auch

die Diagonalen als Druckstreben. Die Höhe  $h$  derartiger Träger pflegt man in der Praxis etwa gleich  $1/10$  der Spannweite  $l$  zu wählen, und den Diagonalen meist eine Neigung unter  $45^\circ$  gegen den Horizont zu geben, da sich leicht zeigen läßt, daß bei einer solchen Neigung der Diagonalen der Materialaufwand verhältnißmäßig am geringsten ausfällt. Nimmt man  $\alpha = 45^\circ$  und  $h = 1/10 l$ , so erhält man die Anzahl der Felder gleich 10.

Beispiel. Für einen Fachwerksträger von 30 m Länge und 3 m Höhe zwischen den parallelen Gurtungen, welcher in 10 quadratische Felder abgetheilt ist, sollen die Spannungen der Glieder ermittelt werden, wenn das Eigengewicht der ganzen Brückenconstruction pro laufenden Meter mit 2 Tonnen und die Verkehrslast des Geleises mit 6 Tonnen angenommen wird.

Da das Gewicht der Brückenbahn auf zwei Träger sich vertheilt, so erhält man für jeden Knotenpunkt

$$p = \frac{1}{2} 3 \cdot 2 = 3 \text{ Tonnen}$$

und

$$k = \frac{1}{2} 3 \cdot 6 = 9 \text{ Tonnen}$$

also  $q = 12$  Tonnen.

Legt man zunächst die Figur 233 zu Grunde, so findet man für die volle Belastung des Trägers die Spannungen in den Gurtungstheilen, wenn man in (8) für  $\nu$  die Werthe 1 bis 9 einsetzt, zu:

$$O_1 = U_2 = q \frac{a}{h} \nu \frac{n-\nu}{2} = 12 \frac{3}{3} 1 \frac{10-1}{2} = 54 \text{ Tonnen,}$$

$$O_2 = U_3 = 12 \cdot 2 \frac{8}{2} = 96 \text{ Tonnen,}$$

$$O_3 = U_4 = 12 \cdot 3 \frac{7}{2} = 126 \text{ Tonnen,}$$

$$O_4 = U_5 = 12 \cdot 4 \frac{6}{2} = 144 \text{ Tonnen,}$$

$$O_5 = U_6 = 12 \cdot 5 \frac{5}{2} = 150 \text{ Tonnen,}$$

$$O_6 = U_7 = 12 \cdot 6 \frac{4}{2} = 144 \text{ Tonnen} = O_4 = U_5,$$

$$O_7 = U_8 = 12 \cdot 7 \frac{3}{2} = 126 \text{ Tonnen} = O_3 = U_4,$$

$$O_8 = U_9 = 12 \cdot 8 \frac{2}{2} = 96 \text{ Tonnen} = O_2 = U_3,$$

$$O_9 = U_{10} = 12 \cdot 9 \frac{1}{2} = 54 \text{ Tonnen} = O_1 = U_2,$$

Die Spannungen  $U_1$  und  $O_{10}$  sind Null. Die äußersten Spannungen der Diagonalen finden sich aus den nach (12) und (13) zu ermittelnden Werthen von  $V_{max}$  und  $V_{min}$ .

Es möge entsprechend wie früher hinsichtlich der Schubkraft das positive Zeichen einer aufwärts gerichteten Kraft, also bei den Diagonalen in der Figur einer Zugkraft gegeben werden, so daß ein negatives Resultat eine Druckkraft andeutet. Man erhält, da hier

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,707$$

ist, dann die Strebenkräfte

$$T = \frac{V}{\sin \alpha} = V \sqrt{2} = 1,414 V.$$

Nimmt man ferner eine Belastung der unteren Gurtungen an, so folgt für das erste Feld mit  $\nu = 1$ :

$$V_{1max} = \frac{n-2\nu+1}{2} p + \frac{n-\nu}{n} \frac{n-\nu+1}{2} k = \frac{9}{2} 3 + \frac{9}{10} \frac{10}{2} 9 = +54 \text{ t} = P_{max};$$

$$T_{1max} = 1,414 \cdot 54 = +76,36 \text{ t.}$$

$$V_{1min} = \frac{n-2\nu+1}{2} p - \nu \frac{\nu-1}{2n} k = \frac{9}{2} 3 - 0 = +13,5 = P_{min};$$

$$T_{1min} = 1,414 \cdot 13,5 = +19,09 \text{ t.}$$

Ebenso für die übrigen Felder

$$V_{2max} = \frac{7}{2} 3 + \frac{8}{10} \frac{9}{2} 9 = +42,9 = P_{1max}; \quad T_{2max} = +60,66 \text{ t.}$$

$$V_{2min} = \frac{7}{2} 3 - 2 \frac{1}{20} 9 = +9,6 = P_{1min}; \quad T_{2min} = +13,57 \text{ t.}$$

$$V_{3max} = \frac{5}{2} 3 + \frac{7}{10} \frac{8}{2} 9 = +32,7 = P_{2max}; \quad T_{3max} = +46,24 \text{ t.}$$

$$V_{3min} = \frac{5}{2} 3 - 3 \frac{2}{20} 9 = +4,8 = P_{2min}; \quad T_{3min} = +6,79 \text{ t.}$$

$$V_{4max} = \frac{3}{2} 3 + \frac{6}{10} \frac{7}{2} 9 = +23,4 = P_{3max}; \quad T_{4max} = +33,08 \text{ t.}$$

$$V_{4min} = \frac{3}{2} 3 - 4 \frac{3}{20} 9 = -0,9 = P_{3min}; \quad T_{4min} = -1,27 \text{ t.}$$

$$V_{5max} = \frac{1}{2} 3 + \frac{5}{10} \frac{6}{2} 9 = +15 = P_{4max}; \quad T_{5max} = +21,21 \text{ t.}$$

$$V_{5min} = \frac{1}{2} 3 - 5 \frac{4}{20} 9 = -7,5 = P_{4min}; \quad T_{5min} = -10,60 \text{ t.}$$

$$V_{6max} = -\frac{1}{2} 3 + \frac{4}{10} \frac{5}{2} 9 = +7,5 = P_{5max}; \quad T_{6max} = +10,60 \text{ t.}$$

$$V_{6min} = -\frac{1}{2} 3 - 6 \frac{5}{20} 9 = -15 = P_{5min}; \quad T_{6min} = -21,21 \text{ t.}$$

$$V_{7max} = -\frac{3}{2} 3 + \frac{3}{10} \frac{4}{2} 9 = +0,9 = P_{6max}; \quad T_{7max} = +1,27 \text{ t.}$$

$$V_{7min} = -\frac{3}{2} 3 - 7 \frac{6}{20} 9 = -23,4 = P_{6min}; \quad T_{7min} = -33,08 \text{ t.}$$

$$V_{8max} = -\frac{5}{2} 3 + \frac{2}{10} \frac{3}{2} 9 = -4,8 = P_{7max}; \quad T_{8max} = -6,79 \text{ t.}$$

$$V_{8min} = -\frac{5}{2} 3 - 8 \frac{7}{20} 9 = -32,7 = P_{7min}; \quad T_{8min} = -46,24 \text{ t.}$$

$$V_{9max} = -\frac{7}{2} 3 + \frac{1}{10} \frac{2}{2} 9 = -9,6 = P_{8max}; \quad T_{9max} = -13,57 \text{ t.}$$

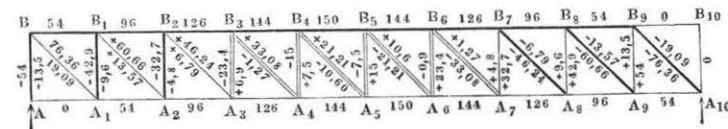
$$V_{9min} = -\frac{7}{2} 3 - 9 \frac{8}{20} 9 = -42,9 = P_{8min}; \quad T_{9min} = -60,66 \text{ t.}$$

$$V_{10max} = -\frac{9}{2} 3 + 0 = -13,5 = P_{9max}; \quad T_{10max} = -19,09 \text{ t.}$$

$$V_{10min} = -\frac{9}{2} 3 + 10 \frac{9}{20} 9 = -54 = P_{9min}; \quad T_{10min} = -76,36 \text{ t.}$$

Diese Zahlen, welche in die Fig. 233 eingetragen sind, zeigen, daß bei der dieser Figur entsprechenden Anordnung der Diagonalen die letzteren in den linken drei Endfeldern  $A-A_3$  nur gezogen, in den rechtsliegenden drei Feldern  $A_7-A_{10}$  nur gedrückt und in den Mittelfeldern abwechselnd gedrückt

Fig. 233.

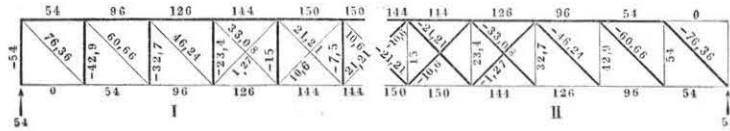


und gezogen werden, wie dies in der Figur durch schwache, starke und doppelte Linien angedeutet ist. Demgemäß werden auch die vier mittleren Stiele  $A_3, A_4, A_5, A_6$  sowohl auf Druck wie auf Zug in Anspruch genommen, während die Stiele links  $A, A_1, A_2$  nur gedrückt, diejenigen rechts  $A_7, A_8, A_9$  nur gezogen werden. Will man daher den Träger so ausführen, daß die Diagonalen nur gezogen werden, so hat man dieselben von der Mitte aus zu beiden Seiten nach den Auflagern hin ansteigen zu lassen, also der linken Trägerhälfte Diagonalen, wie in Fig. 233 gerichtet, zu geben, dagegen für die rechte Hälfte des Trägers die Diagonalen nach der Richtung  $A_5 B_6, A_6 B_7$  u. f. w. zu stellen. Es ist dann leicht ersichtlich, daß die Spannungszahlen der Fig. 233 in den drei Feldern rechts mit umgekehrten Zeichen für die so angeordneten Diagonalen gültig sein werden, z. B. wird die in dem neunten Felde angebrachte Diagonale  $A_8 B_9$  die entgegengesetzten Spannungen von denjenigen in  $A_2 B_3$ , d. h. also genau dieselben Spannungen auszuüben haben, wie die Diagonale  $A_2 B_1$  im zweiten Felde, wie dies auch schon aus der Symmetrie der nunmehr angewandten Trägerform sich ergibt. In den mittleren Feldern wird man dann gekreuzte Diagonalen anordnen, und es ist ebenfalls klar, daß z. B. die im fünften Felde in der Richtung  $A_4 B_5$  angebrachte Gegenstrebe diejenige Zugkraft 10,60 Tonn. ausüben wird, welche ohne diese Gegenstrebe von der einfachen Strebe  $A_5 B_4$  als Druckkraft geäußert werden müßte. In Folge einer solchen Anordnung des Trägers, von welchem in Fig. 234 I (a. f. S.) eine Hälfte gezeichnet ist, werden die Diagonalen in allen Feldern nur durch Zugkräfte in Anspruch genommen, und es ist klar, daß in Folge dessen die Stiele nur gedrückt, niemals gezogen werden können. Letzteres erkennt man sofort, wenn man den Kopf eines Stieles,



d. h. den oberen Knotenpunkt ins Auge faßt, auf welchen durch die Diagonalen nur abwärts gerichtete Kräfte ausgeübt werden.

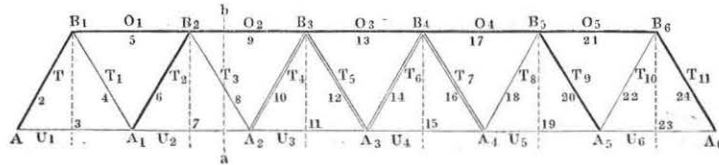
Fig. 234.



In gleicher Weise stellt Fig. 234 II die Anordnung von der Hälfte eines Trägers vor, in welchem die Diagonalen nur gegen Druckkräfte widerstandsfähig sind, in Folge dessen daselbst also die Stiele nur gezogen werden können. Die in Fig. 234 eingetragenen Spannungszahlen lassen sich ohne Weiteres aus Fig. 233 entnehmen.

§. 55. **Zusammengesetzte Fachwerkträger.** Wenn die Füllungs- glieder zwischen den Gurtungen des Fachwerkträgers nicht nach recht- winkligen, sondern nach anderen, etwa nach gleichschenkeligen Dreiecken an- geordnet sind, wie dies bei dem Neville'schen Systeme, Fig. 235, der Fall ist, so ändert sich die Untersuchung nicht wesentlich. Nimmt man etwa an, der Träger sei in den unteren Knotenpunkten belastet, und setzt zur Bestim-

Fig. 235.



mung der Spannungen in den Gurtungen die ganze Länge  $l$  des Trägers belastet voraus, so erhält man für irgend einen Schnitt  $ab$  die Spannung in der oberen Gurtung, wenn man  $A_2$  als Mittelpunkt für die Momente annimmt, zu

$$O_2 = \frac{1}{h} (R \cdot 2a - qa),$$

und ebenso für den Mittelpunkt  $B_2$  die Spannung der unteren Gurtung zwischen  $A_1$  und  $A_2$  zu:

$$U_2 = \frac{1}{h} \left( R_1 \frac{3}{2} a - q \frac{a}{2} \right),$$

also allgemein die Spannung in einem Gurtungsstücke

$$S = \frac{1}{h} M, \quad \dots \quad (1)$$

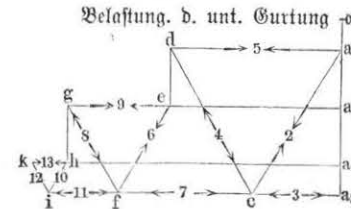
wenn  $M$  das Moment der äußeren Kräfte für den dem betreffenden Stücke

gegenüber liegenden Knotenpunkt der anderen Gurtung bedeutet. Ebenso findet man die Spannung  $T$  in irgend einem Zwischenstücke wie  $A_2 B_2$  da- durch, daß für dieselbe die Verticalcomponente gleich der verticalen Scher- kraft  $V$  des Trägers in dem betreffenden zwischen den Endpunkten der Dia- gonale  $A_2$  und  $B_2$  gelegenen Trägetheile sein muß, zu

$$T = \frac{V}{\sin \alpha} \quad \dots \quad (2)$$

Es ist klar, daß auch hier für jedes der beiden Stücke, in welche der Träger durch den Maximalmomentenquerschnitt ( $V = 0$ ) getheilt wird, das Gesetz gilt, wonach ein Zwischenglied gezogen oder gedrückt wird, je nachdem es in der Richtung von diesem Querschnitte aus nach dem zugehörigen Auf- lager hin ansteigt oder abfällt. Hieraus geht weiter hervor, daß die beiden Streben, welche von dem in diesem Grenzquerschnitte ( $V = 0$ ) gelegenen Knotenpunkte nach beiden Seiten hin ausgehen, jederzeit gleichartigen Span- nungen, Zug oder Druck, unterworfen sind, wie dies bei der vollen Be- lastung mit den mittleren Gliedern in der Figur  $A_3 B_3$  und  $A_3 B_4$  der Fall

Fig. 236.



ist, während in allen übrigen Kno- tenpunkten Zug- und Druckstreben abwechseln. Ebenso ist es klar, daß in denjenigen Gliedern ein Wechsel zwischen Druck und Zug sich ein- stellen wird, welche innerhalb der mittleren Strecke gelegen sind, um welche in Folge der Bewegung der Last der Maximalmomentenquerschnitt

sich verschiebt. In diesen Beziehungen gelten daher die im vorhergehenden Paragraphen angeführten Bemerkungen.

Um die Spannungen der einzelnen Glieder für volle Belastung durch die Zeichnung zu finden, trägt man nach Fig. 236 auf der verticalen Kräfte- linie  $oa_3$  nach einander die Belastungen  $\frac{q}{2} = oa$  in  $A$ ,  $q = aa_1$  in  $A_1$ ,

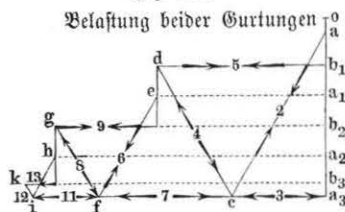
$q = a_1 a_2$  in  $A_2$  und  $\frac{q}{2} = a_2 a_3$  als die halbe Belastung des mittleren Knotenpunktes  $A_3$  auf, zieht durch  $a_3$  die Horizontale  $a_3 i$ , und durch  $a$  eine Parallele zur Strebe  $AB_1$ , welche in  $a_3 c$  die Zugkraft der unteren Gur- tung  $AA_1$  und in  $ca$  die Druckkraft in der Strebe  $AB_1$  liefert. Letztere Kraft zerlegt sich dann in  $da$  horizontal als Gurtungspressung in  $B_1 B_2$  und den Diagonalzug  $cd$  in  $B_1 A_1$ . Setzt man diese letztere Kraft  $cd$  mit der Belastung  $q = de$  in  $A_1$  zusammen zur Mittellast  $ce$ , so erhält man durch Zerlegung dieser horizontal in  $cf$  und parallel mit  $A_1 B_2$  in  $fe$  die Kräfte in  $A_1 A_2$  und  $A_1 B_2$  u. s. w. Aus der Figur, in welcher die Span-

nungen mit denselben Ziffern bezeichnet sind wie die correspondirenden Glieder in Fig. 235, ist die Construction für die Hälfte des Trägers ersichtlich; die Spannungen in den entsprechenden Gliedern der anderen Balkenhälfte sind wegen der symmetrischen Anordnung von derselben Größe.

Man kann den Träger, Fig. 235, auch leicht so einrichten, daß beide Gurtungen gleichmäßig durch die Fahrbahn belastet werden, wenn man an den oberen Knotenpunkten  $B$  verticale Hängeschiene anbringt, von denen jede einen Querträger trägt. Hierdurch wird die Entfernung der letzteren auf die halbe Größe  $\frac{a}{2}$  reducirt, und die Belastung jedes inneren Knoten-

punktes der oberen wie der unteren Gurtung beträgt nur  $\frac{q}{2}$ , während die äußeren Knoten  $A$  und  $A_6$  mit  $\frac{q}{4}$  belastet sind. Bei dieser Anordnung ist die Berechnung der Spannungen der einzelnen Glieder in derselben Weise,

Fig. 237.



wie vorstehend, vorzunehmen, indem man zu beachten hat, daß die verticalen Hängestangen keine eigentlichen Fachwerksglieder sind, dieselben vielmehr nur dazu dienen, die Belastungen  $\frac{q}{2}$  auf die oberen Knotenpunkte zu übertragen, daher jede auch nur mit dieser Kraft gezogen, niemals aber einer Druckkraft ausgesetzt wird. Um für diesen Träger den Kräfteplan zu zeichnen, hat man daher nach Fig. 237 auf der verticalen Kräftelinie  $oa_3$  die Belastungen

$$oa = \frac{1}{4} q, \quad ab_1 = b_1a_1 = a_1b_2 = b_2a_2 = a_2b_3 = \frac{1}{2} q \text{ und}$$

$$b_3a_3 = \frac{1}{4} q$$

als die halbe Belastung von  $A_3$  anzutragen, und nun in der angegebenen Weise die Kräfte durch Parallelen mit den Gurtungen und Diagonalen zu zerlegen. Auf diese Weise erhält man für jede Trägerhälfte in  $oaab_1cdefghik$  den Kräfteplan für die volle Belastung des Trägers, und es sind mit Rücksicht auf die in den Figuren 235 und 237 übereinstimmende Nummerirung diese Constructionen ohne weitere Erläuterung klar. Die so gefundenen Spannungen geben, wie schon mehrfach bemerkt, für die Gurtungen die größten Anstrengungen, während man die äußersten Zug- oder Druckspannungen in den Streben in der oben besprochenen Art durch Rechnung nach (2) oder durch die Zeichnung nach Fig. 230 zu ermitteln hat. Es ist klar,

daß bei diesem Trägersysteme die Diagonalen des mittleren Theiles ebenso wohl gegen Zug- wie Druckkräfte widerstandsfähig sein müssen.

Wenn man nach den Figuren 238 und 239 zwei Träger für dieselbe Spannweite  $AA_6$  und von gleicher Höhe nach dem Neville'schen Systeme

Fig. 238.

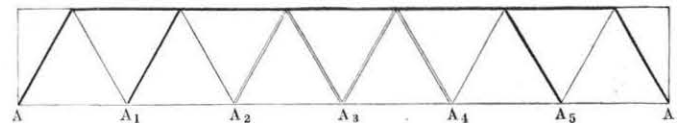
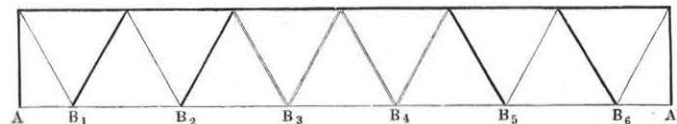


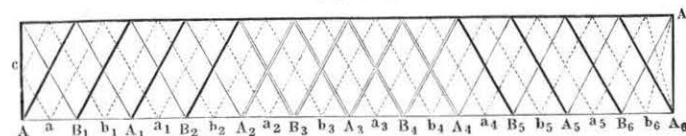
Fig. 239.



derart construirt denkt, daß die Knotenpunkte der Gurtungen beider Träger gegen einander um die halbe Fachlänge  $\frac{a}{2}$  versetzt sind, so werden diese Träger sich in derselben Art berechnen lassen, und der Unterschied in der Anstrengung der Diagonalen wird nur darin beruhen, daß bei der vollen Trägerbelastung in Fig. 238 in der Mitte zwei Zugbänder, dagegen in Fig. 239 zwei Druckstreben zusammenstoßen. In den Figuren sind die gedrückten Streben durch stärkere Linien angedeutet als die durch schwache Linien dargestellten Zugbänder, während durch Doppellinien die abwechselnde Beanspruchung durch Zug oder Druck angedeutet ist.

Denkt man sich nun beide Träger zu einem einzigen nach Fig. 240 vereinigt, so erhält man ein zusammengesetztes Fachwerk, bei welchem jede

Fig. 240.



der Gurtungen mit doppelt so vielen Knotenpunkten behaftet ist, als bei den einfachen Trägern der Figuren 238 und 239. Man wendet derartige mehrfache Fachwerke bei langen und hohen Trägern an, für welche bei dem einfachen Systeme die Weite der Felder eine zu große werden, daher sehr schwere Hülfssträger zur Herstellung der Fahrbahn bedingen würde.

Man kann auch, falls die Entfernung der Knotenpunkte noch zu groß ist, die Vereinigung einer größeren Anzahl von einfachen Trägern vornehmen, und man würde z. B. ein vierfaches System erhalten, wenn man in den Mitten zwischen den Streben der Fig. 240 noch andere, nach den punktiert gezeichneten Linien einlegen würde. Jedenfalls muß dafür Sorge getragen werden, daß die Last in allen Knotenpunkten einer bzw. beider Gurtungen angreift, wie es im Eingange des §. 53 als Bedingung für alle Fachwerke angegeben wurde. Wollte man beispielsweise nur in den Knotenpunkten  $A, B_1, A_2, B_2 \dots$  die Querträger der Fahrbahn anhängen, dagegen die Knotenpunkte  $a$  und  $b$  unbelastet lassen, so würden durch die Spannungen der in  $a, b_1, a_2 \dots$  sich anschließenden Diagonalen die Gurtungstheile  $AB_1, B_1A_1, A_1B_2 \dots$  auf Biegung in Anspruch genommen werden. Abgesehen davon, daß eine solche Beanspruchung der Theile durch transversale Kräfte eine möglichste Ausnutzung des Materials nicht gestattet, würde es auch nicht möglich sein, die Anstrengungen der einzelnen Fachwerksglieder mit Zuverlässigkeit festzustellen. Diese letztere Feststellung wird aber bei einem reinen Fachwerke von der in §. 53 geforderten Bedingung, dessen sämtliche Glieder nur Längenanstrengungen ausgeübt sind, keinen Schwierigkeiten unterliegen. Man hat nur, wenn das Fachwerk etwa ein  $m$ faches, d. h. ein aus  $m$  einfachen Systemen zusammengesetztes ist, jedes einzelne Fachwerk als durch den  $m$ ten Theil der Last beansprucht nach dem Vorstehenden zu untersuchen, um die in den einzelnen Diagonalen wirkenden Kräfte zu erhalten, während natürlich in jedem Querschnitte der Gurtungen die Summe aller derjenigen Spannungen wirksam ist, welche für diesen Punkt aus allen einzelnen Systemen resultirt. Ein näheres Eingehen auf dieses Verfahren, welches im Vorstehenden hinreichend erläutert sein dürfte, soll hier unterbleiben.

Es mag noch bemerkt werden, daß eine consequente Durchführung des Principes, wonach kein Glied eines Fachwerkes in gegen seine Länge transversaler Richtung beansprucht werden soll, auch dazu führt die Endstreben einzelner Systeme, wie z. B. derer  $a$  und  $b$  in Fig. 240, nicht wie links in der Figur gezeichnet ist, bei  $c$  an den letzten Ständer anzuschließen, sondern daß es gerechtfertigt ist, eine Anordnung mit veränderter Neigung der Endstreben, etwa wie rechts bei  $A_6A_6'$  angedeutet ist, zu wählen. Die Anstrengungen dieser Endstreben wie  $b_6A_6'$  finden sich natürlich aus dem Kräfteplane in derselben Weise wie diejenigen aller anderen.

Die vorstehenden Betrachtungen ergeben auch, warum die engmaschigen Gitterträger, wie sie bei den ersten eisernen Brücken seiner Zeit vielfach zur Anwendung gekommen sind, z. B. bei der Kinzigbrücke zu Offenburg und der Dirschau-Weichselbrücke, als wenig rationelle Constructionen heute nicht mehr angewendet werden, ebenso wie die im §. 52 beschriebenen Blech-

röhrenbrücken keine Anwendung mehr finden. Die engmaschigen Gitterträger nach Fig. 212 werden sich ebenso wie die Blechträger nur für solche Fälle eignen, wo die Last nicht, wie bei Brücken, in einzelnen von einander entfernteren Stellen concentrirt ist, sondern in nahe neben einander angebrachten Punkten aufricht, wie bei Balkendecken, oder wo sie gleichmäßig vertheilt ist, wie etwa bei Waarenspeichern etc.

Es ergibt sich ohne Weiteres, daß es bei der Zusammenfügung mehrerer einfacher Fachwerksysteme, wie sie in Fig. 240 angegeben ist, keinen wesentlichen Unterschied machen wird, ob man bei diesen Systemen nach Fig. 235 die verticalen Hängeschienen anordnet, welche die Belastung direct auf die oberen Knotenpunkte übertragen, oder ob man unter Weglassung dieser Hängestangen direct nur die unteren Knotenpunkte belastet. Man wird dementsprechend natürlich bei der Ermittlung der Spannungen in den einzelnen Gliedern entweder die Figuren 237 oder 236 zu Grunde zu legen haben.

Anstatt den zusammengesetzten Fachwerksträger aus Einzelträgern nach dem Neville'schen Systeme zu bilden, kann man selbstredend auch Mohr'sche

Träger dazu verwenden, deren Untersuchung nach dem im §. 54 Angeführten zu geschehen hat. So wird man beispielsweise die Anstrengungen in dem Fachwerksträger, Fig. 243, feststellen, wenn man die beiden Einzelträger, Fig. 241 und Fig. 242, aus denen er besteht, jeden für sich mit der halben Last belastet untersucht.

Fig. 241.

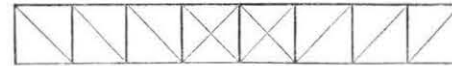


Fig. 242.

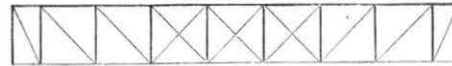


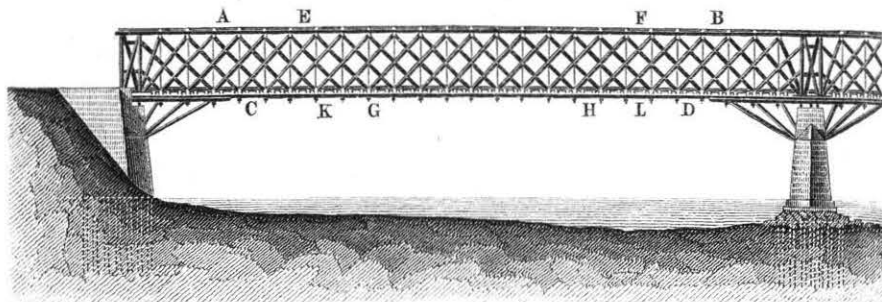
Fig. 243.



Ein Beispiel für eine Brücke mit combinirten, aus vier Einzelsystemen bestehenden Fachwerksträgern zeigt Fig. 244 (a. f. S.). Jeder der zwei Hauptträger besteht aus den beiden Gurtungen  $AB$  und  $CD$ , von welchen jede aus drei neben einander liegenden Balken zusammengesetzt ist. Während nun die Streben  $CE$  und  $HF$  doppelt ausgeführt sind und sich gegen die äußeren Balken der Gurtungen stemmen, gehen die entgegengesetzten Streben wie  $GE$  und  $DF$  als einfache Hölzer zwischen jenen hindurch und stehen mit den mittleren Gurtungsbalken in Verbindung. Zur Vereinigung der Streben mit den Gurtungen sind in den Knotenpunkten  $C, E, G \dots$  entsprechende Querbalken angebracht, und die Verbindung der oberen mit den unteren Knotenpunkten ist durch je zwei schmiedeeiserne Ankerbolzen von



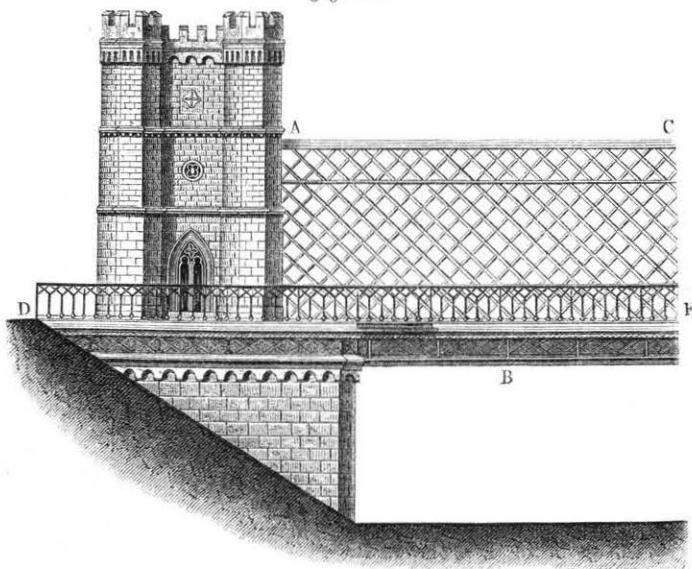
50 mm Stärke mittelst Schrauben bewirkt, deren Muttern auf entsprechenden Querböhlern ruhen. Man kann dieses System, welches häufig als das Howe'sche bezeichnet wird, auch als eine mehrfache Combination des Fig. 244.



Neville'schen, Fig. 235, auffassen, da die verticalen Ankerbolzen nur befähigt sind, Zugwirkungen in sich aufzunehmen, wie sie durch die Uebertragung der unten angehängten Fahrbahn auf die oberen Knotenpunkte erzeugt werden.

In Fig. 245 ist noch ein Stück der Gitterbrücke über die Rinzig bei Offenburg dargestellt. Diese Brücke trägt neben dem doppelten Schienen-

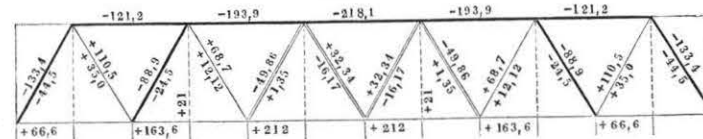
Fig. 245.



wege  $DE$  noch zwei Fußwege zu den Seiten, und besteht aus drei 6,25 m hohen und 71,12 m langen Gitterwänden wie  $ABC$ . Die Gitterstäbe, welche sich unter rechten Winkeln kreuzen, haben bei 21 mm Stärke 105 mm Breite und sind in den Kreuzungspunkten durch 30 mm starke Bolzen vernietet. Um die Festigkeit dieser Brücke zu erhöhen, hat man die Tragwände derselben nicht allein an jedem Ende 4 m lang aufgelagert, sondern auch noch mit den Pfeilern fest verankert. Zur seitlichen Versteifung sind diese Wände auch oben noch durch eiserne Schienen mit einander verbunden.

Beispiel. Die Spannungen der Glieder eines Fachwerksträgers nach Fig. 246 sollen ermittelt werden, wenn die ganze Trägerlänge 60 m und die Anzahl der Felder 12 beträgt, und die Belastung sowohl an die unteren wie oberen Knotenpunkte gehängt ist. Die Belastung des Trägers pro Meter Länge soll zu

Fig. 246.



1,4 Tonn. durch das Eigengewicht und zu 2,8 Tonn. durch die Verkehrslast angenommen werden.

Man findet hier, da die horizontale Entfernung zweier Lastpunkte gleich  $\frac{60}{12} = 5$  m ist, die Belastung für jeden Knoten zu

$$p = 5 \cdot 1,4 = 7 \text{ t und } k = 5 \cdot 2,8 = 14 \text{ t, daher } q = 21 \text{ t.}$$

Setzt man die einzelnen Dreiecke als gleichschenkelige voraus, so ergibt sich die Trägerhöhe

$$h = 5 \operatorname{tg} 60^\circ = 5 \cdot 1,732 = 8,66 \text{ m.}$$

Für die volle Belastung hat man den Auflagerdruck zu jeder Seite

$$R = \frac{11}{2} \cdot 21 = 115,5 \text{ t.}$$

Die Biegemomente für die auf einander folgenden Knotenpunkte beider Gurtungen bestimmen sich nach der Gleichung (8a) in §. 54:

$$M = q a r \frac{n-r}{2},$$

wenn man darin  $n = 12$  und  $r = 1, 2, 3 \dots 11$  setzt, und aus diesen Momenten ergibt sich die betreffende Gurtungsspannung  $O$  oder  $U$  nach (1) zu

$$\frac{1}{h} M = \frac{M}{1,732 a} = 0,577 \frac{M}{a}.$$

Man erhält demgemäß

$$M_1 = q a 1 \frac{11}{2} = 21 a \frac{11}{2} = 115,5 a; \quad U_1 = 0,577 \cdot 115,5 = 66,6 t.$$

$$M_2 = 21 \cdot 2 \frac{10}{2} a = 210 a; \quad O_1 = 0,577 \cdot 210 = 121,2 t.$$

$$M_3 = 21 \cdot 3 \frac{9}{2} a = 283,5 a; \quad U_2 = 0,577 \cdot 283,5 = 163,6 t.$$

$$M_4 = 21 \cdot 4 \frac{8}{2} a = 336 a; \quad O_2 = 0,577 \cdot 336 = 193,9 t.$$

$$M_5 = 21 \cdot 5 \frac{7}{2} a = 367,5 a; \quad U_3 = 0,577 \cdot 367,5 = 212,0 t.$$

$$M_6 = 21 \cdot 6 \frac{6}{2} a = 378 a; \quad O_3 = 0,577 \cdot 378 = 218,1 t.$$

Für die folgenden Spannungen ergeben sich die nämlichen Werthe in umgekehrter Reihenfolge.

Die Spannung in irgend einer Diagonale ergibt sich nun zu

$$T = \frac{V}{\sin 60^\circ} = 1,155 V,$$

worin man nach §. 54, (12) und (13) für  $V$  die beiden extremen Werthe

$$V_{max} = \frac{n-2\nu+1}{2} p + \frac{n-\nu}{n} \frac{n-\nu+1}{2} k$$

und

$$V_{min} = \frac{n-2\nu+1}{2} p - \nu \frac{\nu-1}{2n} k$$

zu setzen hat, entsprechend einer Belastung des einen oder anderen Theiles, in welche der gedachte Schnitt den Träger zerlegt. Demgemäß erhält man:

$$V_{1max} = \frac{11}{2} 7 + \frac{11}{12} \frac{12}{2} 14 = 115,5; \quad T_{1max} = 1,155 \cdot 115,5 = 133,4 t.$$

$$V_{1min} = \frac{11}{2} 7 - 0 = 38,5; \quad T_{1min} = 1,155 \cdot 38,5 = 44,5 t.$$

$$V_{2max} = \frac{9}{2} 7 + \frac{10}{12} \frac{11}{2} 14 = 95,67; \quad T_{2max} = 110,5 t.$$

$$V_{2min} = \frac{9}{2} 7 - 2 \frac{1}{24} 14 = 30,33; \quad T_{2min} = 35,0 t.$$

$$V_{3max} = \frac{7}{2} 7 + \frac{9}{12} \frac{10}{2} 14 = 77,0; \quad T_{3max} = 88,9 t.$$

$$V_{3min} = \frac{7}{2} 7 + 3 \frac{2}{24} 14 = 21,0; \quad T_{3min} = 24,25 t.$$

$$V_{4max} = \frac{5}{2} 7 + \frac{8}{12} \frac{9}{2} 14 = 59,5; \quad T_{4max} = 68,7 t.$$

$$V_{4min} = \frac{5}{2} 7 - 4 \frac{3}{24} 14 = 10,5; \quad T_{4min} = 12,12 t.$$

$$V_{5max} = \frac{3}{2} 7 + \frac{7}{12} \frac{8}{2} 14 = 43,17; \quad T_{5max} = 49,86 t.$$

$$V_{5min} = \frac{3}{2} 7 - 5 \frac{4}{24} 14 = -1,17; \quad T_{5min} = -1,35 t.$$

$$V_{6max} = \frac{1}{2} 7 + \frac{6}{12} \frac{7}{2} 14 = 28; \quad T_{6max} = 32,34 t.$$

$$V_{6min} = \frac{1}{2} 7 - 6 \frac{5}{24} 14 = -14; \quad T_{6min} = -16,17 t.$$

Die so gefundenen Spannungszahlen sind in Fig. 246 eingetragen.

**Parabelträger.** Bei den bisher betrachteten Fachwerkträgern mit §. 56. parallelen Gurtungen fällt die Spannung in den Streckbäumen wegen der constanten Trägerhöhe  $h$  in den verschiedenen Feldern sehr verschieden aus, entsprechend der Größe des Biegemomentes  $M$ , welches von dem Werthe Null über den Stützen bis zu dem größten Betrage in der Trägermitte veränderlich ist. Man hat daher, will man das Material nicht unnütz verwenden, die Querschnitte der Gurtungen von der Mitte nach den Enden hin in den einzelnen Knotenpunkten entsprechend zu verringern. Es erscheint aber sowohl aus constructiven wie aus theoretischen Gründen vortheilhaft, die Anordnung so zu treffen, daß die Spannkraften in den Gurtungen möglichst constant ausfallen, indem hierfür nicht nur die Ausführung der Gurtungen mit constantem Querschnitte erleichtert, sondern auch die Anstrengung der Zwischenglieder vermindert wird, welche letztere in dem Falle gleich Null werden würde, in welchem es möglich wäre, die Spannungen der Gurtungen überall von gleicher Größe zu erhalten. Letztere Bedingung ist zwar nicht zu erfüllen, wenigstens nicht bei einer einseitigen Belastung des Trägers, doch erscheint es zweckmäßig, solche Constructionen anzuwenden, bei denen für die volle Belastung, also für das Auftreten der größten Biegemomente dieser Zustand ganz oder nahezu erreicht wird.

Eine solche Construction ist durch den sogenannten Parabelträger gegeben, so genannt, weil die Knotenpunkte der einen Gurtung in einer Parabel gelegen sind, deren Verhältnisse sich aus dem Folgenden ergeben werden. Es sei die Aufgabe gestellt, einen Fachwerkträger von der Länge  $AA_n = l$ , Fig. 247 (a. f. S.), dessen untere Gurtung geradlinig ist, so anzuordnen, daß bei der vollen Belastung des Trägers die Spannkraft  $U$  der unteren Gurtung in allen Punkten dieselbe Größe hat. Es sei wieder eine Belastung des Trägers in jedem Knotenpunkte mit  $q = p + k$  vorausgesetzt, und unter  $a = \frac{l}{n}$  die Weite jedes der  $n$  gleich breiten Felder verstanden; ferner soll die Höhe des Trägers in der Mitte zwischen den Gurtungsschwerpunkten gleich  $h$  vorausgesetzt werden. Die Anzahl  $n$  der Felder





folgt, d. h. es verhält sich überall die Spannung der oberen Gurtung zu der constanten Spannung  $U$  der unteren wie die Länge  $\lambda = \frac{a}{\cos \alpha}$  der Parabelsehne zu der Weite  $a$  des Feldes.

Die größte Spannung in der oberen Gurtung ist daher größer als die Maximalspannung in der unteren Gurtung und zwar nimmt diese Spannung von der Mitte des Trägers nach beiden Enden hin an Größe zu. Nur bei einer ungeraden Felberzahl sind in dem mittleren Felde die Maximalspannungen der beiden daselbst parallelen Gurtungen gleich groß.

Die in den Feldern befindlichen Diagonalen  $A_2 B_1, A_3 B_2 \dots$  sind bei der hier vorausgesetzten vollen Belastung keinerlei Spannungen ausgesetzt, wie man ohne Weiteres daraus erkennt, daß das Gleichgewicht für einen unteren Knotenpunkt wie  $A_3$  wegen der Gleichheit der Kräfte in den beiden daselbst zusammenstoßenden Gurtungstheilen mit einer Spannung der Diagonale  $A_3 D_2$  unverträglich ist, indem keine Kraft vorhanden ist, welche der horizontalen Componente einer solchen Streben Spannung das Gleichgewicht halten könnte. Ebenso ergibt sich, daß in den verticalen Pfosten wie  $A_3 B_3$  keine andere Spannung stattfinden kann, als die durch die in dem unteren Knotenpunkte angebrachte Belastung  $q$  hervorgerufene, und es folgt also auch für die beiden in dem oberen Knotenpunkte  $B_3$  unter den Winkeln  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  zusammentreffenden Gurtungstheile, daß die Differenz, von deren Verticalspannungen ebenfalls gleich der Kraft  $q$  in den Pfosten ist, daß man also

$$O_2 \sin \alpha_2 - O_3 \sin \alpha_3 = U (\lg \alpha_2 - \lg \alpha_3) = q \quad (8)$$

hat.

Man kann die Begrenzung des Parabelträgers auch als ein Seilpolygon betrachten, dessen Schlußlinie mit der unteren Gurtung zusammenfällt. In einem solchen Seilpolygone ist bekanntlich die vertical gemessene Ordinate  $y$  jedes Punktes ein Maß für das Moment  $M$  der äußeren Kräfte in diesem Punkte, und zwar ist dieses Moment durch  $M = yH$  gegeben, wenn  $H$  den Horizontalzug oder die Polstanz des zugehörigen Kräftepolygons bedeutet. Wendet man diese Regel auf den mittleren Querschnitt  $A_4$  an, für welchen nach (2)  $M_{max} = \frac{q}{a} \frac{l^2}{8}$  gefunden wurde, und nimmt die Polstanz des Kräftepolygons  $H = \frac{l}{2}$  an, so findet sich, daß die Ordinate  $y$  in der Mitte  $A_4 B_4 = h$  nach dem Kräftemaßstabe eine Kraft

$$\frac{M_{max}}{H} = \frac{q}{a} \frac{l^2}{8} = \frac{q}{a} \frac{l}{4} = q \frac{n}{4}$$

vorstellen muß, wenn man die Gurtungen selbst als Seilpolygon auffassen will. Hieraus ergibt sich ohne Weiteres folgende Construction für die Zeichnung des Trägers. Man wählt den Maßstab für die Kräfte so, daß die gegebene mittlere Trägerhöhe  $h$  eine Kraft gleich  $q \frac{n}{4}$  ist, trägt daher in  $A_4$  zu jeder Seite der horizontalen unteren Gurtung

$$A_4 O = A_4 q_n = q \frac{n}{2} = 2h$$

an, indem man auf dieser Kräftelinie die einzelnen Belastungen und zwar

$$O q = q_7 q_n = \frac{q}{2} \text{ und } q q_1 = q_1 q_2 = \dots q_6 q_7 = q$$

markirt, und wählt als Pol den Auflagerpunkt  $A$  im Abstände  $\frac{l}{2}$  von der Kräftelinie. Dann erhält man in dem Polstrahle von  $A$  nach  $q$  direct das erste Gurtungsstück  $AB_1$ , ferner in der durch  $B_1$  mit dem folgenden Polstrahle  $A q_1$  gezogenen Parallelen die Gurtung  $B_1 B_2$  des zweiten Feldes; in  $B_2 B_3$  parallel mit  $A q_2$  das folgende Stück der oberen Gurtung u. s. w. Auf diese Weise erhält man nicht nur die einzelnen Höhen  $A_1 B_1, A_2 B_2 \dots$  der Verticalstiele ohne Berechnung derselben nach (6), sondern gleichzeitig in den Polstrahlen  $A q, A q_1, A q_2 \dots$  die Größen der in den damit parallelen Gurtungsstücken auftretenden Kräfte, bezogen auf den zu Grunde gelegten Kräftemaßstab  $h = q \frac{n}{4}$ . Ebenso ergibt sich nach demselben Maßstabe die constante Spannung  $U$  der unteren Gurtung in der Strecke  $AA_4$ , welche gleichzeitig auch die horizontale Componente der Pressungen in allen Stücken der oberen Gurtung vorstellt.

Diese Betrachtung der Trägerbegrenzung als Seilpolygon läßt auch noch in anderer Weise die schon oben gefundene Eigenschaft des Fachwerkes erkennen, wonach bei voller Belastung desselben in den Diagonalen keinerlei Spannung auftreten kann. Denkt man nämlich durch irgend ein Feld einen Schnitt wie  $a_2 b_2$  geführt, so erhält man nach der bekannten Eigenschaft des Seilpolygons in dem Durchschnittspunkte  $C$  der beiden Endseile  $A a_2$  und  $B_2 b_2$  einen Punkt, durch welchen die Mittelkraft aller auf das Balkenstück  $a_2 A b_2$  wirkenden äußeren Kräfte hindurchgeht. Nimmt man daher diesen Punkt  $C$  als den Mittelpunkt der statischen Momente an, so folgt, da die Spannungen  $U$  und  $O_2$  durch diesen Punkt hindurchgehen, daß in der mit durchschnittenen Diagonale  $A_3 B_2$  keine Spannung stattfinden kann.

Aus der letzteren Betrachtung ergibt sich aber auch weiter, daß der mehr besprochene Zustand der vollständigen Spannungslosigkeit der Diagonalen an die Bedingung geknüpft ist, daß die Mittelkraft aller auf ein Trägerstück

wie  $a_2 A b_2$  wirkenden äußeren Kräfte durch den besagten Schnittpunkt  $C$  der beiden durchschnittenen Gurtungstheile hindurchgehe. Diese Bedingung trifft nach dem Vorhergehenden nur bei einer gleichmäßig über den ganzen Träger ausgebreiteten Belastung zu, also sowohl für den voll mit  $nq = n(p + k)$ , wie für den ganz leeren nur durch sein Eigengewicht  $np$  belasteten Träger. Es ist klar, daß diesen beiden Zuständen die größten bzw. kleinsten Spannungen für sämtliche Gurtungstheile zukommen, und man erhält diese größten wie kleinsten Spannungen in den Polstrahlen desselben Kräftepolygons  $A o q_n$ , je nachdem man einen Kräftemaßstab zu Grunde legt, nach welchem die Pfeilhöhe  $h = A_4 B_4$  der Kraft  $q \frac{n}{4}$  oder  $p \frac{n}{4}$  entspricht.

Denkt man jetzt den Träger einer einseitigen Belastung unterworfen, so werden auch in den Diagonalen und zwar wie sich ergeben wird, gleichzeitig in sämtlichen Diagonalen, Spannungen erzeugt. Um diesen Einfluß einer einseitigen oder beweglichen Belastung kennen zu lernen, sei vorausgesetzt, daß der Träger außer seinem Eigengewichte  $np$  einer Verkehrslast nur in einem einzigen Knotenpunkte etwa in  $A_6$  unterworfen sein soll. Wie oben gezeigt worden, ging die Resultirende aller auf das Stück  $a_2 A b_2$  wirkenden äußeren Kräfte durch den Schnittpunkt  $C$ , so lange die einseitige Last  $k$  in  $A_6$  den Träger noch nicht beeinflusste. Diese Mittelkraft, aus der vertical aufwärts gerichteten Auflagerreaction in  $A$  und den Belastungen in  $A_1$  und  $A_2$  durch das Eigengewicht zusammengesetzt, ist in  $C$ , wie leicht zu sehen ist, ebenfalls vertical aufwärts gerichtet, so lange der Schnitt  $a_2 b_2$  noch zwischen  $A$  und dem mittleren Querschnitte  $A_4$  gelegen ist. Durch die nun in  $A_6$  hinzutretende Belastung  $k$  wird die Auflagerreaction in  $A$  um einen gewissen Betrag  $Z_1$  vergrößert, und wenn man diesen Zuwachs mit der gedachten in  $C$  wirkenden Mittelkraft  $W$  vereinigt, so erhält man die nunmehrige Resultirende aller äußeren Kräfte  $W_1 = W + Z_1$ , deren Angriffspunkt wegen der gleichen Richtung von  $W$  und  $Z_1$  offenbar zwischen  $A$  und  $C$ , etwa in  $C_1$  gelegen sein wird. Wählt man nun wieder, um das Gleichgewicht des Balkenstückes  $a_2 A b_2$  zu prüfen, den Durchschnittpunkt  $C$  der Gurtungen zum Momentenmittelpunkte, so erhält man zur Bestimmung der Diagonalkraft  $T$  die Gleichung

$$W_1 \cdot c_1 = Td,$$

woraus

$$T = \frac{c_1}{d} W_1$$

folgt. Man erkennt auch leicht, daß diese Diagonalspannung eine Zugkraft sein muß, damit sie durch ihre das Stück  $a_2 A b_2$  um  $C$  rechts drehende

Richtung im Stande ist, der links um drehenden Mittelkraft  $W_1$  das Gleichgewicht zu halten.

Dieselbe Betrachtung wie für  $A_6$  gilt natürlich für jeden Knotenpunkt, welcher jenseits der Schnittfläche, d. h. zwischen  $a_2 b_2$  und  $A_n$  gelegen ist, jede dort aufgebrauchte Belastung bringt in der Diagonale  $A_3 B_2$  Zugspannungen hervor. Dagegen findet sich ebenso, daß eine diesseits des Schnittes, also zwischen  $a_2 b_2$  und  $A$ , etwa in  $A_1$  aufgesetzte Belastung in der Diagonale  $A_3 B_2$  Druckspannungen hervorruft. Durch die Last  $k$  in  $A_1$  wird nämlich das betrachtete Balkenstück  $a_2 A b_2$  einer vertical abwärts wirkenden zusätzlichen Kraft  $Z_2$  unterworfen, welche sich als Differenz von  $k$  und der hierdurch in  $A$  erzeugten Auflagerreaction, d. h. also gleich dem Auflagerdrucke ergibt, welchen die Last  $k$  in  $A_1$  für sich allein in  $A_n$  hervorbringt. Setzt man diese in  $A_n$  wirkende Kraft  $Z_2$  mit  $W$  in  $C$  zusammen, so erhält man eine Resultirende, welche links von  $C$ , etwa in  $C_2$  wirkt, wenn sie aufwärts gerichtet ist ( $W_2$ ), dagegen rechts von  $A_n$  etwa in  $C_2'$  angreift, falls sie abwärts zieht ( $W_2'$ ), d. h. falls  $Z_2 > W$  ist. In jedem der beiden Fälle sucht diese Mittelkraft das Balkenstück  $a_2 A b_2$  um den Punkt  $C$  rechts um zu drehen, welchem Bestreben nur durch eine Druckkraft  $T$  der Stäbe  $A_3 B_2$  entgegengewirkt werden kann, für welche Kraft man ebenfalls aus  $W_2 c_2 = Td$

$$T = \frac{c_2}{d} W_2$$

erhält.

Hieraus folgt, daß bei dem vorliegenden Träger eine Diagonale der größten positiven (Zug-) Kraft unterworfen ist, wenn sämtliche Knotenpunkte jenseits derselben zwischen dem Schnitte und  $A_n$  belastet sind, während die größte negative (Druck-) Kraft in der Diagonale bei einer Belastung sämtlicher diesseits zwischen dem Schnitte und  $A$  gelegenen Knotenpunkte eintritt. Diese beiden größten Anstrengungen müssen gleichen Werth haben, da für die volle Belastung des Trägers die Diagonalen im spannungslosen Zustande sich befinden.

Daß auch die verticalen Stiele durch die einseitigen Belastungen Spannungen unterworfen sind, welche zu den durch die Eigengewichtsbelastung  $p$  der unteren Knotenpunkte in ihnen erzeugten hinzutreten, ist ohne Weiteres klar, wenn man einen Knotenpunkt der geraden Gurtung z. B.  $A_3$  ins Auge faßt. Das Gleichgewicht für denselben erfordert, daß, wenn durch die einseitige Belastung des Trägers in der Diagonale  $A_3 B_2$  eine Spannung  $T_2$  auftritt, in dem Stiele  $A_3 B_3$  eine Spannung  $T_2 \sin \delta$  hervorgerufen wird, welche zu der in demselben schon durch die Belastung von  $A_3$  hervorgerufenen Zugspannung hinzutritt. Diese von  $T$  erzeugte Spannung ist, wie man leicht erkennt, eine Druckspannung, wenn die Diagonale gezogen

wird, und umgekehrt eine Zugspannung, sobald die Diagonale gepreßt wird. Wenn daher die Letztere der maximalen Zugspannung  $+T_{max}$  ausgesetzt ist, so tritt zu der für diesen Fall in  $A_3B_3$  vorhandenen Zugspannung  $(p+k)=q$  noch die Druckspannung  $-T_{2max} \sin \delta$  hinzu, so daß der Stiel  $A_3B_2$  einer Spannung

$$q - T_{2max} \sin \delta$$

ausgesetzt ist, welche Zug oder Druck bedeutet, je nachdem dieser Werth positiv oder negativ ist. Andererseits ist bei Belastung aller links vom Schnitte befindlichen Knotenpunkte, für welchen Fall die Diagonale mit  $-T_{max}$  gepreßt und der Knotenpunkt  $A_3$  nur mit dem Eigengewichte  $p$  belastet ist, in dem Pfosten  $A_3B_3$  die stets positive also Zugspannung vorhanden

$$p + T_{2min} \sin \delta.$$

Denkt man sich einen Schnitt  $a_3b_3$  durch den Pfosten  $A_3B_3$  gelegt, so zeigt eine ähnliche Betrachtung, wie die hinsichtlich der Diagonale angestellte, daß die äußersten Anstrengungen des Pfostens  $A_3B_3$  erzeugt werden, wenn entweder alle Knotenpunkte  $A_4, A_5 \dots A_{n-1}$  rechts vom Schnitte, oder alle Knotenpunkte  $A_1, A_2, A_3$  links vom Schnitte mit der Verkehrslast bedeckt sind, und zwar erzeugen bei der Anordnung des Trägers nach der Figur die Belastungen rechts Druckspannungen, diejenigen links Zugspannungen in dem Pfosten.

Aus den vorstehenden Betrachtungen erkennt man leicht folgendes Verhalten. Wenn man den Träger durch irgend einen Schnitt, welcher außer den Gurtungen nur ein Zwischenglied trifft, in zwei Theile zerlegt denkt, so wird jede Belastung des einen Balkentheiles in dem Zwischengliede eine **Zugspannung** hervorrufen, sobald dieser Balkentheile den **unteren** Knotenpunkt des Zwischengliedes enthält, wogegen eine **Druckspannung** erzeugt wird, wenn der **obere** Knotenpunkt des Zwischengliedes mit dem belasteten Balkentheile verbunden ist.

Um die größte Anspannung in einer Diagonale wie  $A_3B_2$  zu bestimmen, hat man daher sämtliche jenseitigen Knotenpunkte  $A_3, A_4, A_5 \dots A_n$  mit  $k$  belastet zu denken und kann von dem Eigengewichte  $p$  ganz absehen, da dasselbe Spannungen in den Diagonalen nicht hervorruft. Bestimmt man dann durch Rechnung oder durch ein Seilpolygon die Größe des durch diese einseitige Belastung in  $A$  erzeugten Auflagerdruckes  $R_v$ , so erhält man die Diagonalenkraft zu

$$T = R_v \frac{c}{d}, \quad \dots \dots \dots (9)$$

worin  $c$  und  $d$  die Abstände des Durchschnittspunktes  $C$  der beiden zugehörigen Gurtungstheile  $A_2A_3$  und  $B_2B_3$  bezw. von dem Auflager  $A$ , und von der Diagonalenrichtung  $A_3B_2$  bedeuten. Diese Abstände wird man am einfachsten aus der Zeichnung entnehmen, die Auflagerreaction  $R_v$  erhält man für diesen Fall, je nachdem die eine oder andere Seite belastet ist, durch:

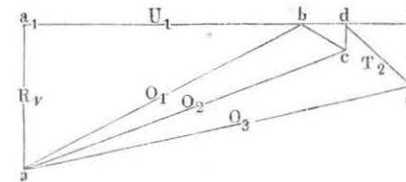
$$R_v = k \frac{1+2+\dots+n-v-1}{n} = k \frac{n-v}{n} \frac{n-v-1}{2} \quad \dots (10)$$

bezw.

$$R_v = k \frac{(n-1)+(n-2)+\dots+n-v}{n} = k \frac{v}{n} \frac{2n-v-1}{2}. \quad (11)$$

Aus dem gefundenen Auflagerdrucke  $R_v$  kann man übrigens auch durch ein Kräftepolygon nach Fig. 248 die Spannungen der Zwischenglieder er-

Fig. 248.



mitteln, welche der vorausgesetzten Belastung entsprechen. Macht man nämlich  $aa_1 = R_v$ , zieht durch  $a_1$  die Horizontale  $a_1b$  und durch  $a$  die Parallelen  $ab$ ,  $ac$ ,  $ae$  zu den auf einander folgenden Stücken  $AB_1$ ,  $B_1B_2$ ,  $B_2B_3$  der oberen Gurtung, ferner durch  $b$  die zur Diagonale  $A_2B_1$  Parallele  $bc$ , durch  $c$  die Linie  $cd$  vertical und durch  $d$  wieder parallel zu der Diagonale  $A_3A_2$ , so liefert die Strecke  $de$  die gesuchte Spannung  $T_2$  in der Diagonale  $A_3B_2$  der Fig. 247. Diese Construction, welche leicht verständlich sein dürfte, hat man natürlich für jede Diagonale besonders zu führen, indem man dabei immer denjenigen Werth von  $R_v$  zu Grunde legt, welcher dem für die betreffende Diagonale ungünstigsten Belastungszustande entspricht. Wie man aus diesen Spannungen der Diagonalen diejenigen der Verticalpfosten unter Berücksichtigung des Eigengewichtes findet, ist bereits besprochen, für die größte Anstrengung der Gurtungen hat man nach dem oben Angeführten überall die volle Belastung des Trägers voranzusetzen.

Die größte Anspannung einer Diagonale läßt sich auch mit Rücksicht auf das Gleichgewicht in dem oberen Knotenpunkte derselben bestimmen, welches erfordert, daß die algebraische Summe der horizontalen Componenten der Spannungen in den daselbst zusammenstoßenden Fachwerkgliedern gleich Null ist. Danach muß z. B. für die Diagonale  $A_3B_2$  die Spannungskomponente  $T_2 \cos \delta_2$  gleich der Differenz derjenigen Horizontalspannungen  $H_2$  und  $H_3$  sein, die in den oberen Gurtungen  $B_2B_1$  und  $B_2B_3$  sich bei



derjenigen Belastung des Trägers einstellen, welche die größte Anstrengung der Diagonale hervorruft. Für diesen Zustand, also wenn sämtliche Knotenpunkte rechts von dem  $v$ ten Pfosten mit je  $k$  belastet sind, hat man offenbar, unter  $R_v$  den durch  $k$  veranlaßten Auflagerdruck in  $A$  verstanden, die Horizontalspannung im  $v-1$ ten Felde  $A_1 A_2$  gleich

$$H_{v-1} = \frac{1}{y_v} R_v v a$$

und diejenige im folgenden Felde  $A_2 A_3$ :

$$H_v = \frac{1}{y_{v+1}} R_v (v+1) a,$$

folglich erhält man allgemein die größte bzw. kleinste Spannung in der  $v$ ten Diagonale durch

$$T_v \cos \delta_v = \pm R_v a \left( \frac{v+1}{y_{v+1}} - \frac{v}{y_v} \right).$$

Führt man hierin für  $R_v$  nach (10) und für die Ordinaten  $y$  nach (6) die Werthe ein, so erhält man, wenn man  $l = na$  und  $x = va$  und bzw.  $(v+1)a$  setzt:

$$\begin{aligned} T_v \cos \delta_v &= \pm k \frac{n-v}{n} \frac{n-v-1}{2} \frac{l^2}{4h} \left( \frac{1}{(n-v-1)a} - \frac{1}{(n-v)a} \right) \\ &= \pm \frac{k}{2n} \frac{l^2}{4h} \frac{1}{a} = \pm k \frac{l}{8h} \end{aligned}$$

oder

$$T = \pm \frac{k}{\cos \delta} \frac{l}{8h} = \pm \frac{k}{a} \frac{a}{\cos \delta} \frac{l}{8h} = \pm \kappa \lambda \frac{l}{8h}, \dots (12)$$

wenn  $\kappa = \frac{k}{a}$  die Verkehrsbelastung pro laufenden Meter und  $\lambda = \frac{a}{\cos \delta}$  die Länge der Diagonale ist.

Für den Fall, daß man der Construction das Verhältniß  $l = 8h$  zu Grunde legt, erhält man für die Maximalspannung der Diagonalen die einfache Beziehung  $T = \kappa \lambda$ , d. h. für diesen Fall ist die Maximalspannung jeder Diagonale gleich der auf eine Länge gleich derjenigen der Diagonale ausgebreiteten Verkehrslast, bei einem anderen Verhältnisse von  $l:h$  hat man dieses Gewicht mit dem Bruche  $\frac{l}{8h}$  zu multipliciren, um die größte Diagonalspannung zu erhalten.

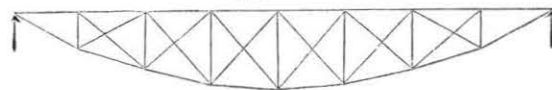
Wenn man in dem Träger der Fig. 247 die Diagonalen entsprechend den punktierten Linien von rechts nach links abfallend anstatt ansteigend anbringt, so gelten die sämtlichen vorstehend angestellten Betrachtungen

auch für diesen Träger mit dem einzigen Unterschiede, daß nunmehr eine einseitige Belastung in der Diagonale irgend eines Feldes einen Druck erzeugt, wenn sie bei der ursprünglichen Anordnung eine Zugkraft hervorrief und umgekehrt. Im Besonderen wird daher beispielsweise in der Diagonale  $A_2 B_3$  durch jede rechts aufgebrachte Belastung Druck, durch jede Belastung eines links gelegenen Feldes Zug hervorgerufen, wie man in derselben Art wie vormals aus der Betrachtung der Richtung erkennt, in welcher die Resultirende aller äußeren Kräfte das Balkenstück  $a_2 A b_2$  um den Schnittpunkt  $C$  zu drehen strebt.

Hieraus folgt nun, daß man durch Anwendung gekreuzter Streben in den einzelnen Feldern erreichen kann, daß die Streben sämtlich nur durch Zug- oder nur durch Druckkräfte angegriffen werden, je nachdem man die Streben nur gegen die eine oder die andere Beanspruchung widerstandsfähig macht. In dieser Hinsicht kann auf das in den vorhergehenden Paragraphen gelegentlich der Träger mit parallelen Gurtungen Gesagte verwiesen werden. Hierbei ist nur zu bemerken, daß, während bei den Parabelträgern nur die mittleren Felder der Gegenstreben bedürfen, bei den Parabelträgern in allen Feldern Gegenstreben erforderlich sind, weil bei einfachen Streben dieselben in allen Feldern abwechselnd Zug- und Druckspannungen ausgesetzt sind.

Es bedarf nur der Erwähnung, daß die vorstehende Untersuchung sich nicht wesentlich ändert, wenn der Parabelträger nach Fig. 249 die obere

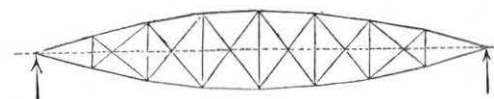
Fig. 249.



Gurtung geradlinig begrenzt erhält. Selbstredend wird dann diese gerade Gurtung mit constanter Kraft gedrückt, und die parabelförmige untere Gurtung wie eine Kette gezogen, und es werden die Pfosten durch die nunmehr auf der oberen Gurtung angebrachte Fahrbahn auf Druck beansprucht.

Denkt man sich ferner zwei Träger wie die Figuren 247 und 249, deren Spannweiten, Höhen und Belastungen gleich groß sind, mit ihren geraden

Fig. 250.



Gurtungen auf einander gelegt, so kann man in den vereinigten Balken die geraden Gurtungen beseitigen, da deren Spannungen gleich groß und ent-

gegengesetzt sind und man gelangt zu der Trägerform Fig. 250 (a. v. S.). Auch für diesen Doppelparabelträger, auch wohl Fischbauchträger genannt, gelten die vorstehend entwickelten Gesetze, und es sind hier in jedem Felde nicht nur die horizontalen Componenten der Gurtungsspannungen, sondern wegen der symmetrischen Trägerform diese Spannungen selbst in der oberen und unteren Gurtung von gleicher Größe, wenn der ganze Träger gleichmäßig belastet ist.

Beispiel. Für einen Parabelträger von 36 m Länge, welcher in neun gleiche Felder von 4 m Länge getheilt ist, sollen die größten Spannungen der einzelnen Fachwerkglieder unter der Voraussetzung ermittelt werden, daß die untere gerade Gurtung in jedem Knotenpunkte durch das Eigengewicht mit  $p = 4$  Tonnen und durch die Verkehrslast mit  $k = 12$  Tonnen belastet wird, und daß die Höhe des Trägers in dem mittleren Felde ebenfalls zu 4 m angenommen wird.

Bei der vollen Belastung des Trägers ermittelt sich die Auflagerreaction an jedem Ende zu

$$R = \frac{n-1}{2} q = \frac{8}{2} (4 + 12) = 64 \text{ Tonnen,}$$

und das größte Moment für das Mittelfeld  $A_4 A_5$ , Fig. 251, zu

$$M_4 = R \cdot 4a - qa(1+2+3) = 256a - 96a = 160a = 640 \text{ Metertonnen,}$$

so daß man die größte Spannung in den horizontalen Gurtungen des Mittelfeldes:

$$O_5 = U_5 = \frac{M_4}{h_4} = \frac{640}{4} = 160 \text{ Tonnen}$$

erhält. Um zunächst die Höhen der übrigen Pfosten  $A_1 B_1, A_2 B_2 \dots$  zu bestimmen, hat man die maximalen Biegemomente in den einzelnen Knotenpunkten nach (4) zu

$$M_1 = q \cdot 1 \cdot \frac{9-1}{2} a = 64a,$$

$$M_2 = q \cdot 2 \cdot \frac{9-2}{2} a = 112a,$$

$$M_3 = q \cdot 3 \cdot \frac{9-3}{2} a = 144a;$$

daher folgen die Höhen der Pfosten proportional mit den Momenten zu

$$h_1 = A_1 B_1 = \frac{64}{160} k_4 = \frac{64}{160} 4 = 1,6 \text{ m} = h_8,$$

$$h_2 = A_2 B_2 = \frac{112}{160} 4 = 2,8 \text{ m} = h_7 \text{ und}$$

$$h_3 = A_3 B_3 = \frac{144}{160} 4 = 3,6 \text{ m} = h_6,$$

wonach sich die obere Gurtung zeichnen läßt. Wegen der ungeraden Anzahl der Felder stimmt die Höhe  $h_4$  des mittleren Feldes nicht mit der Scheitelhöhe  $h$  überein, vielmehr erhält man dieselbe aus der Proportion:

$$h : h - h_4 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 : \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 81 : 1$$

zu

$$h = \frac{81}{80} h_4 = 4,05 \text{ m.}$$

Für die Neigungswinkel der einzelnen Theile der oberen Gurtung hat man:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h_1}{a} = 0,4; \quad \alpha = 21^\circ 49' = \alpha_9,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{h_2 - h_1}{a} = 0,3; \quad \alpha_1 = 16^\circ 42' = \alpha_8,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{h_3 - h_2}{a} = 0,2; \quad \alpha_2 = 11^\circ 19' = \alpha_7,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{h_4 - h_3}{a} = 0,1; \quad \alpha_3 = 5^\circ 43' = \alpha_6.$$

Dementsprechend ergeben sich nun die Druckspannungen der oberen Gurtung zu

$$O_1 = \frac{U}{\cos 21^\circ 49'} = \frac{160}{0,9283} = 172,4 t = O_9,$$

$$O_2 = \frac{U}{\cos 16^\circ 42'} = \frac{160}{0,9577} = 167,05 t = O_8,$$

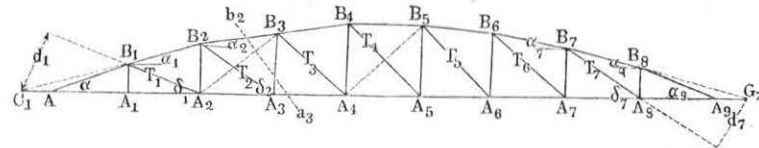
$$O_3 = \frac{U}{\cos 11^\circ 19'} = \frac{160}{0,9806} = 163,2 t = O_7,$$

$$O_4 = \frac{U}{\cos 5^\circ 43'} = \frac{160}{0,9950} = 160,8 t = O_6,$$

$$O_5 = U = 160 t.$$

Um die größten Anstrengungen  $T$  der Streben zu ermitteln, seien zunächst nur einfache Diagonalen nach Fig. 251 angenommen, welche sowohl Druck- wie

Fig. 251.



Zugkräften widerstehen können. Es bestimmen sich zuvörderst die Längen  $\lambda$  der Diagonalen zu:

$$\lambda_1 = \sqrt{a^2 + h_1^2} = \sqrt{16 + 2,56} = 4,308 \text{ m,}$$

$$\lambda_2 = \sqrt{a^2 + h_2^2} = \sqrt{16 + 7,84} = 4,883 \text{ m} = \lambda_7,$$

$$\lambda_3 = \sqrt{a^2 + h_3^2} = \sqrt{16 + 12,96} = 5,382 \text{ m} = \lambda_6,$$

$$\lambda_4 = \sqrt{a^2 + h_4^2} = \sqrt{32} = 5,657 \text{ m.}$$

Da man ferner

$$x = \frac{k}{a} = \frac{12}{4} = 3 t \text{ und } \frac{l}{8h} = \frac{36}{8 \cdot 4,05} = 1,111$$

hat, so erhält man nach (12):

$$\begin{aligned} T_1 &= \pm 4,308 \cdot 3.1,111 = \pm 14,36 \text{ t}, \\ T_2 &= \pm 4,883 \cdot 3,333 = \pm 16,277 \text{ t} = T_7, \\ T_3 &= \pm 5,382 \cdot 3,333 = \pm 17,94 \text{ t} = T_6, \\ T_4 &= \pm 5,657 \cdot 3,333 = \pm 18,86 \text{ t} = T_5. \end{aligned}$$

In Betreff der verticalen Pfosten denkt man sich den Träger durch Schnitte wie  $a_3 b_2$  zerlegt und wählt den Durchschnitt der beiden durchschnittenen Gurtungen  $A_3 A_4$  und  $B_2 B_3$  zum Mittelpunkt der Momente. Dann erzeugen alle links von dem Schnitte angebrachten Belastungen Zugspannungen, und alle rechts angebrachten Druckspannungen in den Pfosten und zwar darf hier das Eigengewicht  $p$  nicht vernachlässigt werden, wie es bei der Ermittlung der Diagonalspannungen geschehen konnte. Bezeichnet man die Abstände der gedachten Schnittpunkte der Gurtungen von  $A$  und bezw. von  $A_3$  mit  $c_1, c_2, c_3$  und  $c_7, c_6, c_5$ , so findet man zunächst:

$$\begin{aligned} c_1 &= h_1 \cotg \alpha_1 - a = \frac{1,6}{0,3} - 4 = 1,333 \text{ m} = c_7, \\ c_2 &= h_2 \cotg \alpha_2 - 2a = \frac{2,8}{0,2} - 8 = 6 \text{ m} = c_6, \\ c_3 &= h_3 \cotg \alpha_3 - 3a = \frac{3,6}{0,1} - 12 = 24 \text{ m} = c_5. \end{aligned}$$

Hierauf erhält man nun die Spannungen  $P$  in den Pfosten durch:

$$\begin{aligned} P_{1max} &= 0 + p + k = 16 \text{ t}, \\ P_{1min} &= 0 + p = 4 \text{ t}, \\ P_{2max} (c_1 + 2a) &= -\left(\frac{8}{2}p + k \frac{8+7}{9}\right)c_1 + (p+k)(c_1 + a + c_1 + 2a) \\ &= -36c_1 + 16(2c_1 + 3a), \\ P_{2max} &= \frac{234,66 - 48}{9,33} = +20 \text{ t}; \\ P_{2min} (c_1 + 2a) &= -\left(\frac{8}{2}p + k \frac{1+2+\dots+6}{9}\right)c_1 + p(2c_1 + 3a) \\ &= -44c_1 + 4(2c_1 + 3a), \\ P_{2min} &= 0; \\ P_{3max} (c_2 + 3a) &= -\left(16 + 12 \frac{8+7+6}{9}\right)c_2 + 16(3c_2 + 6a) \\ &= 4c_2 + 96a, \\ P_{3max} &= +22,75 \text{ t}; \\ P_{3min} (c_2 + 3a) &= -\left(16 + 12 \frac{1+2+\dots+5}{9}\right)c_2 + 4(3c_2 + 6a) \\ &= -24c_2 + 24a = -2,75, \\ P_{3min} &= -2,75 \text{ t}; \\ P_{4max} (c_3 + 4a) &= -\left(16 + 12 \frac{8+7+6+5}{9}\right)c_3 + 16(4c_3 + 10a) \\ &= 13,33c_3 + 160a, \\ P_{4max} &= +24 \text{ t}; \end{aligned}$$

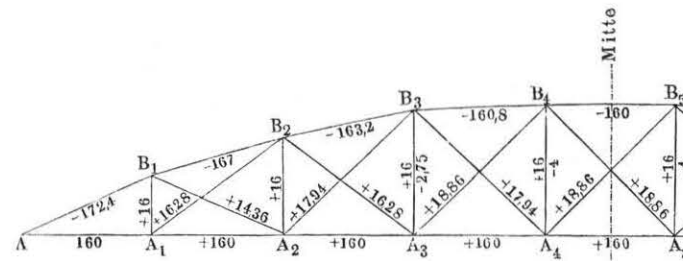
$$\begin{aligned} P_{4min} (c_3 + 4a) &= -\left(16 + 12 \frac{1+2+\dots+4}{9}\right)c_3 + 4(4c_3 + 10a) \\ &= -13,33c_3 + 40a, \\ P_{4min} &= -4 \text{ t}. \end{aligned}$$

Eine weitere Fortsetzung der Rechnung ergibt die Werthe  $P_5 = P_4, P_6 = P_3, P_7 = P_2$  und  $P_8 = P_1$ .

Die hier für  $T$  und  $P$  gefundenen Werthe haben ihre Gültigkeit für den Träger Fig. 251, welcher mit einfachen, gegen Zug und Druck wirkenden Streben versehen ist. Wendet man dagegen Kreuzstreben an, welche nur Zugkräften zu widerstehen vermögen, so können von den für  $T$  gefundenen Spannungszahlen nur die positiven Werthe gültig sein, und es ist auch ersichtlich, daß irgend eine der entgegengesetzten Streben, wie z. B.  $A_2 B_3$  im dritten Felde, genau so beansprucht wird, wie die mit ihr symmetrisch gelegene Hauptstrebe  $A_7 B_6$  im siebenten Felde, da für beide Streben die Rechnung zu demselben Ansätze und Resultate führt.

Ebenso erkennt man, daß für die Spannungen  $P$  in den verticalen Pfosten nur die Minima, welche Druckkräfte bedeuten, Gültigkeit haben, denn durch die Wirkung der Diagonalen, welche nur Zugkräfte äußern können, kann in den Verticalen niemals eine absolute, sondern nur eine rückwirkende Spannung hervorgerufen werden. Die größten Zugspannungen finden dagegen in den Pfosten statt, wenn der Träger über seiner ganzen Länge mit der Verkehrslast bedeckt ist, für welchen Fall in jedem Pfosten eine Zugspannung von  $p + k = 16 \text{ t}$  hervorgerufen wird. Demgemäß sind die Spannungszahlen in die schematische Figur 252 eingetragen. In welcher Weise man Zug- und Druckspannungen,

Fig. 252.



d. h. die Plus- und Minuszeichen für die Diagonalen bei Anwendung von Druckstreben sowie für die Gurtungen und Pfosten zu vertauschen hat, wenn die gerade Gurtung oben liegt, ist leicht zu entscheiden.

Brückenträger mit parabelförmiger Gurtung sind in größerem Maßstabe zuerst von Brunel ausgeführt. Dahin gehört beispielsweise die Windforbrücke\*) mit einer lichten Spannweite von 57,25 m und einer Höhe der Träger in der Mitte von 7,6 m. Die obere Gurtung hat dabei die Form eines aus Blechplatten gebildeten gleichschenkeligen Dreiecks mit horizontaler

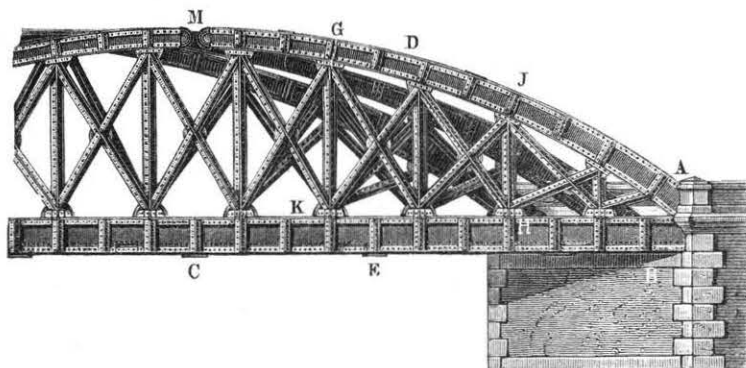
\*) Zeitschr. f. Bauwesen von Erbkam, 1861. S. 111.



oben liegender Basis, während für die untere Gurtung und für die Verticalen die doppelt T förmige Querschnittsgehalt gewählt ist; die mit Keilvorrichtungen zum Anspannen versehenen gekreuzten Diagonalen bestehen aus flachen Zugschienen. Bei der gleichfalls von Brunel ausgeführten Saltashbrücke bei Plymouth haben die Träger bei 139 m Spannweite in der Mitte 17 m Höhe erhalten, und es ist auch für die untere Gurtung nach Art der Fischbauchträger eine gekrümmte Form gewählt worden.

In Fig. 253 ist ein Theil der schiefen Eisenbahnbrücke abgebildet, welche zu Dudenarden über die Schelde führt. Diese Brücke gehört in gewissem

Fig. 253.



Grade dem Scharnierbrückensysteme (s. unten) an, indem hierbei die obere Gurtung aus zwei gesonderten Stücken besteht, welche sich in dem Scheitelscharniere *M* gegen einander stemmen, eine Anordnung, wie sie wohl auch bei gewissen Bogenbrücken gewählt wird, um den nachtheiligen Einflüssen zu begegnen, welche durch Temperaturveränderungen und einseitige Belastungen hervorgerufen werden. An den Enden sind die Gurtungen natürlich fest durch Nietung mit einander verbunden, und während der Träger an dem einen Ende fest auf dem Pfeilerkopfe *B* aufruht, ist dem anderen Ende wegen der Temperaturveränderungen mittelst untergelegter Walzen eine kleine Verschiebung auf dem Pfeiler gestattet. Die Länge eines Trägers beträgt 27,8 m bei einer Höhe von 6 m in der Mitte. Die Gurtungen sind aus Eisenblech von 10 bis 13 mm Dicke mit doppelt T förmigem Querschnitte hergestellt und mit den verticalen Pfosten *KG*, *JH* und diagonalen Zugbändern *DH*, *DK* fest vernietet. Diese Brücke hat noch die Eigenthümlichkeit, daß zwischen den die Hauptträger verbindenden Querträgern Ziegelgewölbe ausgeführt sind, welche ein über 0,5 m dickes Schotterbett für die Bahnschwellen tragen.

Eine sehr schöne Brücke mit Parabelträgern ist die über die Brähe bei Czeresk\*) geführte schiefe Eisenbahnbrücke. Dieselbe überspannt jede der beiden  $63,56' = 19,95$  m im Lichten weiten Oeffnungen unter einem Winkel von  $58^{\circ} 29'$  gegen die Stromrichtung, wonach den beiden Parabelträgern, welche für jedes Geleise aufgestellt sind, eine Länge von  $81' = 25,4$  m zwischen den Auflagern und der Parabel, nach welcher die obere Gurtung angeordnet ist, eine Pfeilhöhe zwischen den Schwerpunkten der Gurtungen von  $\frac{l}{8} = 3,2$  m gegeben worden ist.

Fig. 254.

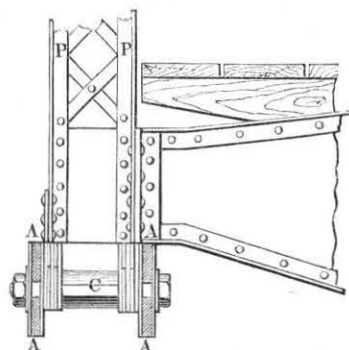
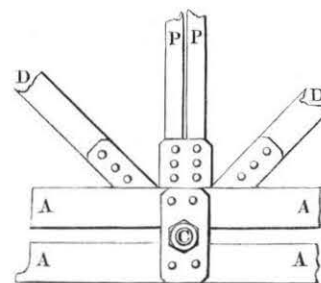


Fig. 255.



Während die untere Gurtung oder der Zugbaum nach den Figuren 254 und 255 aus vier Flachschieben *A* von  $26 \times 130$  mm gebildet ist, durch deren Zwischenraum horizontale Diagonalstangen zur Herstellung eines

Fig. 256.

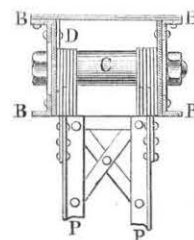
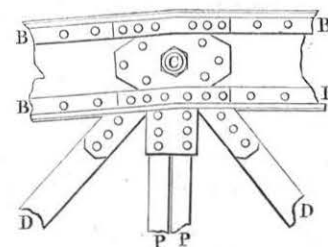


Fig. 257.

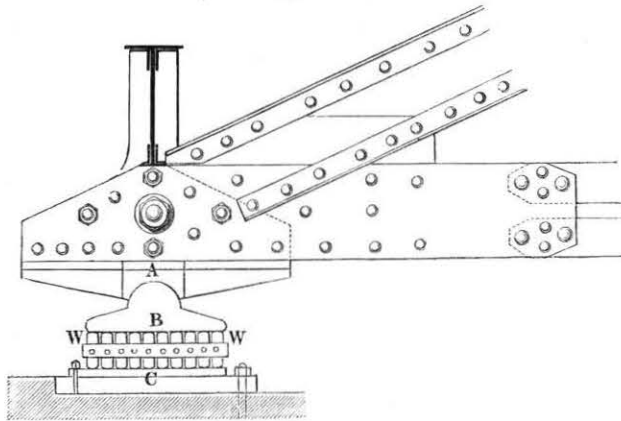


Kreuzverbandes unterhalb der Fahrbahn hindurchgehen, ist der oberen Gurtung ein druckfähiger Querschnitt durch zwei  $\square$  förmige Balken *B* von 0,314 m Höhe, Fig. 256 und Fig. 257, gegeben, welche oberhalb durch Gitter-

\*) S. Schwedler's Aufsatz in Erbkam's Zeitschr. f. Bauwesen 1861.

stäbe gegen einander versteift sind. Desgleichen sind die verticalen Pfosten  $P$  aus je vier Eiseisen mit zwischengelegtem Gitter gebildet, während die Diagonalen  $D$  aus je zwei Flachschienen von  $10 \times 105$  mm bestehen. Die Verbindung der Gurtungen mit den Zwischengliedern ist, wie aus den Figuren 254 bis 257 ersichtlich ist, überall durch Bolzen  $C$  von 52 mm Dicke gebildet, in deren Axen die Schwerlinien der verbundenen Theile sich kreuzen. Auch hier sind die Trägerenden jeder Deffnung auf einer Seite durch ein festes Auflager auf dem Pfeiler gestützt, während jedes der anderen Enden mit Hilfe eines gußeisernen Schutzes  $A$ , Fig. 258, und einer Platte  $B$  auf eine Anzahl (10) von Walzensegmenten  $W$  drückt, welche auf der

Fig. 258.



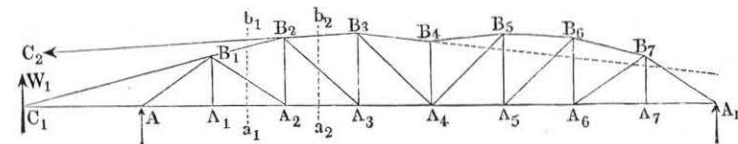
Stützplatte  $C$  des Landpfeilers ruhen. Diese Walzensegmente, mit ihren Zapfen in einem viereckigen Rahmen gehalten, gestatten vermöge der ihnen möglichen pendelnden Bewegung die horizontale Verschiebung von ungefähr 30 mm, welche die Längenänderung des Trägers in Folge der Temperaturschwankungen nothwendig macht. Die zehn Walzen von 0,118 m Durchmesser und 0,52 m Breite haben einen Maximaldruck von 36 Tonnen auf die Stützplatte zu übertragen, während sie mit Sicherheit, ohne die Elasticität des Gußeisens zu gefährden, etwa 46 Tonnen auszuhalten vermögen, nämlich 1 Ctr. pro 1" Durchmesser und 1" Breite, d. h. ca. 7,5 kg pro 1 cm Durchmesser und 1 cm Breite, daher

$$10 \cdot 52 \cdot 11,8 \cdot 7,5 = 46\,000 \text{ kg.}$$

§. 57. **Schwedler'sche Träger.** Im vorhergehenden Paragraphen wurde gefunden, daß bei dem Parabelträger, dessen Form aus der Bedingung einer constanten Spannung in der geraden Gurtung folgte, die Dia-

gonalen bei der vollen Belastung gar keiner Spannung unterworfen sind, während durch die einseitigen Belastungen jede Diagonale einer größten positiven und einer größten negativen Spannung von demselben Betrage ausgesetzt wird. Der letztere Umstand macht daher die Anordnung von Gegenstreben in allen Feldern nöthig, wenn man die Bedingung stellt, daß die Diagonalen nur in einem Sinne, entweder nur auf Zug oder nur auf Druck angesprochen werden sollen. Man kann das letztere indessen auch erreichen, ohne gekreuzte Streben anwenden zu müssen. Soll z. B. in einem beliebigen Felde, in welchem nur eine Diagonale angebracht ist, die letztere in allen Fällen nur durch Zugkräfte angegriffen werden, so hat man nur nöthig, durch die Form des Trägers dafür zu sorgen, daß bei derjenigen einseitigen Belastungsart, welche nach dem Vorstehenden die größte Druckspannung in der Diagonale hervorzurufen sucht, diese Druckspannung gleich Null ausfällt. Wenn diese Bedingung für die größte negative Spannung erreichbar, also  $-T_{max} = 0$  ist, so wird offenbar jede andere in der Diagonale auftretende Spannung positiv sein, mit anderen Worten, die Diagonale wird nur durch Zugkräfte angegriffen werden. Nun ist aus dem Vorhergehenden aber leicht zu erkennen, daß die vorausgesetzte Bedingung erfüllt ist, sobald die beiden Gurtungsstücke des betreffenden Feldes sich in einem Punkte schneiden, durch welchen auch die Resultirende aller derjenigen äußeren Kräfte hindurchgeht, die auf das Trägerstück wirken, das zwischen dem betrachteten Felde und dem einen Stützpunkte gelegen ist. Sollen z. B. in der Diagonale  $A_2B_1$ , Fig. 259, nur Zugspannungen auftreten, so denkt man sich diejenige Belastung, welche in dieser Diagonale das Minimum der

Fig. 259.



Spannung, d. h. die größte Druckspannung zu erzeugen strebt, welcher Zustand bekanntlich durch eine Belastung aller links gelegenen Knotenpunkte, jedes durch  $k$ , dargestellt ist. Denkt man nun durch die Diagonale einen Schnitt  $a_1b_1$  gelegt, so muß das Balkenstück  $a_1Ab_1$  im Gleichgewichte sein unter dem Einflusse aller äußeren darauf wirkenden Kräfte und der drei Spannungen  $U_2$ ,  $O_2$  und  $T_1$  der durchschnittenen Glieder. Die beiden Spannungen  $U_2$  und  $O_2$  haben eine durch ihren Schnittpunkt  $C_1$  gehende Mittelkraft, und wenn die Resultirende  $W_1$  aller äußeren Kräfte ebenfalls durch diesen Punkt  $C_1$  geht, so fällt die Spannung  $T_1$  der Diagonale gleich





und folglich die verticale Scheerkraft in dem auf den Pfosten  $A_v$  folgenden Felde zu:

$$V_v = R_v - v(p + k) = \frac{n-1}{2} p - \frac{v+1}{2n} vk - vp \dots (2)$$

Setzt man diesen Ausdruck gleich Null, so erhält man

$$n(n-1)p = (v+1)vk + 2nvp,$$

woraus sich

$$v = -\left(\frac{1}{2} + n\frac{p}{k}\right) + \sqrt{n(n-1)\frac{p}{k} + \left(\frac{1}{2} + n\frac{p}{k}\right)^2} \dots (3)$$

ergibt.

Aus dieser Gleichung findet sich die Anzahl der in der Mitte mit parallelen Gurtungen und daher mit Gegenstreben zu versehenen Felder. Beispielsweise erhält man für  $n = 10$  und  $p = \frac{1}{3}k$  für  $v$  den Werth

$$v = -3,83 + \sqrt{30 + 3,83^2} = 2,81,$$

woraus sich ergibt, daß die parallelen Gurtungen bis zum dritten Pfosten neben jedem Auflager reichen, also über vier Felder in der Mitte sich erstrecken.

Hat man für diesen mittleren Theil  $A_3A_5$ , Fig. 260, die Höhe der Pfosten  $A_3B_3 = A_5B_5 = h$  angenommen, so handelt es sich darum, die Höhen der übrigen Pfosten  $A_1B_1 = h_1$ ,  $A_2B_2 = h_2 \dots$  so zu bestimmen, daß der im Eingange erwähnten Bedingung Genüge gethan wird. Um etwa die Höhe  $h_2 = A_2B_2$  zu ermitteln, denkt man sich die beiden Knotenpunkte  $A_1$  und  $A_2$  von der Verkehrslast angegriffen und bestimmt den Durchschnittspunkt  $C_2$ , in welchem die Resultirende aller auf  $A_2AB_2$  wirkenden äußeren Kräfte die horizontale Gurtung schneidet, welcher Punkt die Richtung  $B_3B_2$  und also die Höhe  $A_2B_2$  ergibt. Die Festsetzung dieses Punktes durch ein graphisches Verfahren bietet keine Schwierigkeit dar. Will man den Punkt  $C$  durch Rechnung bestimmen, so bezeichne man wieder mit  $v$  die Anzahl der belasteten Felder, also ist hier für  $A_2$   $v = 2$  anzunehmen, und bestimme nach (1) die Größe des Auflagerdrucks  $R_v$  für diese vorausgesetzte Belastung. Bezeichnet nun  $c = AC$  die Entfernung des gesuchten Schnittpunktes  $C$  von dem Auflager  $A$ , so gilt die Momentengleichung in Bezug auf den Punkt  $C$ :

$$R_v c = (p + k)(c + a + c + 2a + \dots + c + va) = q\left(vc + \frac{v+1}{2}va\right) (4)$$

woraus

$$c = \frac{\frac{v+1}{2}vaq}{R_v - qv} \dots (5)$$

folgt. Durch wiederholte Anwendung dieser Formel für  $v = 1, 2, 3 \dots$  findet man die Abstände  $c$  und damit die Höhen sämtlicher Pfosten  $h_1, h_2, h_3 \dots$ , wenn die Höhe  $h$  der mittleren gegeben ist. Daß diese Verticalpfosten hier andere Werthe annehmen, als bei dem Parabelträger, ist selbstredend; ebenso ist es klar, daß bei diesem Träger für den Zustand der gleichförmigen Belastung die Spannung der unteren Gurtung nicht mehr in allen Feldern von gleicher Größe ist, wie es bei dem Parabelträger der Fall ist. Die Bestimmung der größten Anstrengungen der Gurtungen und Zwischentheile geschieht in derselben Art, wie vorstehend für den Parabelträger und für den Parallelträger gezeigt worden ist.

Bezeichnet

$$M_v = q \frac{n-1}{2} va - q(1 + 2 \dots v-1)a = q \frac{n-v}{2} va \dots (6)$$

das Biegemoment für den Querschnitt durch den  $v$ ten Verticalpfosten für den Fall, daß der Träger über seine ganze Länge mit der Verkehrslast bedeckt ist, so findet man die Zugspannung  $U_{v+1}$  der unteren Gurtung in dem auf diesen Pfosten folgenden Felde zu

$$U_{v+1} = \frac{1}{h_v} M_v = q \frac{n-v}{2} v \frac{a}{h_v} \dots (7)$$

unter  $h_v$  die Höhe des  $v$ ten Pfostens verstanden. Für die Spannung  $O_v$  der oberen Gurtung in dem  $v$ ten Felde, d. h. dem Pfosten  $A_vB_v$  vorhergehenden Felde, deren Neigung gegen den Horizont  $\alpha_v$  sein mag, findet man dann ebenfalls zu

$$O_v = \frac{1}{\cos \alpha_v} \frac{M_v}{h_v} = \frac{U_{v+1}}{\cos \alpha_v} = \frac{1}{\cos \alpha_v} \frac{n-v}{2} v \frac{a}{h_v} \dots (8)$$

Da nun  $\frac{a}{\cos \alpha_v}$  die Länge  $\lambda$  des betreffenden Gurtungsstückes bedeutet, so kann man wie beim Parabelträger auch allgemein

$$O_v = \frac{\lambda}{a} U_{v+1} \dots (9)$$

schreiben, welche Gleichung für jede Hälfte des Trägers unter der Voraussetzung gilt, daß die Zählung der Felder von dem zugehörigen Auflagerpunkte nach der Mitte hin geschieht.

Ist, wie in der Figur, die Zahl der Felder eine gerade, so sind die Maximalspannungen der unteren sowohl wie der oberen Gurtung in den beiden mittleren Feldern je unter sich gleich. Wenn dagegen die Felderzahl eine ungerade ist, so ist in dem mittleren Felde die Spannung  $U_{\frac{n+1}{2}}$  gleich derjenigen der oberen Gurtung  $O_{\frac{n+1}{2}}$ , und da die Kreuzdiagonalen

dieses Feldes bei voller Belastung des Trägers keiner Anstrengung ausgesetzt sind, so ist auch die Spannung der Obergurtung in jedem der beiderseits anstoßenden Felder ebenso groß wie in dem mittleren.

Die größte Spannung einer Diagonale kann man wie bei dem Parabelträger dadurch finden, daß man die Momentengleichung in Bezug auf den Durchschnitt  $C$  der beiden Gurtungen ansetzt, welche dem von der Diagonale eingenommenen Felde angehören. Es läßt sich diese maximale Spannung aber auch direct finden, ohne daß man die Abstände  $c$  und  $d$  dieses Schnittpunktes von dem Auflager und der Diagonalenrichtung kennt. Denkt man sich nämlich den Balken im  $v$ ten Felde, z. B. im dritten Felde durchgeschnitten und den ungünstigsten Belastungszustand, d. h. eine Belastung aller Knotenpunkte rechts vom Schnitte  $A_3$  bis  $A_7$  vorausgesetzt, so hat man, unter  $T_v$  die Diagonalspannung und unter  $\delta_v$  den Winkel der Diagonale  $B_2A_3A$  gegen den Horizont verstanden, wegen des Gleichgewichts im oberen Knotenpunkte  $B_2$  die Gleichheit der Horizontalkräfte:

$$T_v \cos \delta_v = H_v - H_{v-1}, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

wenn mit  $H_v$  und  $H_{v-1}$  die horizontalen Spannungskomponenten bezeichnet werden, welche bei der vorausgesetzten Belastung bezw. in  $B_2B_3$  und  $B_2B_1$  sich einstellen. Nun findet sich aber für diesen Zustand, für welchen der Auflagerdruck in  $A$  durch

$$R_v = p \frac{n-1}{2} + k \frac{1+2+\dots+n-v}{n} \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

gegeben ist, die Horizontalspannung

$$H_v = \frac{1}{h_v} [R_v v a - p(1+2+\dots+v-1)a] \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und

$$H_{v-1} = \frac{1}{h_{v-1}} [R_v(v-1)a - p(1+2+\dots+v-2)a], \quad (13)$$

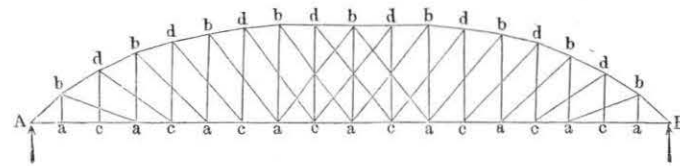
wodurch man nach (10) die gesuchte Maximalspannung  $T_v$  der Diagonale findet. Desgleichen ergibt sich für den Pfosten  $A_2B_2$  die größte Spannung gleich der für denselben Belastungszustand ermittelten algebraischen Summe der Verticalcomponenten der in den drei Gliedern  $B_1B_2$ ,  $B_3B_2$  und  $B_2A_3$  auftretenden Spannungen u. s. f.

Auch diese Träger können, um die Entfernungen der Knotenpunkte bei großen Spannweiten nicht zu groß und die Diagonalen nicht zu steil zu erhalten, mit mehrfachen Systemen von Zwischengliedern versehen werden, wie dies beispielsweise bei den Trägern der Elbbrücke in der Berlin-Lehrter-Eisenbahn\*) geschehen ist. Fig. 261 zeigt das System eines solchen Trägers,

\*) Erbkam, Zeitschr. f. Bauwesen, 1868, S. 517.

welcher bei einer Entfernung der Stützen von 210' (65,9 m) 16 Felder von 12' (3,766 m) und zwei Endfelder von je 9' (2,825 m) erhalten hat.

Fig. 261.



Das System des Fachwerks ist ein doppeltes, und man hat bei der Berechnung eines solchen Trägers jedes der beiden Systeme  $Aabab \dots B$  und  $Acdcd \dots B$  für sich zu berechnen und die für die einzelnen Gurtungsteile erhaltenen Spannungszahlen entsprechend zu addiren.

Beispiel. Für eine Spannweite von 32 m soll ein in der Mitte 4 m hoher Schwedlerträger aus 8 Feldern bestehend angeordnet werden. Für denselben sollen die Form und die größten Spannungen der Glieder unter der Voraussetzung ermittelt werden, daß das Eigengewicht der Construction pro laufenden Meter 1 Tonne und die Verkehrslast für dieselbe Länge 2,5 Tonnen beträgt?

Hier ist die horizontale Weite jedes der  $n=8$  Felder durch  $a = \frac{32}{8} = 4$  m, daher die Belastung eines Knotenpunktes durch  $p = 4$  t,  $k = 10$  t und bezw.  $q = p + k = 14$  t gegeben. Um die Höhen der Pfosten  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2 \dots$ ,

Fig. 262.

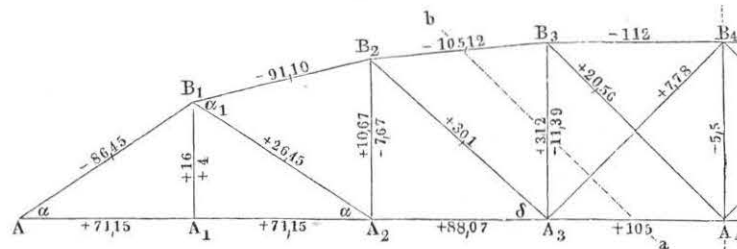


Fig. 262, zu bestimmen, findet sich zunächst der Auflagerdruck in  $A$ , für den Fall, daß nur der Knotenpunkt  $A_1$  durch die Verkehrslast angegriffen wird, zu

$$R_1 = \frac{n-1}{2} p + \frac{n-1}{n} k = \frac{7}{2} 4 + \frac{7}{8} 10 = 22,75 \text{ t.}$$

Ebenso erhält man diese Auflagerdrücke für die Belastung der zwei Knotenpunkte  $A_1$  und  $A_2$ , bezw. der drei Punkte  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  zu

$$R_2 = \frac{7}{2} 4 + \frac{7+6}{8} 10 = 30,25 \text{ t und}$$

$$R_3 = \frac{7}{2} 4 + \frac{7+6+5}{8} 10 = 36,5 \text{ t.}$$

Mit diesen Werthen bestimmen sich daher nach (5) die Abstände  $c_1, c_2$  und  $c_3$  von  $A$ , in welchen die horizontale Gurtung von den oberen Gurtungsflächen  $B_1 B_2, B_2 B_3$  und  $B_3 B_4$  getroffen wird, zu

$$c_1 = \frac{\frac{2}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 14}{22,75 - 14} = \frac{56}{8,75} = 6,4 \text{ m,}$$

$$c_2 = \frac{\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 14}{30,25 - 2 \cdot 14} = \frac{168}{2,25} = 74,67 \text{ m,}$$

$$c_3 = \frac{\frac{4}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 14}{36,5 - 3 \cdot 14} = -\frac{336}{5,5} = -61,1 \text{ m.}$$

Der negative Werth von  $c_3$  deutet an, daß die obere Gurtung zwischen  $A_3$  und  $A_4$  horizontal zu machen, und daß daher ein Feld zu jeder Seite der Mitte mit Gegenstreben zu versehen ist.

Wenn nun dem Pfosten  $A_3 B_3$  die verlangte Höhe  $h_4 = h_3 = 4 \text{ m}$  gegeben wird, so erhält man

$$h_2 = h_3 \frac{c_2 + 2a}{c_2 + 3a} = 4 \frac{74,67 + 8}{74,67 + 12} = 3,815 \text{ m}$$

und

$$h_1 = h_2 \frac{c_1 + a}{c_1 + 2a} = 3,815 \frac{6,4 + 4}{6,4 + 8} = 2,755 \text{ m.}$$

Hieraus folgen nun weiter die Neigungen der Gurtungen und Streben gegen den Horizont aus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2,755}{4} = 0,689; \quad \alpha = 34^\circ 35'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3,815 - 2,755}{4} = 0,265; \quad \alpha_1 = 14^\circ 50'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{4 - 3,815}{4} = 0,0462; \quad \alpha_2 = 2^\circ 40'$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{3,815}{4} = 0,954; \quad \delta = 43^\circ 40'.$$

Um die Spannungen der unteren Gurtung zu finden, bestimmt man für den Zustand der vollen Trägerbelastung die Biegemomente für die einzelnen Knotenpunkte (s. §. 54, Gleichung 8a):

$$M_1 = q a r \frac{n-r}{2} = 14 \cdot 4 \cdot \frac{7}{2} = 196 \text{ mt.}$$

$$M_2 = 14 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{6}{2} = 336 \text{ mt.}$$

$$M_3 = 14 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} = 420 \text{ mt.}$$

$$M_4 = 14 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = 448 \text{ mt.}$$

Hieraus findet man die Gurtungskräfte für die einzelnen Felder, wenn man immer den unteren Knotenpunkt  $A$  für die Bestimmung der Spannungen  $O$

und den oberen Knotenpunkt  $B$  für die Spannungen  $U$  zum Mittelpunkt der Momente annimmt. Danach erhält man für  $AA_1$  mit dem Momentenmittelpunkte in  $B_1$ :

$$U_1 = \frac{M_1}{h_1} = \frac{196}{2,755} = 71,15 \text{ t.}$$

Ebenso groß ist auch  $U_2$  in  $A_1 A_2$ , da in  $A_1$  die Horizontalkraft sich nicht ändern kann, insofern hier kein geneigtes Glied zur Aufnahme einer horizontalen Componente sich anschließt. Wählt man  $A_1$  zum Momentenmittelpunkte, so folgt aus  $M_1 = O_1 h_1 \cos \alpha$  die Spannung:

$$O_1 = \frac{M_1}{h_1 \cos \alpha} = \frac{196}{2,755 \cdot \cos 34^\circ 35'} = \frac{196}{2,755 \cdot 0,823} = 86,45 \text{ t.}$$

In ähnlicher Art erhält man:

$$U_3 = \frac{M_2}{h_2} = \frac{336}{3,815} = 88,07 \text{ t.}$$

$$O_2 = \frac{M_2}{h_2 \cos \alpha_1} = \frac{336}{3,815 \cdot \cos 14^\circ 50'} = \frac{336}{3,815 \cdot 0,9667} = 91,10 \text{ t.}$$

$$U_4 = \frac{M_3}{h_3} = \frac{420}{4} = 105 \text{ t.}$$

$$O_3 = \frac{M_3}{h_3 \cos \alpha_2} = \frac{420}{4 \cdot \cos 2^\circ 40'} = \frac{420}{4 \cdot 0,9989} = 105,12 \text{ t.}$$

$$O_4 = \frac{M_4}{h_4} = \frac{448}{4} = 112 \text{ t.}$$

Die größte Spannung der Strebe  $A_2 B_1$  findet sich bei einer Belastung des rechten Trägersendes bis zum Knotenpunkte  $A_2$ , für welchen Fall der Auflagerdruck in  $A$  zu

$$R_1 = 4 \frac{7}{2} + 10 \frac{1+2+3+\dots+6}{8} = 40,25 \text{ t.}$$

sich bestimmt. Da ferner der Abstand  $d_1$  der Diagonale  $A_2 B_1$  von dem Schnittpunkte der Gurtungen  $AA_2$  und  $B_1 B_2$  durch

$$d_1 = (c_1 + 2a) \sin \alpha = 14,4 \cdot \sin 34^\circ 35' = 14,4 \cdot 0,567 = 8,165 \text{ m}$$

bestimmt ist, so findet sich  $T_1$  aus

$$T_1 d_1 = R_1 c_1 - p(c_1 + a) = 40,25 \cdot 6,4 - 4 \cdot 10,4 = 216,0$$

zu

$$T_1 = \frac{216}{8,165} = 26,45 \text{ t.}$$

In gleicher Weise hat man für die Belastung des rechten Trägersendes bis einschließlich  $A_3$  den Auflagerdruck in  $A$  gleich:

$$R_2 = 4 \frac{7}{2} + 10 \frac{1+2+3+\dots+5}{8} = 32,75 \text{ t,}$$

und den betreffenden Hebelarm

$$d_2 = (c_2 + 3a) \sin \delta = (74,67 + 12) \sin 43^\circ 40' = 86,67 \cdot 0,690 = 59,80 \text{ m,}$$

so daß man aus

$$T_2 d_2 = 32,75 \cdot 74,67 - 4(2 \cdot 74,67 + 3 \cdot 4) = 1800$$

erhält.

$$T_2 = \frac{1800}{59,8} = 30,1 \text{ t}$$



Die Diagonale  $A_4B_3$  erreicht ihre größte Spannung, wenn alle Knotenpunkte rechts bis zu  $A_4$  einschließlich belastet sind, während die Gegenstrebe  $A_3B_4$  bei einer Belastung aller Knoten von  $A$  bis  $A_3$  am stärksten gezogen wird. Man findet diese Spannungen für dieses Feld wie bei den Parallelträgern, indem man die betreffende verticale Scheerkraft gleich der verticalen Componente der Diagonalkraft setzt. Daher findet sich für  $A_4B_3$  die Spannung  $T_3$  aus

$$T_3 \sin 45^\circ = 4 \frac{7}{2} + 10 \frac{1+2+3+4}{8} - 3 \cdot 4 = 14,5 \text{ t}$$

zu

$$T_3 = \frac{14,5}{0,7071} = 20,56 \text{ t},$$

und für  $A_3B_4$  die größte Spannung  $T_3'$  aus

$$T_3' \sin 45^\circ = -4 \frac{7}{2} - 10 \frac{7+6+5}{8} + 3 \cdot 14 = 5,5$$

zu

$$T_3' = \frac{5,5}{0,7071} = 7,78 \text{ t}.$$

Für den Pfosten  $A_1B_1$  ergeben sich zunächst wieder die größte und die kleinste Spannung zu resp.

$$P_{1max} = +p + k = 16 \text{ t}$$

und

$$P_{1min} = +p = 4 \text{ t},$$

da die in  $A_1$  wirkende Belastung lediglich durch den Pfosten  $A_1B_1$  aufgenommen werden muß.

Für  $A_2B_2$  hat man einmal die Knotenpunkte  $A_3A_4 \dots A_7$  und das andere Mal diejenigen  $A_1$  und  $A_2$  mit je  $k$  belastet zu denken, und erhält für den Durchschnitt zwischen  $A_2$  und  $B_1B_2$  im Abstände  $c_1 = 6,4 \text{ m}$  von  $A$  als Momentenmittelpunkt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} -P_{2min}(c_1 + 2a) &= \left(p \frac{7}{2} + k \frac{1+2+3+4+5}{8}\right) c_1 - p(c_1 + a + c_1 + 2a) \\ &= 209,6 - 99,2 = 110,4, \end{aligned}$$

woraus

$$P_2 = -\frac{110,4}{14,4} = -7,67 \text{ t}$$

Druckspannung folgt, und

$$\begin{aligned} -P_{2max}(c_1 + 2a) &= \left(p \frac{7}{2} + k \frac{7+6}{8}\right) c_1 - q(c_1 + a + c_1 + 2a) \\ &= 193,6 - 347,2 = -153,6, \end{aligned}$$

daher

$$P_{2max} = \frac{153,6}{14,4} = 10,67 \text{ t}$$

Zugspannung.

Ebenso erhält man für  $A_3B_3$ , wenn der Schnittpunkt von  $AA_3$  und  $B_2B_3$  im Abstände  $c_2 = 74,67$  von  $A$  als Momentenmittelpunkt und eine Belastung von  $A_4, A_5 \dots A_7$  angenommen wird:

$$\begin{aligned} -P_{3min}(c_2 + 3a) &= \left(p \frac{7}{2} + k \frac{1+2+3+4}{8}\right) c_2 - p(3c_1 + a + 2a + 3a) \\ &= 1978,75 - 992 = 986,75, \end{aligned}$$

daher

$$P_{3min} = -\frac{986,75}{86,67} = -11,39 \text{ t}$$

Druckspannung.

Wenn andererseits die Knotenpunkte  $A_1, A_2$  und  $A_3$  belastet werden, so hat man zu beachten, daß der Schnitt nach  $ab$  die nunmehr mit  $T_3' = 7,78 \text{ t}$  gezogene Diagonale  $A_3B_4$  trifft, so daß man auch deren verticale Componente  $T_3' \sin 45^\circ = 5,5 \text{ t}$  in der Gleichgewichtsgleichung zu berücksichtigen hat. Mit Rücksicht hierauf erhält man:

$$\begin{aligned} -(P_{3max} + 5,5)(c_2 + 3a) &= \left(p \frac{7}{2} + k \frac{7+6+5}{8}\right) c_2 - q(3c_2 + 6a) \\ &= 36,5 \cdot 74,67 - 14 \cdot 248 = 2725,33 - 3472 = -746,67, \end{aligned}$$

woraus

$$P_{3max} = \frac{746,67}{86,67} - 5,5 = 3,12 \text{ t}$$

Zug folgt.

Der mittlere Pfosten  $A_4B_4$  kann nur durch Druckkräfte beansprucht werden, da die horizontale Gurtung in  $B_4$  verticale Kräfte nicht aufnehmen kann und die in  $B_4$  sich anschließenden beiderseits abfallenden Diagonalen nicht druckfähig sind, was in dem Falle eines in  $A_4B_4$  auftretenden Zuges der Fall sein müßte. Die größte Druckkraft findet in  $A_4B_4$  statt, wenn die Diagonale  $A_3B_4$  ihrem größten Zuge

$$T_3' = \frac{5,5}{\sin 45^\circ} = 7,78 \text{ t}$$

ausgesetzt ist, in welchem Falle der Pfosten mit

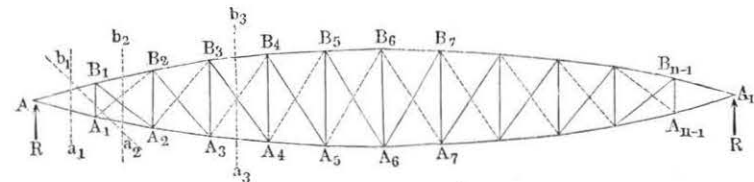
$$P_{4max} = 5,5 \text{ t}$$

auf Druck beansprucht wird.

Die ermittelten Spannungszahlen, welche für die andere Trägerhälfte der Symmetrie wegen ebenso groß ausfallen, sind in Fig. 262 eingetragen.

**Pauli'sche Träger.** Eine andere Trägerform ist die von v. Pauli §. 58. angegebene, Fig. 263, welche u. a. bei der Mainzer Rheinbrücke zur An-

Fig. 263.



wendung gekommen ist. Dieser Träger stimmt mit dem Fischbauchträger, Fig. 250, darin überein, daß er symmetrisch zu der Horizontalen  $AA_n$  durch die Auflager gebildet ist, folglich eine gerade neutrale Axe hat. Er unterscheidet sich aber von den Parabelträgern in der Gestalt der Gurtungen, für deren Form nämlich das Princip aufgestellt ist, daß die Spannungen



$$\frac{\cos \alpha_{\nu-1}}{\cos \alpha_{\nu}} \text{ bzw. } \frac{\cos \alpha_{\nu+1}}{\cos \alpha_{\nu}}$$

zunehmen. Es folgt daraus auch weiter, daß die Diagonalen bei diesem Träger für den Fall der gleichmäßigen Belastung keineswegs, wie bei dem Parabelträger, ganz ohne Spannung sind, denn denkt man sich durch irgend ein Feld einen Schnitt wie  $a_3 b_3$ , Fig. 263, gelegt, so erhält man durch Gleichsetzung der horizontalen Kraftcomponenten, wenn noch  $\beta_{\nu}$  die Neigung der Diagonale gegen den Horizont und  $T_{\nu}$  die Diagonalkraft ist:

$$U_{\nu} \cos \alpha_{\nu} + T_{\nu} \cos \beta_{\nu} = O \cos \alpha_{\nu},$$

oder mit Rücksicht auf (4):

$$T_{\nu} = O \frac{\cos \alpha_{\nu} - \cos \alpha_{\nu-1}}{\cos \beta_{\nu}} \dots \dots \dots (5)$$

Da dieser Werth positiv ist, so erkennt man, daß die Diagonalen bei der in der Figur vorausgesetzten Stellung derselben Zugspannungen ausgesetzt sind.

Wenn man dieselbe Untersuchung auch für die entgegengesetzte, in der Fig. 263 punktierte Stellung der Diagonalen anstellt, so wird man in derselben

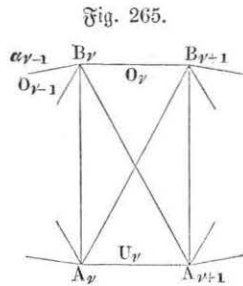


Fig. 265.

Art finden, daß die Diagonalen gedrückt werden, und daß für diesen Fall die Spannungen der unteren Gurtung constant sind, während diejenigen der oberen Gurtung kleiner ausfallen und gemäß den Gleichungen (4) von beiden Enden nach der Mitte hin zunehmen.

Es kann noch bemerkt werden, daß bei einer ungeraden Felderzahl  $n$  in dem Mittelfelde, in welchem die Gurtungen horizontal gerichtet sind, Fig. 265, die obere Gurtung ebenfalls eine kleinere Spannung annehmen wird, als

der constante Werth  $O$  in den übrigen Stücken dieser oberen Gurtung beträgt. Man erkennt nämlich leicht, daß die in dem Mittelfelde angebrachten Diagonalen bei der gleichmäßigen Belastung des ganzen Trägers keiner Anspannung ausgesetzt sein können, da für jede Trägerhälfte die verticale Scheerkraft gleich Null ist. Für den Knotenpunkt  $B_{\nu}$  erfordert daher das Gleichgewicht die Gleichheit der horizontalen Componenten:

$$O_{\nu} = O_{\nu-1} \cos \alpha_{\nu-1} = O \cos \alpha_{\nu-1} \dots \dots \dots (6)$$

Für dieses Mittelfeld ist dann natürlich in Uebereinstimmung mit (4) die Spannung  $U_{\nu}$  der unteren Gurtung gleich der der oberen  $O_{\nu}$ .

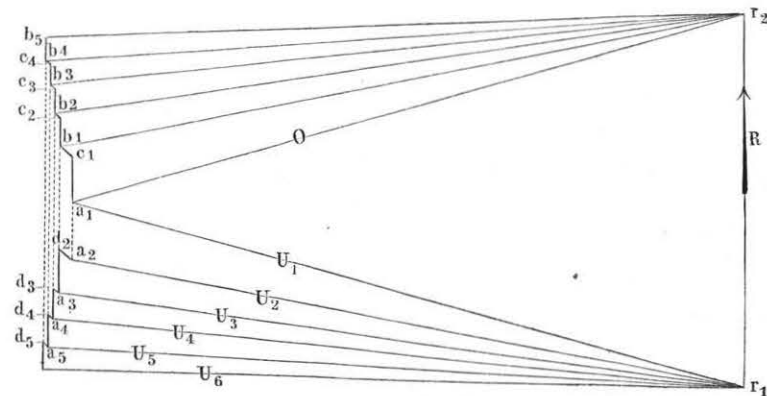
Aus der vorstehenden Untersuchung hat sich ergeben, daß die für den Pauli'schen Träger gestellte Bedingung einer durchweg gleichen Maximalspannung in allen Gurtungstheilen in aller Strenge

nicht erfüllbar ist, wenn man nicht etwa die Diagonalen für Zug- und Druckkräfte gleichzeitig widerstandsfähig machen will. Die Verschiedenheit der Gurtungsspannungen ist indessen im Allgemeinen nur gering und immer kleiner als sie bei dem Parabelträger ist, wie die unten folgende graphische Darstellung noch ersichtlich machen wird. Die Anstrengungen der Diagonalen sind bei voller Belastung des Trägers ebenfalls nur unbedeutend. Was die ungünstigsten Beanspruchungen derselben bei einseitigen Belastungen anbetrißt, so gelten hierfür die schon in den früheren Paragraphen angegebenen Regeln für den Träger mit parallelen Gurtungen und den Parabelträger. Wie bei dem letzteren findet man, daß alle Diagonalen sowohl Zug- wie Druckkräften ausgesetzt sind, und man daher auch in allen Feldern gekreuzte Diagonalen anzuordnen hat, wenn dieselben nur in einer Richtung widerstandsfähig sind. Wird bei diesen Trägern die Fahrbahn in der neutralen Ase angebracht, so hat man jeden unteren und jeden oberen Knotenpunkt mit demselben Gewichte  $\frac{p}{2}$  bzw.  $\frac{q}{2}$  belastet zu denken.

Um die Spannungen in den Gurtungen graphisch darzustellen, trägt man, Fig. 266, auf einer Verticalen die Größe des Stützendrucks für volle Belastung

$$r_1 r_2 = R = \frac{n-1}{2} q$$

Fig. 266.



auf und zieht durch die Endpunkte  $r_1$  und  $r_2$  Parallelen zu den Gurtungen  $AA_1$  und  $AB_1$  der Fig. 263, um in  $r_1 a_1 = a_1 r_2 = O = U_1$  die Spannungen in den ersten Feldern zu erhalten. Zieht man ferner durch  $r_1$  Parallelen mit sämtlichen unteren und durch  $r_2$  Parallelen mit allen oberen Gurtungen, macht wegen der gleichen Spannungen in der oberen Gurtung

$$r_2 b_1 = r_2 b_2 = r_2 b_3 \dots = r_2 a_1 = O$$



und legt durch die Endpunkte  $a_1, b_1, b_2 \dots$  verticale Linien entsprechend den Pfosten und die geneigten Linien  $b_1 c_1, b_2 c_2, b_3 c_3$  parallel mit den Diagonalen, so erhält man die Spannungen, welche bei der vollen Belastung sich in den Pfosten und Diagonalen einstellen. Es ist z. B.  $b_1 c_1$  die Spannung der Diagonale  $B_1 A_2$ . Zerlegt man ferner  $r_1 a_1 = U_1$  nach der Richtung der Verticalen und der folgenden Gurtung, so erhält man in  $r_1 a_2$  die Spannung  $U_2$ . Ebenso ergibt sich  $U_3 = r_1 a_3$ , wenn man die Diagonalenspannung  $c_1 b_1$  in  $a_2$  gleich  $a_2 d_2$  anträgt, und von  $d_2$  eine Verticallinie bis zum Schnitt mit der zum dritten Gurtungstheile Parallelen  $r_1 a_3$  zieht u. s. f.

Bei den Pauli'schen Brücken ist die obere Gurtung kastenförmig aus Eisenblechplatten zusammengelenket, während die untere gezogene Gurtung aus über einander gelegten Eisenschienen besteht. Die Säulen oder Pfosten, mit denen die Fahrbahn verbunden ist, sind zur Erzeugung der Druckfähigkeit mit gerippten Querschnitten ausgeführt, während die Diagonalen als Bänder dargestellt sind, da dieselben nur durch Zugkräfte angespannt werden. Nach dem Pauli'schen Systeme sind unter anderen die Eisenbahnbrücke über die Isar bei Großhefelohe und die Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz ausgeführt. Die letztere besteht aus 4 Hauptöffnungen von je 90 m Weite und aus 6 Fluthöffnungen von je  $33\frac{1}{2}$  m Weite, an welche sich dann noch 22 Oeffnungen von kleinerer Weite anschließen, so daß die ganze Brücke 1028,6 m lang ausfällt. Die Figuren 267 und 268 stellen die Seitenansicht und den Grundriß einer Hauptöffnung vor,  $AMA$  und  $ACA$  sind die beiden Gurtungen,  $DE$  die Stiele,  $EF$  und  $EG$  die Zugbänder und  $BCB$  ist die Brückenbahn. Die Enden  $A$  eines solchen Trägers ruhen mit ebenen Stahlplatten auf cylindrisch abgedrehten Lagerplatten aus Stahl, greifen aber auch noch zahnförmig ein, um eine Verschiebung zu verhindern. Die Lagerplatten selbst sind auf gußeisernen Stühlen befestigt, von welchen der eine auf dem Pfeiler feststeht, während der andere mittelst Walzen darauf ruht, um eine Längenverschiebung in Folge der Temperaturveränderung zu ermöglichen. Die aus Sandsteinquadern aufgeführten Strompfeiler haben 4,25 m Stärke und ruhen auf einer 3,5 bis 3,8 m dicken und 10 m breiten Betonschicht, welche von einer dicken Pfahlwand eingefaßt und mittelst einer starken Steinschüttung vor Zerstörung gesichert wird. Die Entfernung der Gurtungen beträgt in der Mitte 15 m, die lichte Brückenweite 4 m und die Höhe der Fahrbahn über dem Nullpunkte des Pegels 15,1 m. Die Constructionshöhe, gemessen von der Fahrbahn bis zur Unterkante der Träger, mißt 1 m.

Die Querdimensionen der Constructionstheile sind so gewählt, daß durch das Eigengewicht der Brücke und die dreifache größte Verkehrsbelastung eine Spannung von 16 kg pro 1 qmm erzeugt wird, welcher hohe Werth nur deswegen als zulässig angenommen werden durfte, weil jedes einzelne Stück vor seiner Verwendung durch eine Anstrengung bis zu dem angegebenen

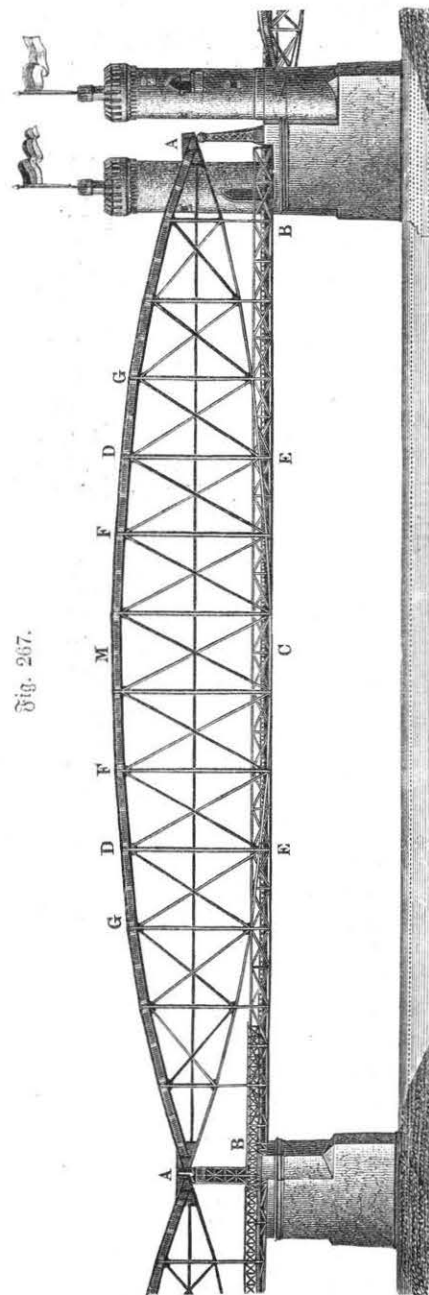


Fig. 267.

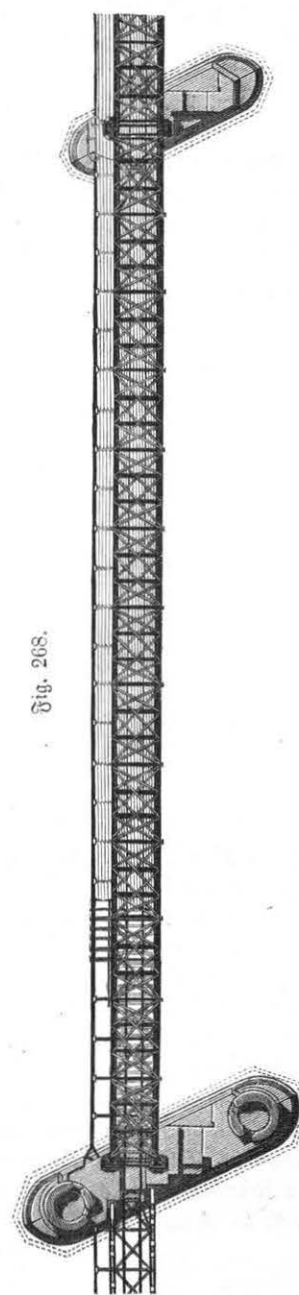
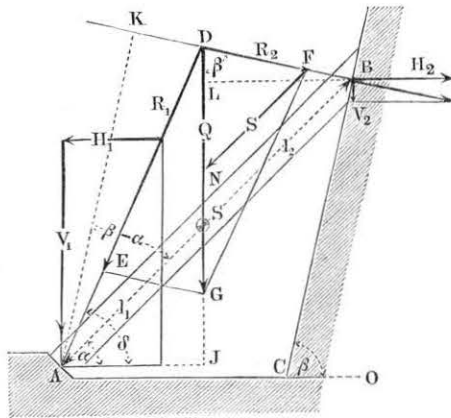


Fig. 268.

Beträge geprüft wurde. Dieser Anstrengung entsprechend sind die unteren Gurtingen aus  $9.2 = 18$  Blechbändern von je 0,2 m Breite und 12 mm Dicke zusammengesetzt, während jeder Druckbaum aus einer rectangulären Röhre von 1 m Weite und 12 mm Wandstärke besteht.

§. 59. Sparren. Zu den Fachwerken hat man auch die Dachstühle zu rechnen, bei denen nur eine ruhende Belastung wirksam ist, welche, aus dem Eigengewichte der Construction incl. des Deckungsmaterials sowie aus dem Schnee und Winddruck bestehend, gleichförmig über die ganze Dachfläche vertheilt gedacht werden kann. Durch das Gewicht der Bedeckung, den Schnee

Fig. 269.



und Winddruck werden zunächst die Sparren angegriffen, welche den auf sie ausgeübten Druck durch die quer unter ihnen angeordneten Pfetten auf die Knotenpunkte der Dachbinder übertragen, die in gewissen Abständen von einander in parallelen verticalen Ebenen angeordnet sind. Nur bei den kleinsten Spannweiten fallen diese Dachbinder und Pfetten ganz fort, indem die Sparren selbst als Träger auftreten. Es möge zunächst die Wirkung der einfachen Sparren besprochen werden. Zu dem Ende sei ein Sparren von der Länge  $AB = l$ , Fig. 269, unter dem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont geneigt, und in  $B$  gegen eine feste Wand  $BC$  gestützt, deren Neigung gegen den Horizont durch  $BCO = \beta$  gegeben sei. Wenn die auf den Balken wirkende Kraft  $Q$  durch den Punkt  $S$  im Abstände  $AS = l_1$  und  $BS = l_2$  von den Mitten der Stützflächen hindurchgeht, so findet man die in diesen Stützflächen erzeugten Druck- oder Stützreaktionen  $R_1$  und  $R_2$  in folgender Art. Sieht man von der Reibung in den Stützflächen ab, so hat man sich die Reaction der Wand in  $B$  senkrecht zu  $CB$  vorzustellen, und wenn man den Durchschnittspunkt  $D$  dieser Normalen und der Belastung  $Q$  mit dem Fußpunkte  $A$  verbindet, so giebt  $AD$  die Richtung der Reaction  $R_1$  in  $A$  an. Es möge etwa vorausgesetzt sein, daß die Stützfläche bei  $A$  senkrecht zu der Richtung  $AD$  stehe, was in Wirklichkeit nicht

gerade notwendig ist, da wegen der hier nicht berücksichtigten Reibung das Gleichgewicht auch noch bestehen bleibt, wenn die Druckrichtung  $AD$  von der Normalen zur Stützfläche um einen Winkel abweicht, welcher nicht größer ist, als der zugehörige Reibungswinkel.

Zerlegt man nun die Belastung  $DG = Q$  nach den Richtungen  $DA$  und  $DB$ , so erhält man in den Componenten  $DE$  und  $DF$  die Druckkräfte in  $A$  und  $B$ , also auch die ihnen gleichen und entgegengesetzten Reactionen  $R_1$  und  $R_2$  in den Stützpunkten  $A$  und  $B$ . Zur Bestimmung dieser Kräfte hat man für den Mittelpunkt der Momente in  $A$ :

$$Q \cdot AJ = R_2 \cdot AK \text{ oder } Q l_1 \cos \alpha = R_2 l \cos (\beta - \alpha),$$

folglich die Reaction der Wand:

$$R_2 = Q \frac{l_1 \cos \alpha}{l \cos (\beta - \alpha)}, \quad (1)$$

deren horizontale und verticale Componenten daher durch:

$$H_2 = R_2 \sin \beta = Q \frac{l_1 \cos \alpha \sin \beta}{l \cos (\beta - \alpha)} = H \quad (2)$$

und

$$V_2 = R_2 \cos \beta = Q \frac{l_1 \cos \alpha \cos \beta}{l \cos (\beta - \alpha)} = H \cotg \beta \quad (3)$$

ausgedrückt sind. In dem unteren Stützpunkte  $A$  muß die Horizontalkraft  $H_1 = H_2 = H$  sein, während man daselbst die Vertikalkraft zu:

$$V_1 = Q - V_2 = Q \left( 1 - \frac{l_1 \cos \alpha \cos \beta}{l \cos (\beta - \alpha)} \right) = Q - H \cotg \beta \quad (4)$$

findet. Für die Reaction  $R_1$  hat man aus dem Dreieck  $DGF$ , wenn  $\delta = JAD$  den Neigungswinkel dieser Reactionen gegen den Horizont bedeutet:

$$R_1 = Q \frac{\sin \beta}{\cos (\delta - \beta)} = \sqrt{V_1^2 + H^2}, \quad (5)$$

und zwar bestimmt sich der Neigungswinkel  $\delta$  nach der Figur, wenn man  $BL$  horizontal zieht, aus:

$$\tg \delta = \frac{DJ}{AJ} = \frac{l \sin \alpha + l_2 \cos \alpha \cotg \beta}{l_1 \cos \alpha} = \frac{l}{l_1} \tg \alpha + \frac{l_2}{l_1} \cotg \beta \quad (6)$$

Um die Spannung  $S$  in dem Sparren zu bestimmen, hat man zu beachten, daß der letztere unter dem Einflusse der drei auf ihn wirkenden Kräfte  $Q$ ,  $R_1$  und  $R_2$  im Gleichgewichte sein muß. Zerlegt man daher jede der Reactionen  $R_1$  und  $R_2$  in zwei Componenten nach der Axe  $AB$  des Sparrens, und nach verticaler Richtung, so müssen die beiden letzteren eine Summe gleich  $Q$  geben, während die beiden ersteren gleich und ent-

gegengesetzt sind und die Spannung  $S$  ergeben, mit anderen Worten: die Spannung  $S$  in dem Balken ergibt sich immer als die Mittelkraft aus der Reaction eines Stützpunktes und der Componente, welche man für diesen Punkt erhält, wenn man die Belastung  $Q$  in ihre beiden durch die Stützpunkte gehenden verticalen Componenten zerlegt. Diese Zerlegung von  $R_2 = FD$  in  $FN = S$  und  $ND = Q_b$  ergibt nach der Figur:

$$\frac{S}{R_2} = \frac{\sin \beta}{\sin (90^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \beta}{\cos \alpha},$$

also mit Bezug auf (1):

$$S = R_2 \frac{\sin \beta}{\cos \alpha} = Q \frac{l_1}{l} \frac{\sin \beta}{\cos (\beta - \alpha)} \quad (7)$$

Für die verticale Componente  $Q_b$  in dem Stützpunkte  $B$  erhält man in gleicher Weise aus:

$$\frac{Q_b}{R_2} = \frac{\sin (90^\circ - \beta + \alpha)}{\sin (90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos (\beta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

$$Q_b = R_2 \frac{\cos (\beta - \alpha)}{\cos \alpha} = Q \frac{l_1}{l}, \quad (8)$$

wie auch aus einer directen Zerlegung von  $Q$  in zwei durch  $A$  und  $B$  gehende Seitenkräfte sich ergeben würde. In gleicher Weise liefert eine Zerlegung von  $R_1$  denselben Werth für  $S$  und eine verticale Kraft

$$Q_a = Q \frac{l_2}{l} \quad (9)$$

In den vorstehend gefundenen Formeln hat man  $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$  zu setzen, wenn, unter Voraussetzung einer gleichmäßigen vertheilten Last, der Angriffspunkt derselben in der Mitte zwischen  $A$  und  $B$  gelegen ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man:

a) Für eine verticale Wandfläche  $BC$ , Fig. 270, mit  $\beta = 90^\circ$ :

$$R_2 = H = \frac{Q}{2 \operatorname{tg} \alpha} \quad (1^a)$$

$$V_2 = 0 \text{ und } V_1 = Q \quad (4^a)$$

$$R_1 = Q \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}\right)^2} \quad (5^a)$$

$$\operatorname{tg} \delta = 2 \operatorname{tg} \alpha \quad (6^a)$$

und

$$S = \frac{Q}{2 \sin \alpha} \quad (7^a)$$

b) Für  $\beta = \alpha$ , Fig. 271:

$$R_2 = \frac{Q}{2} \cos \alpha \quad (1^b)$$

$$H = \frac{Q}{4} \sin 2\alpha \quad (2^b)$$

$$V_2 = \frac{Q}{2} \cos^2 \alpha \quad (3^b)$$

$$V_1 = Q \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{2}\right) \quad (4^b)$$

$$R_1 = Q \sqrt{\left(\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)^2 + \left(\frac{2 - \cos^2 \alpha}{2}\right)^2} \quad (5^b)$$

$$\operatorname{tg} \delta = 2 \operatorname{tg} \alpha + \cotg \alpha \quad (6^b)$$

und

$$S = \frac{Q}{2} \sin \alpha \quad (7^b)$$

Fig. 270.

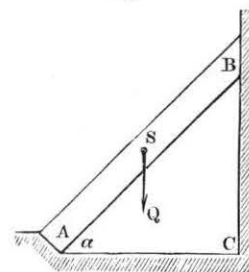


Fig. 271.

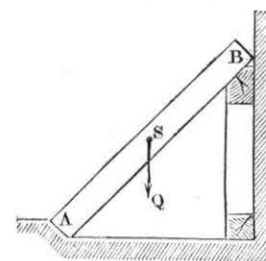
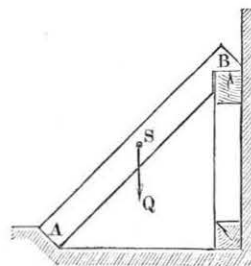


Fig. 272.



c) Für  $\beta = 0$ , Fig. 272:

$$R_1 = R_2 = V_1 = V_2 = \frac{Q}{2},$$

$$H = 0; \delta = 90^\circ \text{ und } S = 0 \text{ u. s. f.}$$

Die vorstehend unter a) angegebenen Formeln gelten für die Fälle, in welchen die Sparren gegen eine verticale Wand, Fig. 273 (a. f. S.), oder gegen andere symmetrische Sparren, Fig. 274 (a. f. S.), sich stützen. Setzt man hier noch die Dachhöhe  $BC = h$  und die halbe Weite  $AC = w$ , so hat man mit  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{w}$  aus (1<sup>a</sup>) den Sparrenschub



$$H = \frac{1}{2} Q \frac{w}{h}, \quad (10)$$

also direct mit der Spannweite und umgekehrt mit der Dachhöhe proportional. Dieser Sparrenschub fällt daher um so größer aus, je flacher das Dach ist, und wird z. B. für  $h = \frac{w}{2}$ , oder  $\alpha = 26^\circ 34'$ , gleich der gesammten Belastung  $Q$  des Sparrens. Um dem horizontalen

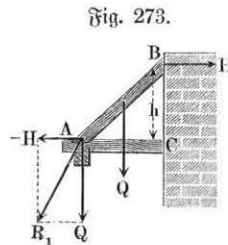


Fig. 273.

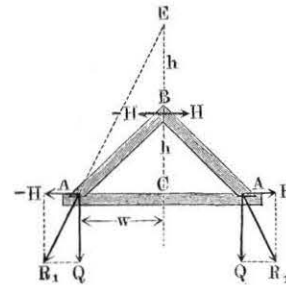


Fig. 274.

Sparrenschube zu begegnen, ist der Sparrenfuß bei A in den Spannbalken AC einzufächern, oder es ist ein geeigneter Sparrenschuh in Anwendung zu bringen.

Der Gesamtdruck des Sparrens im Fußpunkte A ist nach (5<sup>a</sup>):

$$R_1 = Q \sqrt{1 + \left(\frac{w}{2h}\right)^2},$$

und seine Neigung  $\delta$  gegen den Horizont bestimmt sich nach (6<sup>a</sup>) durch:

$$\tan \delta = 2 \tan \alpha = \frac{2h}{w}.$$

Man findet hiernach die Richtung der Reaction im Fußpunkte A des Sparrens in der Geraden AE, sofern man  $CE = 2 CB = 2h$  macht.

Wenn dagegen der Sparren am oberen Ende auf einer Wand ruht, Fig. 275 und Fig. 276, so gelten die unter b) mit  $\beta = \alpha$  entwickelten Ausdrücke und es fällt in diesem Falle sowohl der Sparrenschub  $H$  wie die Spannung  $S$  kleiner aus, als im Vorhergehenden. Man hat nämlich hierfür:

$$H = \frac{Q}{2} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{Q}{2} \frac{wh}{w^2 + h^2},$$

oder, wenn man mit  $q$  die Belastung des Sparrens pro Längeneinheit bezeichnet, und die Länge  $l = \sqrt{w^2 + h^2}$  setzt:

$$H = \frac{q}{2} \frac{wh}{\sqrt{w^2 + h^2}}, \quad (10^b)$$

während bei dem sich anlehnenden Sparren der Figuren 273 und 274

$$H = \frac{q}{2} \frac{w \sqrt{w^2 + h^2}}{h} \quad (10^a)$$

gesetzt werden kann.

Man erkennt aus den Gleichungen (10<sup>a</sup>) und (10<sup>b</sup>), daß bei einer gegebenen Spannweite  $w$  und specifischen Belastung  $q$  der Sparrenschub des

Fig. 275.

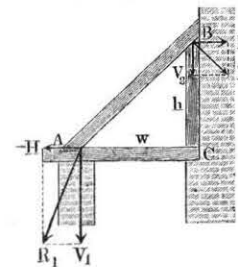
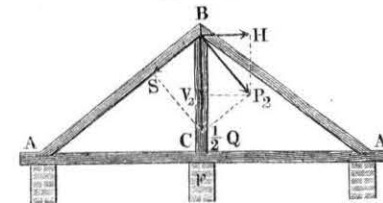


Fig. 276.



nur angelehnten Sparrens, Fig. 274, um so größer, der des gestützten Sparrens, Fig. 276, aber um so kleiner wird, je niedriger das Dach, d. h. je kleiner  $h$  gewählt wird.

Eine ähnliche Beziehung gilt hinsichtlich des Sparrendruckes  $S$ , welcher bei dem gestützten Sparren, Fig. 276, zu:

$$S = \frac{Q}{2} \sin \alpha = \frac{q}{2} h, \quad (11^b)$$

und bei dem nur angelehnten Sparren, Fig. 274, zu:

$$S = \frac{Q}{2 \sin \alpha} = \frac{q}{2} \frac{w^2 + h^2}{h} \quad (11^a)$$

folgt.

Der Verticaldruck des durch die Wand gestützten Balkens im Fußpunkte A beträgt nach (4<sup>b</sup>):

$$V_1 = Q \left(1 - \frac{\cos^2 \alpha}{2}\right),$$

während die stützende Wand bei dem einseitigen Sparren in Fig. 275 den Verticaldruck:

$$V_2 = \frac{Q}{2} \cos^2 \alpha$$

und in Fig. 276 den doppelten Druck:

$$V_2 = Q \cos^2 \alpha$$

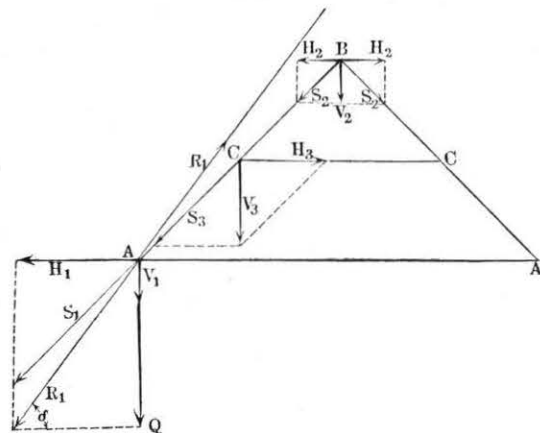
empfangt.

Damit die Säule  $BC$  in Fig. 275 durch den Horizontalschub  $H$  nicht umgestürzt werde, ist es nöthig, sie von rechts noch besonders durch eine Mauer zu stützen, während in Fig. 276 die beiderseits von den Sparren ausgeübten horizontalen Schubkräfte sich gegenseitig aufheben, wenn die Anordnung und Belastung symmetrisch vorausgesetzt werden. Die Richtung der Reaction im Fußpunkte ist nach (6<sup>b</sup>) durch

$$\operatorname{tg} \delta = 2 \operatorname{tg} \alpha + \cotg \alpha = \frac{2h}{w} + \frac{w}{h}$$

gegeben.

Wenn die Sparren  $AB$ , Fig. 277, durch einen Kehlbalken  $CC$  verbunden sind, so erhält man, wenn die Sparren selbst als vollkommen starr Fig. 277.



angesehen werden, bei der Belastung der Längeneinheit durch das Gewicht  $q$  in  $A$ ,  $B$  und  $C$  vertical abwärts wirkende Gewichte zu:

$$V_1 = \frac{1}{2} q l_1, \quad V_2 = \frac{1}{2} q l_2 \quad \text{und} \quad V_3 = \frac{1}{2} q l = \frac{Q}{2},$$

und aus der Zerlegung dieser Kräfte den horizontalen Schub im Scheitelpunkte  $B$ :

$$H_2 = \frac{1}{2} q l_2 \cotg \alpha, \quad \dots \quad (12)$$

und die Spannung in dem oberen Sparrenstück  $BC$ :

$$S_2 = \frac{V_2}{\sin \alpha} = q \frac{l_2}{2 \sin \alpha} \quad \dots \quad (13)$$

Ebenso folgt für den Kehlbalken  $CC$  der Horizontalschub:

$$H_3 = \frac{1}{2} q l \cotg \alpha = \frac{Q}{2} \cotg \alpha, \quad \dots \quad (14)$$

sowie für das untere Sparrenstück  $CA$  die Kraft:

$$S_1 = S_2 + S_3 = S_2 + \frac{V_3}{\sin \alpha} = q \frac{l_2 + l}{2 \sin \alpha}, \quad \dots \quad (15)$$

und der Horizontalschub in  $A$ :

$$H_1 = S_1 \cos \alpha = q \frac{l_2 + l}{2} \cotg \alpha, \quad \dots \quad (16)$$

und für  $l_1 = l_2 = \frac{1}{2} l$ :

$$H_1 = \frac{3}{4} Q \cotg \alpha = \frac{3}{4} Q \frac{w}{h}.$$

Setzt man die Spannung  $S_1$  mit dem Verticaldruck  $V_1$  in  $A$  zusammen, so erhält man die gesammte Wirkung auf die Stütze  $A$ , oder die Reaction daselbst:

$$\begin{aligned} R_1 &= \sqrt{H_1^2 + (V_1 + S_1 \sin \alpha)^2} = \sqrt{H_1^2 + Q^2} \\ &= Q \sqrt{\left(\frac{l_2 + l}{2l} \cotg \alpha\right)^2 + 1}, \quad \dots \quad (17) \end{aligned}$$

also für  $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$  wird:

$$R_1 = Q \sqrt{\left(\frac{3}{4} \cotg \alpha\right)^2 + 1} = Q \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4} \frac{w}{h}\right)^2}. \quad (17^a)$$

Für die Sparren ohne Kehlbalken fand sich oben nach (1<sup>a</sup>) und (5<sup>a</sup>):

$$H_1 = \frac{1}{2} Q \frac{w}{h} \quad \text{und} \quad R_1 = Q \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \frac{w}{h}\right)^2},$$

so daß also durch die Anwendung des Kehlbalkens der Sparrenschub und die Auflagerreaction vergrößert werden.

Der Neigungswinkel  $\delta$  für die Reactionsrichtung ergibt sich zu:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{Q}{H_1} = \frac{2l}{l_2 + l} \operatorname{tg} \alpha, \quad \dots \quad (18)$$

was mit  $l_1 = l_2$  in  $\frac{4}{3} \operatorname{tg} \alpha$  und mit  $l_2 = 0$  in  $\operatorname{tg} \delta = 2 \operatorname{tg} \alpha$  wie oben übergeht.

Wenn der Kehlbalken  $CC$  durch die Stuhlsäulen  $CD$ , Fig. 278 (a. f. S.), unterstützt ist, zerlegt sich der Verticaldruck  $\frac{Q}{2}$  auf die Pfette in  $C$  nach der Richtung des Kehlbalkens und der unter  $\alpha_1$  geneigten Stuhlsäule in:

$$H_3 = \frac{Q}{2} \cotg \alpha_1$$

und

$$S_3 = \frac{Q}{2 \sin \alpha_1}$$

In diesem Falle ist der Horizontalschub in  $A$  durch:

$$H_1 = \frac{1}{4} Q \cotg \alpha$$

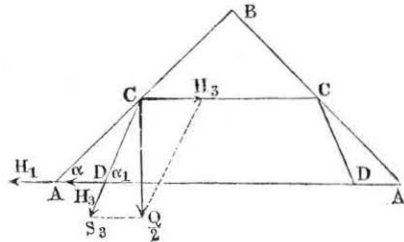
ausgedrückt, während die Stuhlsäule den Spannbalken  $AA$  in  $D$  mit der Kraft  $H_3 = \frac{Q}{2} \cotg \alpha_1$  angreift, so daß das mittlere Balkenstück  $DD$  einem Gesamtzuge

$$H = H_1 + H_3 = Q \frac{\cotg \alpha + 2 \cotg \alpha_1}{4} \quad (19)$$

ausgesetzt ist.

Wenn die beiden Sparren  $A_1B$  und  $A_2B$ , Fig. 279, unter verschiedenen Winkeln  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gegen den Horizont geneigt sind, so weicht die Reaction

Fig. 278.



$R_3$ , mit welcher sie auf einander wirken, von der horizontalen Richtung um einen gewissen Winkel  $\beta$  ab, welcher sich wie folgt bestimmt.

Bezeichnet man mit  $H_3$  die horizontale und mit  $V_3$  die verticale Componente der Kraft  $R_3$ , so hat man für  $A_1$  als Mittelpunkt der Momente:

$$Q_1 \frac{w_1}{2} - V_3 w_1 = H_3 h$$

oder

$$V_3 = \frac{Q_1}{2} - H_3 \tg \alpha_1 \quad (20)$$

Ebenso ist für den Momentenmittelpunkt in  $A_2$ :

$$Q_2 \frac{w_2}{2} + V_3 w_2 = H_3 h$$

oder

$$V_3 = H_3 \tg \alpha_2 - \frac{Q_2}{2} \quad (21)$$

Aus der Gleichsetzung dieser Ausdrücke für  $V_3$  folgt:

$$H_3 = \frac{1}{2} \frac{Q_1 + Q_2}{\tg \alpha_1 + \tg \alpha_2} \quad (22)$$

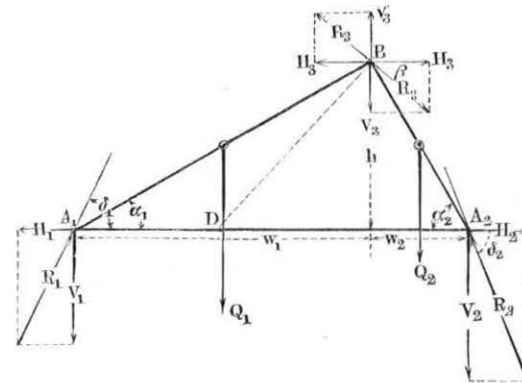
und daher

$$V_3 = \frac{Q_1}{2} - H_3 \tg \alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_1 \tg \alpha_2 - Q_2 \tg \alpha_1}{\tg \alpha_1 + \tg \alpha_2} \quad (23)$$

Der Neigungswinkel  $\beta$  folgt daher aus:

$$\tg \beta = \frac{V_3}{H_3} = \frac{Q_1 \tg \alpha_2 - Q_2 \tg \alpha_1}{Q_1 + Q_2} \quad (24)$$

Fig. 279.



Man hat die Ebene  $BD$ , in welcher sich die Sparrenköpfe berühren, senkrecht zur Richtung von  $R_3$ , d. h. den Winkel  $BD A_2 = 90^\circ - \beta$  zu machen.

Für die Sparrenfüße  $A_1$  und  $A_2$  sind die Horizontalschübe  $H_1$  und  $H_2$  ebenfalls gleich  $H_3$ , während die Vertikalkräfte durch:

$$V_1 = Q_1 - V_3 = Q_1 - \frac{1}{2} \frac{Q_1 \tg \alpha_2 - Q_2 \tg \alpha_1}{\tg \alpha_1 + \tg \alpha_2} \quad (25)$$

in  $A_1$  und durch

$$V_2 = Q_2 + V_3 = Q_2 + \frac{1}{2} \frac{Q_1 \tg \alpha_2 - Q_2 \tg \alpha_1}{\tg \alpha_1 + \tg \alpha_2} \quad (26)$$

in  $A_2$  gegeben sind.

Für die Winkel  $\delta_1$  und  $\delta_2$  der Reactionen  $R_1$  und  $R_2$  hat man daher:

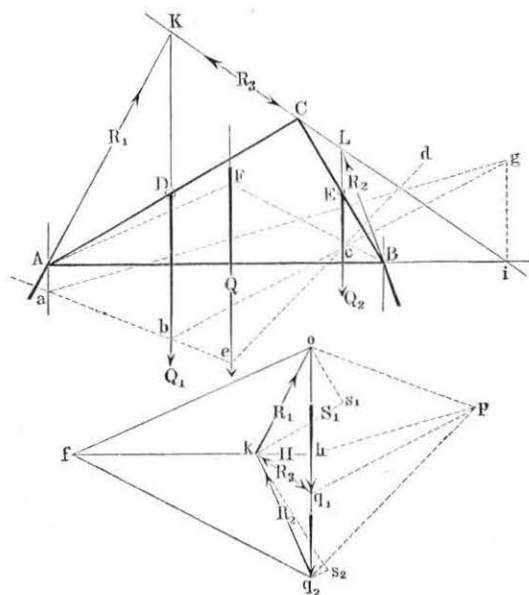


$$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{V_1}{H} = \frac{(2Q_1 + Q_2) \operatorname{tg} \alpha_1 + Q_1 \operatorname{tg} \alpha_2}{Q_1 + Q_2} \quad (27)$$

$$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{V_2}{H} = \frac{Q_2 \operatorname{tg} \alpha_1 + (2Q_2 + Q_1) \operatorname{tg} \alpha_2}{Q_1 + Q_2} \quad (28)$$

Man findet auch leicht in jedem Falle die auf die Sparren wirkenden Kräfte auf graphischem Wege, welcher an dem allgemeinen Beispiele der Fig. 280

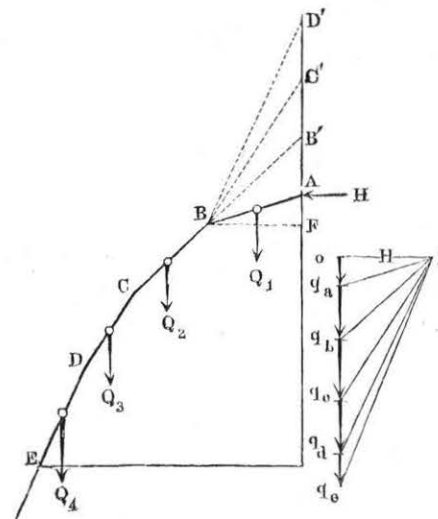
Fig. 280.



gezeigt werden soll, in welchem die Sparren AC und BC beliebig gegen den Horizont geneigt sein mögen, und auch die Belastungen  $Q_1$  und  $Q_2$  in beliebigen Punkten D und E angreifend gedacht werden sollen. Man trägt zunächst auf einer Verticalen die Belastungen  $Q_1 = oq_1$  und  $Q_2 = q_1q_2$  auf, wählt ganz beliebig den Pol p und zeichnet zu den Polstrahlen  $po$ ,  $pq_1$  und  $pq_2$  parallel das Seilpolygon  $abcd$ , wodurch man in dem Schnittpunkte e der Endseile einen Punkt für die Gesamtbelastung  $Q = Q_1 + Q_2$  erhält. Durch dieses Gesamtgewicht Q werden in den Stützpunkten A und B verticale Auflagerdrücke  $Q_a$  und  $Q_b$  erzeugt, welche man erhält, wenn man Q in einem beliebigen Punkte F nach den Richtungen FA und FB zerlegt denkt. Zieht man daher im Kräftepolygone durch o eine

Parallele of mit AF und durch  $q_2$  eine Parallele  $q_2f$  mit BF, so theilt die durch f gezogene Horizontale fh die Belastung Q bekanntlich in die beiden verticalen Stützdrücke  $oh = Q_a$  und  $hq_2 = Q_b$ . Da der Punkt F beliebig gewählt worden, so ist durch fh noch nicht der Horizontalschub H gegeben; um denselben zu erlangen, muß noch die Richtung der Reaction  $R_3$  bestimmt werden, mit welcher die Sparren in C gegen einander wirken. Hierzu denkt man sich einen Sparren, z. B. AC, im Gleichgewichte unter dem Einflusse der Kräfte  $Q_1$  in D,  $R_3$  in C und  $R_1$  in A.  $R_3$  ist noch der Richtung und Größe nach unbekannt, und von der Reaction  $R_1$  ist nur die verticale Componente  $Q_a = ho$  gefunden. Man setzt nun  $Q_1$  mit  $Q_a$  zu einer Mittelkraft zusammen, deren Lage man erhält, wenn man parallel mit den Polstrahlen  $pq_1$ ,  $po$  und  $ph$  das Seilpolygon  $gba$  zeichnet, indem die gesuchte Mittelkraft in die Verticale durch den Schnitt g der Endseile fällt. Diese Mittelkraft  $hg_1$  von  $Q_1$  und  $Q_a$  muß mit H und  $R_3$  im Gleichgewichte sein, und da sie die in A wirksame Horizontalcomponente H in i schneidet, so muß  $R_3$  durch denselben Punkt gehen, also in die Richtung iC fallen.

Fig. 281.



Daher erhält man H und  $R_3$ , wenn man im Kräftepolygon durch  $q_1$  eine Parallele  $q_1k$  mit iC zieht, wodurch  $kq_1 = R_3$  und  $kh = H$  festgestellt sind. Zieht man nach  $ko$  und  $kq_2$ , welche Linien mit AK und BL parallel ausfallen müssen, so erhält man der Richtung und Größe nach die Stützreactionen  $R_1 = ko$  in A und  $R_2 = q_2k$  in B. Will man endlich die Spannkraften in den Sparren finden, so hat man nur durch k Parallelen zu denselben zu

ziehen und die Kräfte  $R_1$  und  $R_2$  auf diese Linien zu projiciren, um die Spannung von AC in  $S_1 = ks_1$  und diejenige von BC in  $S_2 = s_2k$  zu finden.

Ebenso kann das Kräftepolygon dazu dienen, die Kräfte für ein Gespärre zu finden, bei welchem der Sparren AB, Fig. 281, mit seinem Fuße A

nicht auf einem Balken oder Bundtrame, sondern auf einem zweiten Sparren  $BC$ , dieser wieder auf einem dritten  $CD$  u. s. w. aufricht, wie dies bei den bekannten Mansarddächern der Fall ist. Hierbei ist jedem der unteren Sparren diejenige Richtung zu geben, in welcher der auf ihn sich stützende Sparren drückt. Seien die Gewichte  $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$  der einzelnen Sparren, welche in deren Mitten wirksam gedacht werden mögen, jedes in die beiden verticalen Componenten zerlegt, die in den Enden des Sparrens angreifen, und seien also die Belastungen der Knotenpunkte  $A, B, C, D$  durch

$$Q_a = \frac{Q_1}{2}, \quad Q_b = \frac{Q_1 + Q_2}{2}, \quad Q_c = \frac{Q_2 + Q_3}{2} \dots$$

ausgedrückt, so trägt man diese Kräfte nach einem beliebigen Kräftemaßstabe auf einer Verticalen zu

$$oq_a = Q_a, \quad q_a q_b = Q_b, \quad q_b q_c = Q_c \dots$$

an, und wählt auf der Horizontalen durch  $o$  willkürlich den Pol  $p$ .

Es ist nun ohne Weiteres klar, daß die einzelnen Polstrahlen  $pq_a, pq_b \dots$  die Reactionen in  $B, C \dots$  der Richtung und Größe nach ergeben, und daß man daher die Sparren nach diesen Richtungen anordnen muß, d. h. man hat  $AB$  parallel mit  $pq_a$ ,  $BC$  parallel mit  $pq_b \dots$  zu stellen. Die Polabstand  $op$  stellt hierbei den überall gleichen Horizontalschub des Gespärres dar.

Wenn hierbei die Neigung irgend eines Sparrens, z. B. des untersten  $ED$ , vorgeschrieben wäre, so hätte man den Pol nicht willkürlich zu wählen, sondern man wird ihn finden, wenn man durch den Punkt  $q_a$ , welcher die Belastung des Knotenpunktes  $D$  begrenzt, eine Gerade  $q_a p$  unter der gewünschten Sparrenneigung zieht. Die Analogie dieser Construction mit der bei Gewölben zur Ermittlung der Stützlinie angegebenen fällt ins Auge. Auch erkennt man, daß bei gleichem Gewichte der einzelnen Sparren die an den Punkt  $B$  angetragenen Richtungen derselben die Verticallinie durch den Scheitel in Punkten  $A, B', C', D'$  schneiden, deren Abstände von der durch  $B$  gelegten Horizontalen  $BF$  sich verhalten wie 1, 3, 5, 7, worauf eine öfter angegebene Construction zur Bestimmung der Sparrenrichtungen solcher Dächer beruht.

Beispiel. Ein Dach nach Art der Fig. 274 habe 12 m Tiefe und 8 m Höhe, die um 1 m von einander abstehenden Sparren haben 0,16 m Breite und 0,20 m Höhe des Querschnitts, wie groß ist der Sparrenschub für eine Belastung des Daches von 200 kg pro Quadratmeter Grundfläche?

Hier beträgt die Belastung eines Sparrens durch die Dachfläche  $6 \cdot 1 \cdot 200 = 1200$  kg, wozu das Gewicht des Sparrens bei einem specifischen Gewichte des Holzes von 0,6 mit

$0,16 \cdot 0,20 \cdot 0,6 \cdot 1000 \sqrt{8^2 + 6^2} = 192 = \text{rot } 200$  kg tritt, so daß man

$$Q = 1200 + 200 = 1400 \text{ kg}$$

hat. Demgemäß folgt nach (10) der Horizontalschub:

$$H = \frac{1}{2} 1400 \frac{6}{8} = 525 \text{ kg.}$$

Der Gesamtdruck des Sparrens im Fußpunkte ist nach (5a):

$$R_1 = 1400 \sqrt{1 + \left(\frac{6}{8}\right)^2} = 1495 \text{ kg,}$$

und seine Neigung  $\delta$  gegen den Horizont findet man aus:

$$\operatorname{tg} \delta = 2 \frac{8}{6} = 2,667 \text{ zu } \delta = 69^\circ 27'.$$

Der Neigungswinkel  $\alpha$  des Sparrens folgt aus:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3} \text{ zu } \alpha = 53^\circ 10'.$$

Würde man nach Fig. 276 eine Säule anwenden, so würde man den Horizontalschub nach (10<sup>b</sup>) zu

$$H = \frac{1}{2} 1400 \frac{6 \cdot 8}{36 + 64} = 336 \text{ kg,}$$

und den Verticaldruck der Säule, welcher von jedem Sparren ausgeübt wird, zu

$$V_2 = \frac{1}{2} 1400 \cos^2 53^\circ 10' = 251 \text{ kg}$$

erhalten. Der Verticaldruck im Fußpunkte jedes Sparrens beträgt daher

$$1400 - 251 = 1149 \text{ kg,}$$

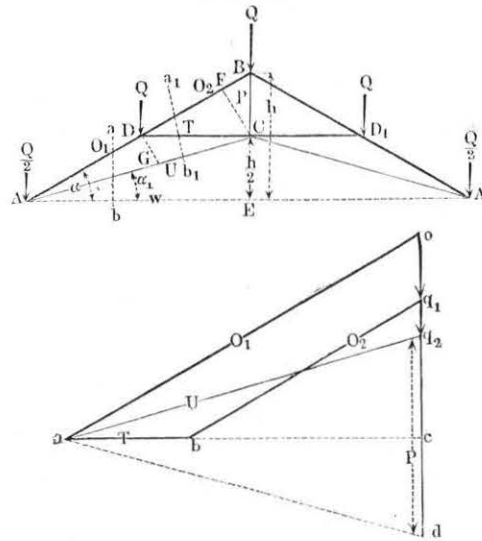
der Gesamtdruck auf die Säule

$$2 \cdot 251 = 502 \text{ kg.}$$

**Dachstühle.** Bei größerer Weite der zu überdachenden Räume werden §. 60. zusammengesetzte Dachconstructionen oder Dachstühle angewendet, deren Beanspruchung in derselben Weise zu beurtheilen ist, wie die der Fachwerke. Als Beispiele mögen die in der Ausführung gebräuchlichsten Dachconstructionen angeführt werden.

Bei dem deutschen Dachstuhl, Fig. 282 (a. f. S.), sind die beiden symmetrisch gegen einander gestellten Sparren  $AB$  und  $A_1 B$  in ihren Mitten  $D$  und  $D_1$  durch einen horizontalen Kehlbalken oder Spannriegel unterstützt, dessen Mitte  $C$  durch Zugstangen mit den Enden  $AA_1$  und dem First  $B$  verbunden ist. Die Belastung drückt hier, wie bei allen Fachwerken, auf die Knotenpunkte  $A, D$  und  $B$ , indem in diesen Punkten Pfetten angeordnet sind, auf welchen die Sparren ruhen. Diese Lastpunkte werden fast immer in gleichen horizontalen Entfernungen von einander angeordnet, und es möge hier und bei den folgenden Dachconstructionen mit  $a$  dieser

horizontale Abstand zweier Lastpunkte, mit  $2w = AA_1$  die Spannweite und mit  $h$  die Höhe  $BE$  des Firstes über den Auflagern  $AA_1$  bezeichnet werden. Die Belastung eines inneren Knotenpunktes sei  $Q$ ; dann kommt auf jedes Auflager  $A$  und  $A_1$  eine Last gleich  $\frac{Q}{2}$ , welche direct von der Mauer aufgenommen wird, daher auf die Spannungen der Fachwerkglieder ohne Einfluß ist und bei deren Bestimmung nicht besonders in Rechnung Fig. 282.



gebracht werden soll. Der Auflagerdruck in  $A$  und in  $A_1$  beträgt daher im vorliegenden Falle

$$R_1 = R_2 = \frac{3}{2} Q,$$

oder im Allgemeinen bei  $n$  Intervallen ( $n$  ist hier stets eine gerade Zahl)

$$R = \frac{n-1}{2} Q \quad (1)$$

Um die Pressungen  $O_1$  und  $O_2$  in den Strecken des Sparrens oder der oberen Gurtung  $AD$  und  $DB$  zu bestimmen, denkt man sich einen Schnitt nach  $ab$  oder  $a_1b_1$  und wählt  $C$  zum Momentenmittelpunkte, wodurch man, wenn  $CF$  senkrecht zu  $AB$  gezogen ist,

$$O_1 \cdot CF = R \cdot 2a = \frac{3}{2} Qw \text{ und}$$

erhält.

$$O_2 \cdot CF = R \cdot 2a - Qa = Qw$$

Führt man noch die Neigungswinkel  $\alpha$  des Sparrens  $AB$  und  $\alpha_1$  der Zugstange  $AC$  gegen den Horizont ein, so hat man

$$CF = CB \cos \alpha = \frac{h}{2} \cos \alpha,$$

und auch

$$AC \sin (\alpha - \alpha_1) = w \frac{\sin (\alpha - \alpha_1)}{\cos \alpha_1} = \frac{h}{2} \cos \alpha,$$

und erhält damit

$$O_1 = 3 Q \frac{w}{h \cos \alpha} = \frac{3}{2} Q \frac{\cos \alpha_1}{\sin (\alpha - \alpha_1)} \quad (2)$$

$$O_2 = 2 Q \frac{w}{h \cos \alpha} = Q \frac{\cos \alpha_1}{\sin (\alpha - \alpha_1)} = \frac{2}{3} O_1 \quad (3)$$

Ebenso erhält man für die untere Gurtung  $AC$ , wenn man den Schnitt in  $ab$  und den Momentenpunkt in  $D$  wählt, und das Lot

$$DG = \frac{w}{2} \sin \alpha_1 = \frac{w}{2} \frac{\sin (\alpha - \alpha_1)}{\cos \alpha}$$

setzt:

$$U \cdot DG = U \frac{w}{2} \sin \alpha_1 = U \frac{w}{2} \frac{\sin (\alpha - \alpha_1)}{\cos \alpha} = \frac{3}{2} Q \frac{w}{2},$$

also

$$U = \frac{3}{2} \frac{Q}{\sin \alpha_1} = \frac{3}{2} Q \frac{\cos \alpha}{\sin (\alpha - \alpha_1)} \quad (4)$$

und zwar ist  $U$  eine Zugspannung, während  $O_1$  und  $O_2$  Pressungen bedeuten.

Um die Pressung  $T$  in dem Kehlbalken  $DC$  zu bestimmen, wählt man für den Schnitt  $a_1b_1$  den Auflagerpunkt  $A$  zum Momentenmittelpunkte, wodurch die Momente von  $R$ ,  $U$  und  $O_2$  herausfallen und man aus

$$Q \frac{w}{2} = T \frac{h}{2}; \quad T = Q \frac{w}{h} = Q \cotg \alpha \quad (5)$$

als Druckspannung erhält. Endlich hat die Hängestange  $BC$  einer Zugkraft  $P$  zu widerstehen, welche sich aus der Summe der Verticalcomponenten der beiden Zugstangen  $AC$  und  $A_1C$  ergibt zu

$$P = 2 U \sin \alpha_1 = 3 Q. \quad (6)$$

Denselben Werth muß man für  $P$  auch erhalten, wenn man die Belastung  $Q$  des Firstes von der Summe der verticalen Componenten der Sparrenkräfte in  $BD$  und  $BD_1$  abzieht, es ist dann

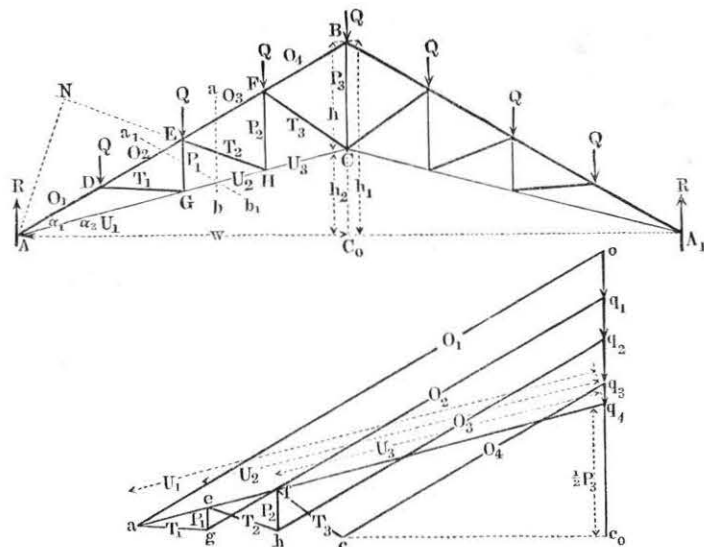
$$2 O_2 \sin \alpha - Q = 4 Q \frac{w}{h} \tg \alpha - Q = 3 Q.$$

Anstatt die Anstrengungen der einzelnen Glieder durch Rechnung, wie oben gesehen, zu ermitteln, führt auch eine einfache Zerlegung der Kräfte



auf graphischem Wege schnell und sicher zum Ziele. Zu dem Ende hat man nur auf einer Verticalen durch  $o$  in Fig. 282 die Belastung  $Q$  von  $D$  gleich  $o q_1$  und die halbe Belastung  $\frac{Q}{2}$  von  $B$  gleich  $q_1 q_2$  anzutragen, und  $oa$  parallel mit  $AB$ , und  $q_2 a$  parallel mit  $AC$  zu ziehen, um  $O_1$  in  $ao$  und  $U$  in  $q_2 a$  zu erhalten. Zieht man ferner durch  $a$  eine mit dem Spannriegel  $DD_1$  parallele also horizontale Gerade und legt durch  $q_1$  eine Parallele zu  $AB$ , so stellt, wie leicht ersichtlich ist,  $ab$  die Kraft  $T$  im Spannriegel und  $b q_1$  die Pressung im oberen Sparrenstücke  $DB$  vor. Um auch

Fig. 283.



die Zugkraft  $P$  in der Hängestange  $BC$  zu finden, hat man nur nöthig, die Horizontale  $ab$  bis nach  $c$  zu verlängern, so ist  $q_2 c = \frac{P}{2}$ , also  $P$  durch  $q_2 d$  gegeben, wenn noch  $ad$  symmetrisch zu  $a q_2$  gezogen wird. Die Figur zeigt auch, daß die verticale Componente  $c q_1$  der Sparrenkraft  $O_2$  um die Größe  $\frac{Q}{2}$  der halben Firstbelastung größer ist, als die Vertikalkraft  $q_2 c$  jeder Zugstange  $AC$ .

Für größere Spannweiten, bei denen die Sparren in mehreren Zwischenpunkten zwischen dem Auflager und dem Firste gestützt werden müssen, wird vielfach der englische Dachstuhl angewendet, von welchem in Fig. 283

eine Anordnung mit drei Zwischenpfetten  $D, E$  und  $F$  angegeben ist. Dieser Dachstuhl kann, da man in der Anzahl solcher Knotenpunkte wie  $D, E$  und  $F$  nicht beschränkt ist, für beliebig große Spannweiten  $2w$  angewandt werden. Die Ermittlung der Anstrengung irgend eines Theiles geschieht genau in derselben Art, wie für die Fachwerke im Allgemeinen gezeigt worden, indem man für irgend einen Schnitt  $ab$ , den unteren Knotenpunkt  $H$  oder den oberen Knotenpunkt  $E$  der durchschnittenen Strebe  $EH$  als Momentenpunkt wählt, je nachdem man die Spannung der oberen oder unteren Gurtung bestimmen will, während für die Spannung in dem durchschnittenen Zwischenstücke der Auflagerpunkt  $A$  als Momentenpunkt ausgewählt wird. Selbstverständlich denkt man sich zur Bestimmung der Kraft in einem verticalen Pfoften wie  $EG$  einen Schnitt nach  $a_1 b_1$  hindurchgelegt. Im Folgenden bedeute  $l_1 = AB$  die Länge eines Sparrens,  $h_1 = BC_0 = l_1 \sin \alpha_1$  seine Verticalprojection,  $l_2 = AC$  die Länge der Zugstange,  $h_2 = CC_0 = l_2 \sin \alpha_2$  deren Verticalprojection und  $h = h_1 - h_2$  die Höhe  $BC$  des Binders in der Mitte, ferner  $2w = na$  die Spannweite, die in  $n$  Intervalle von der Breite  $a$  getheilt sein mag, und es seien mit  $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$  die Neigungswinkel der Streben  $DG, EH, FC \dots$  gegen den Horizont, und mit

$$c_1 = \frac{a}{\cos \beta_1}; c_2 = \frac{a}{\cos \beta_2} \dots$$

die Längen dieser Streben verstanden. Ist jede Pfette wiederum mit  $Q$  belastet, so hat man den Auflagerdruck in  $A$  und  $A_1$  zu

$$R = \frac{n-1}{2} Q \dots \dots \dots (7)$$

Bezeichnet nun  $v$  die Anzahl der belasteten Pfetten zwischen einem beliebigen Schnitte  $ab$  und dem der Mitte abgewandten Auflager  $A$ , so findet man nach dem Vorstehenden die Spannungen  $O_{v+1}$  und  $U_v$  der durchschnittenen Gurtungen durch

$$\frac{n-1}{2} Q(v+1)a - Q(1+2+\dots+v)a = O_{v+1} \frac{(v+1)a}{\cos \alpha_2} \sin(\alpha_1 - \alpha_2)$$

oder, da aus dem Dreiecke  $ABC$  sich  $\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\cos \alpha_2} = \frac{h}{l_1}$  ergibt:

$$Q \left( \frac{n-1}{2} (v+1) - v \frac{v+1}{2} \right) = O_{v+1} (v+1) \frac{h}{l_1},$$

woraus

$$O_{v+1} = \frac{n-(v+1)}{2} Q \frac{l_1}{h} \dots \dots \dots (8)$$

folgt.

In gleicher Weise findet man für den oberen Knotenpunkt als Momentenmitte:

$$\frac{n-1}{2} Qva - Q(1+2+\dots v-1)a = U_v \frac{va}{\cos \alpha_1} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \\ = U_v va \frac{h}{l_2},$$

d. h.

$$U_v = \frac{n-v}{2} Q \frac{l_2}{h} \dots \dots \dots (9)$$

Für die Strebe erhält man mit  $A$  als Momentenpunkt die Spannung  $T_v$  aus:

$$Q(1+2+\dots v)a = T_v \cdot AN = T_v \frac{va}{\cos \alpha_1} \sin(\alpha_1 + \beta_v)$$

oder, da aus dem Dreiecke  $EHF$ :

$$\frac{\sin(\alpha_1 + \beta_v)}{\cos \alpha_1} = \frac{HF}{EH} = \frac{2 \frac{v+1}{n} h}{c_v} = 2 \frac{v+1}{n} \frac{h}{c_v}$$

folgt, so hat man

$$Qv \frac{v+1}{2} a = T_v 2va \frac{v+1}{n} \frac{h}{c_v},$$

also

$$T_v = \frac{n}{4} \frac{c_v}{h} Q \dots \dots \dots (10)$$

Für die Verticalstiele endlich hat man, wenn man nach  $a_1 b_1$  schneidet, mit  $A$  als Momentenpunkt:

$$Q(1+2+\dots v)a = P_v(v+1)a,$$

woraus

$$P_v = \frac{v}{2} Q \dots \dots \dots (11)$$

Setzt man in den Gleichungen (8) bis (11) für  $v$  die Werthe 0, 1, 2, 3..., so erhält man die Spannungen der Gurtungen, Streben und Verticalstangen. Für die mittlere Hängestange  $BC$  ergibt sich die Spannung wieder durch

$$P_v = 2 O_{v+1} \sin \alpha_1 - Q,$$

oder, wenn man darin  $v = \frac{n}{2} - 1$  setzt, nach (8):

$$P = 2 \frac{n}{4} Q \frac{l_1}{h} \frac{h_1}{l_1} - Q = \left( \frac{n}{2} \frac{h_1}{h} - 1 \right) Q \dots (12)$$

Denselben Werth erhält man natürlich auch durch

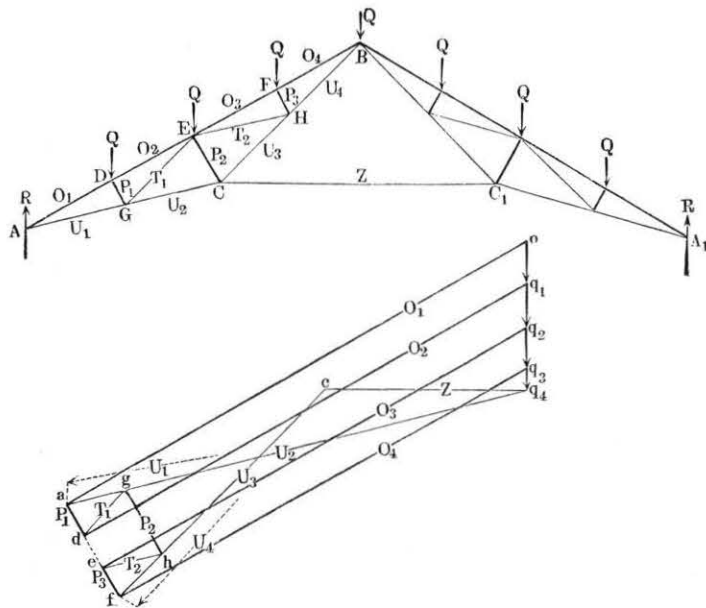
$$P = 2 U_v \sin \alpha_2 + 2 T_v \sin \beta_v.$$

Um die Spannungen der einzelnen Glieder graphisch zu ermitteln, hat man wieder auf einer Verticallinie  $o c_0$  die Belastungen der Pfetten  $o q_1 = q_1 q_2 = q_2 q_3 = Q$  und  $q_3 q_4 = \frac{Q}{2}$  anzutragen und den Auflagerdruck  $q_4 o = R$  nach den Richtungen  $q_4 a$  der Zugstange und  $ao$  des Sparrens zu zerlegen, um in  $ao$  die Druckspannung  $O_1$  in  $AD$  und in  $q_4 a$  die Zugspannung  $U_1$  in  $AG$  zu erhalten. Im Knotenpunkte  $D$  halten sich nun die vier Kräfte  $O_1$ ,  $Q$ ,  $O_2$  und  $T_1$  das Gleichgewicht. Setzt man daher  $O_1 = ao$  und  $Q = o q_1$  zu einer Mittelkraft  $a q_1$  zusammen, so hat man diese zu zerlegen in  $ag = T_1$  parallel der Strebe  $DG$  und in  $g q_1 = O_2$  parallel dem Sparren  $AB$ . Zieht man ferner durch  $g$  eine verticale Gerade  $ge$  bis zum Durchschnitte mit  $a q_4$ , so erhält man in  $ge$  die Zugkraft  $P_1$  für die verticale Stange  $GE$ , und in  $eq_4$  die Zugspannung  $U_2$  in dem unteren Gurtungsstücke  $GH$ , denn die auf den Knotenpunkt  $G$  wirkenden vier Kräfte  $U_1$ ,  $T_1$ ,  $P_1$  und  $U_2$  bilden im Kräfteplane das geschlossene Polygon  $q_4 a g e q_4$ . In derselben Weise hat man durch  $q_2$  und  $q_3$  Parallellinien mit dem Sparren, durch  $e$  eine Parallele  $eh$  mit  $EH$ ,  $hf$  vertical und durch  $f$  wieder parallel zu  $FC$  zu ziehen. Die eingeschriebenen Bezeichnungen lassen die einzelnen Spannungen leicht erkennen. Die Spannung der mittleren Hängestange  $P_3$  ist durch die doppelte Strecke  $q_4 c_0$  gegeben, welche die Verticalprojection von  $q_4 f c$ , also von  $U_3$  und  $T_3$  darstellt, und welche auch gleich der Verticalcomponente  $c_0 q_3$  von  $O_4$  vermindert um die halbe Belastung  $q_3 q_4$  des Firstpunktes ist.

In derselben Weise kann man auch leicht für andere in der Praxis vorkommende Dachstühle durch Rechnung oder durch Zeichnung des zugehörigen Kräftepolygons die Anstrengungen der einzelnen Fachwerksglieder ermitteln. Als ein weiteres Beispiel für die Zeichnung des Kräftepolygons sei hier noch der sogenannte französische Dachstuhl (System Polonceau), Fig. 284 (a. f. S.), angeführt. Man kann diesen Dachstuhl gewissermaßen als die Verbindung der beiden armirten, d. h. zu besonderen Fachwerken gestalteten Sparren  $ABC$  und  $A_1 B_1 C_1$  durch die Zugstange  $CC_1$  ansehen. Die Zwischenglieder  $DG$ ,  $EC$  und  $FH$  werden hierbei senkrecht zu der Sparrenrichtung gestellt, und daher haben wegen der gleichen Entfernung der Pfetten  $D, E, F, B$  auch die Stangen  $AG$ ,  $GE$ ,  $EH$  und  $HB$  gleiche Neigungen gegen den Sparren  $AB$ . Zur Zeichnung des Kräftepolygons mache man wieder  $q_4 o = R = \frac{n-1}{2} Q$  und zerlege diese Kraft in  $ao = O_1$  und  $q_4 a = U_1$  nach den Richtungen des Sparrens  $AB$  und der Zugstange  $AC$ . In gleicher Weise wie im vorigen Beispiele zieht man

nun  $q_1 d$  parallel dem Sparren und durch  $a$  eine zur Strebe  $DG$  parallele Gerade, wodurch man in  $ad$  die Strebenkraft  $P_1$  und in  $d q_1$  den Sparrendruck in  $DE$  erhält, denn das geschlossene Kräfteviereck  $o q_1 d a o$  stellt das Gleichgewicht der vier auf den Punkt  $D$  wirkenden Kräfte  $Q, O_2, P_1$  und  $O_1$  dar. Zieht man ferner durch  $d$  eine mit  $GE$  parallele Gerade  $dg$ , so erhält man in dieser die Größe  $T_1$  und in  $g q_1$  die Spannung  $U_2$  in  $GC$ ,

Fig. 284.

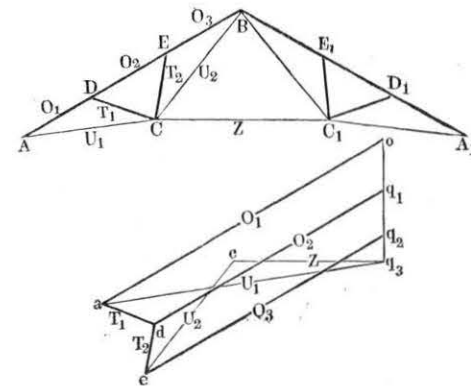


denn für den Punkt  $G$  gilt das den darauf wirkenden Kräften  $U_1, P_1, T_1$  und  $U_2$  entsprechende geschlossene Viereck  $q_1 a d g q_1$  als Kräfteplan. Um ferner für den Punkt  $E$  die Zerlegung vorzunehmen, hat man nur zu beachten, daß die Spannungen  $T_1$  und  $T_2$  wegen der ganz symmetrischen Anordnung und Belastung dieser Stangen gleiche Größe haben müssen. Setzt man daher die Kräfte  $T_1, O_2$  und  $Q$  zu dem Linienzuge  $g d q_1 q_2$  zusammen, zieht durch  $g$  eine Parallele zu  $EC$  und durch  $q_2$  eine solche zum Sparren, so wird man in der Verlängerung von  $ad$  einen Punkt  $e$  finden, so daß  $eh = dg$  ist, wenn  $eh$  parallel  $EH$  gezogen wird. Mit Hilfe der so gefundenen Pressung  $P_2 = gh$  in dem Pfosten  $EC$  ergeben sich nun ferner die Spannungen  $U_3$  in  $CH$  und  $Z$  in der Verbindungsstange  $CC_1$ , wenn man durch  $q_4$  die Horizontale  $q_4 c$  und durch  $h$  eine Parallele zu  $CB$  zieht,

d. h. wenn man  $fh$  verlängert. Dann stellt die geschlossene Figur  $q_4 gh c q_4$  in ihren Seiten die vier auf  $C$  wirkenden Kräfte  $U_2, P_2, U_3$  und  $Z$  vor. Endlich erhält man die Zugspannung  $U_4$  in  $BH$  in der Strecke  $fc$ , welche als die Schlußlinie des zu den Kräften  $U_3, T_2$  und  $P_3$  gehörigen Kräftepolygons  $ch e f$  betrachtet werden kann.

Von dem französischen Dachstuhl weicht der belgische, Fig. 285, nur unwesentlich dadurch ab, daß von jedem unteren Eckpunkte  $C$  und  $C_1$  des charakteristischen Mitteldreiecks zwei Streben  $CD$  und  $CE$  zur Unterstützung der oberen Gurtung  $AB$  abgeführt sind.

Fig. 285.



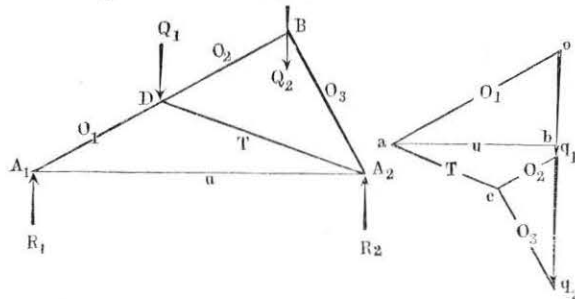
Das Kräftepolygon zeichnet man wieder, indem man zunächst den Auflagerdruck  $R = q_3 o$  in die Spannung  $U_1 = q_3 a$  und den Sparrendruck  $O_1 = a o_1$  zerlegt. Durch eine Parallele  $ad$  mit der Strebe  $DC$  und eine solche mit dem Sparren durch  $q_1$  gezogen erhält man  $T_1 = ad$  und  $O_2 = d q_1$ , beide als Druckkräfte. Zieht man in gleicher Art durch  $q_2$  parallel zu dem Sparren und durch  $d$  eine Gerade  $de$  in der Richtung der Strebe  $CE$ , so liefert  $de$  die Druckkraft  $T_2$  dieser Strebe und  $e q_2$  diejenige  $O_3$  des obersten Sparrenstückes. Zur Ermittlung der Zugkräfte  $Z = e q_3$  in der Verbindungsstange  $CC_1$  und  $U_2 = ec$  in  $BC$  hat man nur durch  $q_3$  und  $e$  mit diesen betreffenden Gliedern Parallelen zu zeichnen.

Bisher wurde immer angenommen, daß das Dach symmetrisch zu der durch den First gehenden Verticalebene angeordnet sei; wenn dagegen nach Fig. 286 (a. f. S.) die Sparren  $A_1 B$  und  $A_2 B$  verschiedene Neigung gegen den Horizont haben, wie dies häufig bei den sogenannten Sägedächern (Sheds) über Fabrikräumen der Fall ist, bei denen die steilere Dachfläche  $AB$  mit Glas eingedeckt wird, so hat man zunächst wieder die Belastungen



$Q_1$  von  $D$  und  $Q_2$  von  $B$  durch die verticalen Strecken  $o q_1 = Q_1$  und  $q_1 q_2 = Q_2$  darzustellen. Eine Zerlegung von  $q_1 q_2$  nach den Richtungen der Sparren liefert dann in  $c q_2$  und  $c q_1$  die Druckkräfte  $O_3$  und  $O_2$  für  $A_2 B$  und  $D B$ . Zieht man alsdann durch  $o$  eine Parallele zu  $A_1 B$  und durch  $c$  eine solche zur Strebe  $A_2 D$ , so ist auch die Druckkraft  $a o = O_1$  in dem unteren Sparrenstücke  $A_1 D_1$  sowie die Strebenkraft  $T = a c$  gefunden. In der durch  $a$  geführten Horizontallinie  $ab$  erhält man die Zugkraft  $U$  in der Spannstange  $A_1 A_2$ , und die Strecken  $b o$  und  $q_2 b$  stellen die Auflagerreactionen  $R_1$  in  $A_1$  und  $R_2$  in  $A_2$  vor.

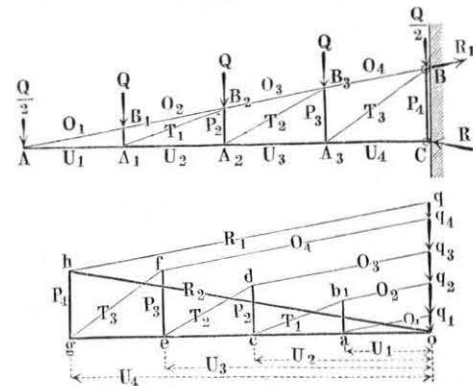
Fig. 286.



In gleich einfacher Weise ermitteln sich die Spannungen in den Fachwerkgliedern von Dachbindern, welche nur einseitig an einer Mauer befestigt sind und consolenartig frei herausragen (Perrondächer). Es sei  $ABC$ , Fig. 287, ein in der Mauer bei  $B$  und  $C$  befestigter Binder eines Perrondaches, dessen obere Gurtung  $AB$  außer in  $A$  und  $B$  noch in den Zwischenpunkten  $B_1, B_2, B_3$  Pfetten trage, auf die je eine Last  $Q$  entfällt, während die Punkte  $A$  und  $B$  nur mit je  $\frac{Q}{2}$  belastet anzunehmen sind. Trägt man wieder auf einer Verticalen die Strecken  $q_1 q_2 q_3 q_4 o$  gleich diesen Belastungen der Pfetten ab, so erhält man wie früher  $O_1$  und  $U_1$  in  $q_1 a$  und  $a o$  durch Zerlegung von  $q_1 o = \frac{Q}{2}$  nach den Richtungen von  $AB$  und  $AC$ . In  $B_1 B_2$  ist die Spannung  $O_2 = O_1 = q_2 b_1$ , während der Pfosten  $A_1 B_1$  einer Pressung  $P_1 = Q = b_1 a_1$  ausgesetzt ist. Zieht man ferner durch  $b_1$  eine mit der Strebe  $A_1 B_2$  Parallele  $b_1 c$ , so erhält man in derselben die Zugkraft  $T_1$  dieser Strebe und in  $o c$  die Pressung  $U_2$  in der unteren Gurtung zwischen  $A_1$  und  $A_2$ . Die Wiederholung dieser Construction liefert in den mit der oberen Gurtung Parallelen  $q_3 d$  und  $q_4 f$  die Spannungen  $O_3$  und  $O_4$  und in  $q h$  diejenige Kraft  $R_1$ , welche den Festpunkt  $B$  aus der Mauer herauszuziehen bestrebt ist, während der

untere Festpunkt  $C$  außer der horizontalen Druckkraft  $U_4 = g o$  nach der durch den Pfosten  $BC$  ausgeübten Verticalkraft  $P_4 = h g$ , zusammen also

Fig. 287.



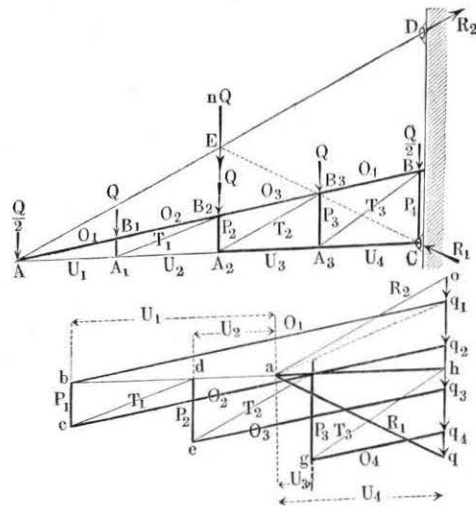
wirkend zu denkenden Gesamntbelastung  $4 Q$  nach den Richtungen  $B_2 B$  und  $B_2 C$  darstellt.

Zuweilen werden die Binder von Perrondächern oberhalb durch Hängestangen  $AD$ , Fig. 288 (a. f. S.), gestützt, welche fest mit der Mauer verbunden sind. In diesem Falle ist die Anstrengung der Träger eine wesentlich andere als bei der durch Fig. 287 dargestellten Anordnung, insofern der Träger in Fig. 288 gewissermaßen wie ein in  $A$  und  $C$  auf zwei Stützen ruhender Balken anzusehen ist, bei dessen Belastung also die obere Gurtung gedrückt wird, während der Träger in Fig. 287 einen an einem Ende eingeklemmten consolenartigen Balken bildet, bei dessen Biegung die obere Gurtung convex, also gezogen wird. Durch die Hängestange in Fig. 288 wird nämlich auf das Ende  $A$  ein gewisser Zug  $R_2$  ausgeübt, dessen verticale Componente genau so wirkt, wie die Reaction einer unterhalb  $A$  angebrachten Stütze, während die horizontale Componente in dem Träger eine Pressung nach der Richtung seiner Längsaxe hervorruft. Es möge zum Schlusse auch dieser Fall hier noch näher geprüft werden, und zwar soll der Allgemeinheit wegen die untere Gurtung  $AC$  des Fachwerkes nicht horizontal, sondern beliebig gegen den Horizont geneigt gedacht werden. Es muß hierbei jedoch bemerkt werden, daß die Prüfung unter der Voraussetzung geführt wird, der Träger ruhe an der Mauer nur in einem Stützpunkte  $C$  auf, sei aber nicht, wie in Fig. 287, mit der Mauer unwandelbar befestigt. Wollte man nämlich eine solche starre Befestigung voraussetzen, so würde die Untersuchung nur unter Berücksichtigung

der elastischen Durchbiegungen zu führen sein, ähnlich wie dies für alle Balken zu geschehen hat, die in mehr als zwei Punkten gestützt werden.

Um die in der Hängestange  $AD$  hervorgerufene Spannung  $R_2$  zu bestimmen, hat man nur den Durchschnitt  $E$  der Gesamtbelastung  $nQ$  des

Fig. 288.



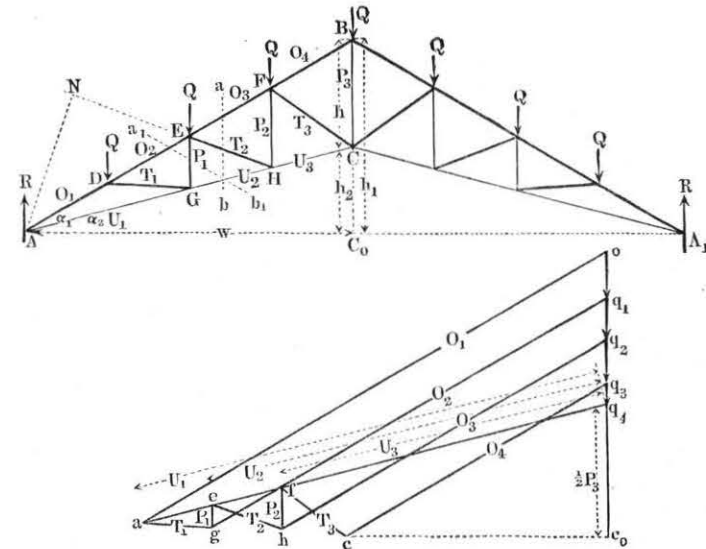
Mit Hilfe der Zugstangenkraft  $R_2$ , welche man als die in  $A$  auf den Träger geäußerte Reaction anzusehen hat, zeichnet man nun in der bekannten Art das Kräftepolygon, dessen einzelne Strecken die Anstrengungen der Fachwerksglieder vorstellen.

Setzt man für den Punkt  $A$  die Kraft  $R_2 = ao$  in  $AD$  mit dem Gewicht  $\frac{Q}{2} = oq_1$  in  $A$  zu der Resultirenden  $aq_1$  zusammen, zieht durch  $q_1$  eine Parallele zur oberen Gurtung  $AB$  und durch  $a$  eine solche zur unteren Gurtung  $AC$ , so erhält man die Pressung  $O_1$  des Stückes  $AB_1$  in der Strecke  $bq_1$ , während die Spannung  $U_1$  in  $AA_1$  durch  $ab$  dargestellt ist. Für den Punkt  $B_1$ , auf welchen die Kräfte  $O_1$ ,  $Q$ ,  $O_2$  und  $P_1$  wirken, gilt dann das Kräftepolygon  $bq_1q_2c$ , aus welchem  $cq_2 = O_2 = O_1$  und  $cb = P_1$  als Druckkraft in der ersten Verticalen  $A_1B_1$  folgt. Ebenso zeichnet man für den Punkt  $A_1$  aus  $U_1$ ,  $P_1$ ,  $T_1$  und  $U_2$  das Kräftepolygon  $abcd a$ , welches in  $cd$  die Zugkraft  $T_1$  der Diagonale  $A_1B_2$  und in  $da$  die Zugkraft  $U_2$  in  $A_1A_2$  liefert. Die weitere Ausführung der Zeichnung führt für den Punkt  $B_2$  zu dem Polygon  $dcq_2q_3ed$ , also zu der Druck-

Trägers mit dem Stützpunkte  $C$  zu verbinden, und  $Q$  nach den Richtungen  $ED$  und  $EC$  zu zerlegen. Trägt man daher auf einer Verticalen die Belastungen  $\frac{Q}{2}, Q, Q, \dots, \frac{Q}{2}$  der Punkte  $A, B_1, B_2 \dots B$  gleich  $oq_1, q_1q_2, q_2q_3 \dots$  an und zerlegt die Gesamtbelastung  $nQ = oq$  nach den Richtungen von  $ED$  und  $EC$ , so erhält man in  $oa$  die Zugkraft  $R_2$  der Hängestange  $AD$  und in  $aq$  die Druckkraft  $R_1$  gegen den Stützpunkt  $C$ .

kraft  $O_3 = eq_3$  in  $B_2B_3$  und zu derjenigen  $P_2 = ed$  in  $A_2B_2$ . Wenn man nun weiter für  $A_2$  die Kräfte  $U_2$ ,  $P_2$ ,  $T_2$  und  $U_3$  zu dem Viereck  $adefa$  zusammensetzt, so findet man, daß die untere Gurtung  $A_2A_3$  mit  $U_3 = fa$  gedrückt wird, während die Diagonale  $A_2B_3$  einem Zuge von  $T_2 = ef$  ausgesetzt ist. Eine weitere Fortsetzung führt in derselben Weise zu  $O_4 = gq_4$ ,  $U_4 = ah$ ,  $P_3 = gf$ ,  $P_4 = gh$  und  $T_3 = gh$ . Der Punkt  $C$  ist einer Einwirkung der Kraft  $P_4 = hq$  des Endpfostens und einer Druckkraft  $U_4 = ah$  der Gurtung  $A_3C$ , also wie oben schon gefunden wurde, einer resultirenden Kraft  $R_1 = aq$  ausgesetzt.

Fig. 289.



Diese graphischen Ermittlungen geben unter der Voraussetzung eines nicht zu kleinen Maßstabes die gesuchten Kräfte in jedem Falle mit genügender Schärfe. Auch ist es leicht, aus dem Kräftepolygone die analytischen Ausdrücke für die einzelnen Anstrengungen zu ermitteln, wenn man die Neigungen bzw. Längen der einzelnen Fachwerksglieder einführt, eine solche Entwicklung der Formeln für verschiedene Fälle soll hier nicht vorgenommen werden.

Im Vorstehenden wurde immer vorausgesetzt, daß der Dachbinder über seine ganze Länge gleichmäßig belastet ist, wie dies dem tatsächlichen Zustande entspricht. Es ist auch leicht zu erkennen, daß bei den gewöhnlichen Dachstühlen diesem Zustande der vollen Belastung die ungünstigste Bean-

sprechung der einzelnen Fachwerksglieder entspricht. Denkt man sich nämlich durch irgend einen Dachstuhl, wie in Fig. 289 (a. v. S.), einen beliebigen Schnitt  $ab$  gelegt, und wählt zur Bestimmung der Spannung  $O$  der oberen Gurtung den Momentenmittelpunkt in  $H$ , so erkennt man, daß die Belastung jedes beliebigen Knotenpunktes das Moment der äußeren Kräfte in Bezug auf  $H$  und somit die Pressung  $O$  in  $EF$  vergrößert. Wirkt nämlich die betreffende Last rechts von dem Schnitte, z. B. in  $F$ , so bringt sie nur eine Vergrößerung der Auflagerreaction  $R$  in  $A$ , folglich eine Vergrößerung des rechts drehenden Momentes um  $H$  hervor. Das letztere gilt auch für die Belastung eines links vom Schnitte  $ab$  gelegenen Punktes wie z. B.  $D$ , da man die Mittelkraft aus der hier aufgetragenen Last  $Q$  und der durch dieselbe in  $A$  erzeugten aufwärts gerichteten Vergrößerung der Auflagerreaction gleich dem abwärts gerichteten Auflagerdrucke zu setzen hat, welchen die in  $D$  wirkende Last  $Q$  in  $A$  erzeugt. Das Moment dieses Auflagerdruckes um  $H$  ist ebenfalls rechtsdrehend, daher auch durch diese Belastung eine Pressung in der oberen Gurtung erzeugt wird. Da man eine ganz ähnliche Betrachtung auch für die Spannung  $U$  der unteren Gurtung anstellen kann, so geht hieraus hervor, daß die Gurtungen hier ebenso wie bei den Parallelträgern und Parabelträgern, bei der vollen Belastung der Dachbinder am ungünstigsten angestrengt werden. In Bezug auf die Anstrengung der Diagonalen, z. B.  $EH$ , erkennt man sogleich, daß irgend eine Belastung rechts von dem Schnitte  $ab$ , z. B. in  $F$ , nur eine Vergrößerung des Auflagerdruckes in  $A$  hervorruft, diese Kraft aber ohne Einfluß auf die Spannung der Diagonale ist, indem hier  $A$  den Momentenmittelpunkt darstellt. Daher werden nur die links von dem Schnitte, d. h. die zwischen diesem und dem der Mitte  $B$  abgewendeten Auflager angebrachten Belastungen in der Diagonale Spannungen hervorrufen. Hiernach wird aber die Diagonale in dem ungünstigsten Zustande, wo diese sämtlichen Punkte links belastet sind, gerade so angestrengt, wie bei der vollen Belastung des Trägers, da die Belastungen rechts vom Schnitte ohne Einfluß auf die Spannung der Diagonale sind. Da eine gleiche Betrachtung auch für die Verticalstiele wie  $FH$  gilt, so geht daraus hervor, daß die volle Belastung des Dachbinders dem Zustande entspricht, in welchem sämtliche Fachwerksglieder ihrer größten Anstrengung ausgesetzt sind.

Beispiel. Ueber einem Raume von 16 m Spannweite soll ein Dach nach Art der Fig. 289 angebracht werden, dessen Binder 2,5 m von einander entfernt sind. Die Höhe des Firstes über der Horizontalen durch die Auflager soll zu  $h_1 = 3,5$  m angenommen werden, während der untere Knotenpunkt der Mitte, in welchem sich die Spannstrangen vereinigen, um  $h_2 = 0,5$  m über den Auflagern gelegen ist. Es sind die Anspannungen der einzelnen Constructionsglieder unter Annahme einer Gesamtbelastung des Daches durch Eigengewicht, Schnee und Wind, von 160 kg pro Quadratmeter Grundrißfläche zu ermitteln.

Man hat hier bei  $n = 8$  Feldern  $a = \frac{16}{n} = 2$  m, und daher die Belastung jedes Knotenpunktes

$$Q = 2 \cdot 2,5 \cdot 160 = 800 \text{ kg.}$$

Ferner folgen die Längen eines Sparrens

$$AB = l_1 = \sqrt{8^2 + 3,5^2} = 8,732; \quad \frac{l_1}{4} = 2,18 \text{ m,}$$

einer Spannstrange

$$AC = l_2 = \sqrt{8^2 + 0,5^2} = 8,015; \quad \frac{l_2}{4} = 2,004 \sim 2,0 \text{ m.}$$

Der mittlere Verticalpfosten hat  $h = 3$  m Länge, so daß die der beiden anderen Pfosten  $GE$  und  $HF$  zu

$$\frac{h}{2} = 1,5 \text{ bzw. } \frac{3}{4} h = 2,25 \text{ m}$$

sich ergeben. Der Neigungswinkel der Sparren gegen den Horizont folgt aus

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3,5}{8} = 0,4375 \text{ zu } \alpha_1 = 23^\circ 40',$$

derjenige der Spannstrangen aus

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{0,5}{8} = 0,0625 \text{ zu } \alpha_2 = 3^\circ 35',$$

mithin hat man

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 20^\circ 5'.$$

Man erhält daher die Längen der Streben  $DG$ ,  $EH$  und  $FC$  durch

$$c_1 = \sqrt{\left(\frac{l_1}{4}\right)^2 + \left(\frac{2l_2}{4}\right)^2 - 2 \frac{l_1}{4} \frac{2l_2}{4} \cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

$$= \sqrt{4,752 + 16 - 2 \cdot 2,18 \cdot 4 \cdot 0,939} = 2,09 \text{ m,}$$

$$c_2 = \sqrt{(2 \cdot 2,18)^2 + (3 \cdot 2)^2 - 2 \cdot 4,36 \cdot 6 \cdot 0,939} = 2,43 \text{ m,}$$

$$c_3 = \sqrt{(3 \cdot 2,18)^2 + (4 \cdot 2)^2 - 2 \cdot 6,54 \cdot 8 \cdot 0,939} = 2,92 \text{ m,}$$

Demgemäß finden sich nun die Spannungen nach (8) bis (11) in dem Sparren:

$$O_1 = \frac{8-1}{2} 800 \frac{8,732}{3} = 8150 \text{ kg in } AD,$$

$$O_2 = \frac{8-2}{2} 800 \frac{8,732}{3} = 6987 \text{ kg in } DE,$$

$$O_3 = \frac{8-3}{2} 800 \frac{8,732}{3} = 5822 \text{ kg in } EF,$$

$$O_4 = \frac{8-4}{2} 800 \frac{8,732}{3} = 4658 \text{ kg in } FB;$$

in der Spannstrange:

$$U_1 = \frac{8-1}{2} 800 \frac{8,015}{3} = 7481 \text{ kg in } AG,$$

$$U_2 = \frac{8-2}{2} 800 \frac{8,015}{3} = 6413 \text{ kg in } GH,$$

$$U_3 = \frac{8-3}{2} 800 \frac{8,015}{3} = 5344 \text{ kg in } HC,$$



in den Streben:

$$T_1 = \frac{8}{3} \frac{2,09}{3} 800 = 1115 \text{ kg in } DG,$$

$$T_2 = \frac{8}{3} \frac{2,43}{3} 800 = 1296 \text{ kg in } EH,$$

$$T_3 = \frac{8}{3} \frac{2,92}{3} 800 = 1557 \text{ kg in } FC;$$

in den Verticalen:

$$P_1 = \frac{1}{2} 800 = 400 \text{ kg in } EG,$$

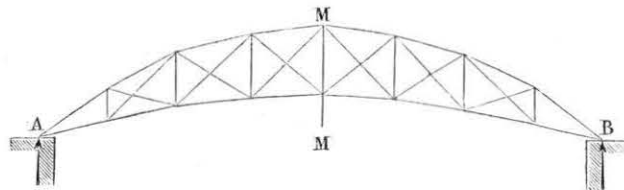
$$P_2 = 800 \text{ kg in } FH.$$

In der mittleren Hängestange  $BC$  hat man:

$$P_3 = \left( \frac{n}{2} \frac{h_1}{h} - 1 \right) Q = \left( 4 \frac{3,5}{3} - 1 \right) 800 = 2933 \text{ kg.}$$

§. 61. **Sichelförmige Träger.** Zur Ueberdeckung weiter Räume, z. B. der Bahnhofshallen, wendet man in neuerer Zeit häufig als Dachbinder eiserne Fachwerksträger an, deren obere sowohl wie untere Gurtungen nach krummen bzw. gebrochenen Linien gebildet sind, so daß die Träger die sichelförmige Gestalt der Fig. 290 annehmen.

Fig. 290.



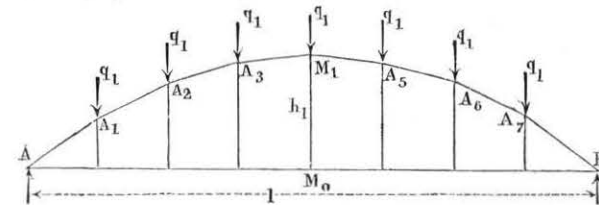
Diese Träger, welche kurz als Sichelträger bezeichnet werden mögen, sind wie die vorstehend besprochenen Brückenträger ebenfalls mit einem System von Füllungsmitgliedern zwischen den Gurtungen zu versehen, und es dienen die Knotenpunkte der oberen Gurtung zur Aufnahme der durch das Gewicht der Decke sowie des Schnees u. dergleichen Belastung. Das Eigengewicht der Träger selbst kann für die Berechnung ebenfalls genügend genau in den Knotenpunkten der oberen Gurtung wirksam gedacht werden, indem nur der kleinere Theil dieses Gewichtes, etwa  $\frac{1}{3}$  desselben, thatsächlich in den unteren Knotenpunkten wirkt. Will man dem letzteren Umstande jedoch Rechnung tragen, so wird man leicht die dadurch veranlaßte geringe Correction der Resultate vornehmen können, welche die Rechnung unter der Annahme der Concentrirung des Eigengewichtes in den oberen Knotenpunkten ergibt.

Die Form der Gurtungen ist für die Rechnung als eine gebrochene oder polygonale anzunehmen, denn wenn man auch, etwa aus Schönheitsrücksichten, die Gurtungen als stetig gekrümmte ausführt, so wird bei den meist beträchtlichen Spannweiten die gerade Verbindungslinie zweier auf einander folgenden Knotenpunkte einer Gurtung doch in der Regel ganz im Innern des zugehörigen Gurtungsstückes verbleiben.

Die zur verticalen Mittellinie  $MM$  symmetrische Curve, in welcher man die Knotenpunkte einer Gurtung anordnet, kann zwar beliebig gewählt werden, es empfiehlt sich aber, zu diesen Curven für beide Gurtungen Parabeln mit der Mittellinie  $MM$  als Hauptaxe zu wählen, weil unter dieser Annahme die Diagonalen für den Fall einer gleichmäßigen Belastung des ganzen Trägers gar keiner Anstrengung ausgesetzt sind, wie sich mit Rücksicht auf das für den Parabelträger in §. 56 Gesagte wie folgt ergibt.

Es wurde daselbst gefunden, daß bei einem Fachwerksträger  $AB$ , Fig. 291, mit horizontaler unterer Gurtung, dessen obere Knotenpunkte in einer Parabel

Fig. 291.



gelegen sind, die Spannung der unteren Gurtung für alle Punkte denselben Betrag  $U$  hat, wenn der Träger auf seiner ganzen Länge mit einer gleichmäßig über die Horizontalprojection verbreiteten Belastung bedeckt ist, und daß die horizontale Componente  $H$  der Spannung auch für jeden Punkt der oberen Gurtung denselben Betrag gleich  $U$  haben muß. Die Diagonalen sind für diesen vorausgesetzten Belastungszustand keinerlei Anstrengungen ausgesetzt. Es ergab sich nach (3) des gedachten Paragraphen diese Spannung:

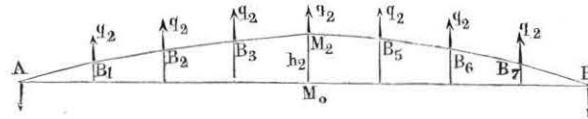
$$U_1 = H_1 = q_1 n \frac{l}{8 h_1}, \quad \dots \quad (1)$$

wenn  $l = AB$  die freie Spannweite,  $h_1 = M_1 M_0$  die Höhe des Parabelscheitels und  $q_1$  die Belastung jedes Knotenpunktes, d. h. jedes der  $n$  Felder bedeutet. Wenn dabei die Belastungen in den Knotenpunkten der unteren Gurtung wirken, so ist jeder Verticalständer einer Zugkraft gleich  $q_1$  ausgesetzt, während bei einer Belastung der oberen Gurtung auch die Spannungen der Verticalpfosten gleich Null ausfallen, indem in jedem Punkte

wie  $A_2$  die dafelbst angebrachte Belastung  $q_1$  von den beiden verticalen Spannungskomponenten der anstoßenden Gurtungsstücke  $A_2 A_1$  und  $A_2 A_3$  im Gleichgewichte gehalten wird. Man könnte sich daher vorstellen, daß die einzelnen Stücke der oberen Gurtung wie einzelne, in  $A_1, A_2, A_3 \dots$  lose gegen einander gestützte Wölbfteine wirken, wobei der Gegendruck der Widerlager  $A$  und  $B$  durch die Zugkraft  $U = H$  der unteren Gurtung ersetzt wird.

Dieselbe Betrachtung gilt auch für einen Parabelträger  $AB$ , Fig. 292, bei welchem die oberen Knotenpunkte durch vertical aufwärts gerichtete

Fig. 292.



Kräfte  $q_2$  gezogen werden, mit dem einzigen Unterschiede, daß in diesem Falle die untere Gurtung mit der constanten Kraft

$$U_2 = H_2 = q_2 n \frac{l}{8 h_2} \dots \dots \dots (2)$$

gedrückt wird, während in der oberen Gurtung nunmehr Zugspannungen eintreten, deren Horizontalcomponente überall gleich  $H_2$  ist. Einen solchen Träger kann man sich wie eine nach der Parabel  $AM_2B$  geformte Kette vorstellen, deren Enden  $A$  und  $B$  durch eine horizontale Spreize  $AB$  aus einander gehalten werden, indem auch hier sowohl die Verticalstangen wie die Diagonalen als unwirksam fortgelassen werden können. Der verticale Auflagerdruck in  $A$  oder  $B$  ist natürlich für Fig. 291 zu  $\frac{n q_1}{2}$  abwärts ge-

richtet und für Fig. 292 gleich  $\frac{n q_2}{2}$  aufwärts gerichtet.

Denkt man sich nunmehr die beiden Träger hinsichtlich ihrer Pfeilhöhen und Belastungen so bemessen, daß die Horizontalspannungen  $H_1$  und  $H_2$  gleiche Größe annehmen, d. h. setzt man

$$q_1 n \frac{l}{8 h_1} = q_2 n \frac{l}{8 h_2} \text{ oder } \frac{q_1}{h_1} = \frac{q_2}{h_2} \dots \dots \dots (3)$$

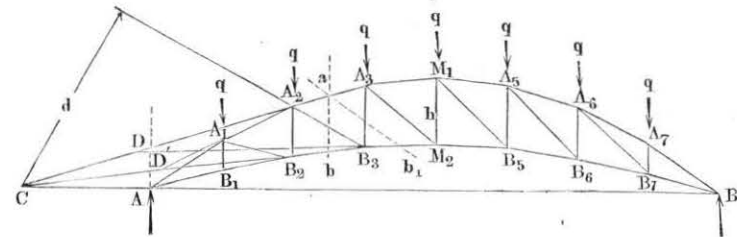
vorans, so kann man die beiden Träger der Figuren 291 und 292 zu einem einzigen von der sichelförmigen Gestalt  $AM_1 B M_2$  der Fig. 293 vereinigen denken, indem die gerade Gurtung  $AB$  ganz fortgelassen wird, welche gänzlich wirkungslos wird, da die Zugspannung des Bandes  $AB$  der Fig. 291 sich mit der gleichen Druckspannung der Spreize in Fig. 292 aufhebt. Man

hat sich dann in jedem Knotenpunkte der oberen Gurtung eine Verticalkraft  $q_1$  abwärts und in jedem unteren Knotenpunkte eine Verticalkraft  $q_2$  aufwärts zu denken. Stellt man sich nun schließlich die unteren Knotenpunkte  $B_1, B_2 \dots$  mit den oberen  $A_1, A_2 \dots$  durch Verticalstangen verbunden vor, so ist es klar, daß für den Zustand des Gleichgewichtes jeder obere Punkt  $A$  dieser Stangen mit einer Kraft

$$q = q_1 - q_2 \dots \dots \dots (4)$$

belastet zu denken ist, indem diese abwärts wirkende Last  $q_1 - q_2$  zusammen mit dem abwärts gerichteten Zuge  $q_2$  im unteren Knotenpunkte  $B$  dann

Fig. 293.



dem aufwärts gerichteten Zuge  $q_1$  im oberen Knotenpunkte das Gleichgewicht hält.

Den Auflagerdruck und die Reactionen erhält man in  $A$  und  $B$  dann zu

$$R = \frac{n}{2} (q_1 - q_2) = \frac{n q}{2} \dots \dots \dots (5)$$

Aus (4) und (3) folgt übrigens:

$$q_1 = \frac{q}{1 - \frac{h_2}{h_1}} = q \frac{h_1}{h_1 - h_2} \dots \dots \dots (6)$$

und

$$q_2 = \frac{q}{\frac{h_1}{h_2} - 1} = q \frac{h_2}{h_1 - h_2} \dots \dots \dots (7)$$

Hieraus geht hervor, daß die Diagonalen des parabelförmigen Sichelfträgers für den Zustand der vollen Belastung desselben keinerlei Anstrengungen ausgesetzt sind. Ebenso ergibt sich, wie bei dem Parabelträger, daß bei dieser Belastung die Spannungen der Gurtungen überall den größtmöglichen Betrag annehmen, und zwar berechnen sich diese Spannungen wie folgt.





lastung von  $A_6$  und  $A_7$  annimmt, findet, wenn die Gegen diagonalen in Fig. 295 gespannt werden, die größte Zugspannung der Diagonale  $B_2 A_3$  des zweiten Feldes bei einer Belastung von  $A_1$  und  $A_2$  statt. Es ist aber ersichtlich, daß die beiden in Fig. 294 und Fig. 295 dargestellten Belastungszustände mit einander übereinstimmen.

Fig. 294.

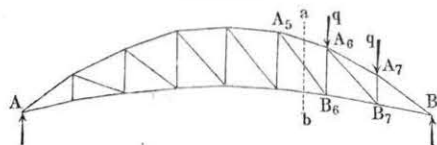
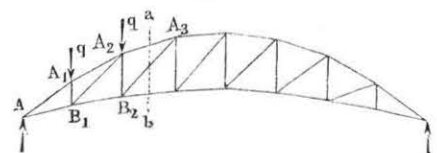


Fig. 295.



In Betreff der Verticalständer muß bemerkt werden, daß dieselben bei der Anwendung von gekreuzten, nur gegen Zugkräfte wirkenden Diagonalen ebenso wohl gedrückt wie gezogen werden können. Die größten Zugspannungen stellen sich offenbar in den Verticalstielen ebenfalls bei der vollen Belastung des Trägers ein, da in diesem Falle die Spannungen  $U$  der unteren Gurtungen, welche allein Zug in den Stielen hervorzurufen geeignet sind, ihre größten Werthe annehmen, die Diagonalen dagegen, welche nur Pressungen in den Stielen erzeugen können, für diesen Zustand ohne Spannung sind. Wie bereits anfänglich gefunden wurde, ist diese größte Zugspannung der Stiele für den Zustand der vollen Trägerbelastung durch

$$q_1 = q \frac{h_2}{h_1 - h_2} = q \frac{h_2}{h}$$

ausgedrückt.

Um auch die größten Pressungen der Stiele zu finden, dienen die nach dem Vorstehenden unter Annahme eines einfachen Diagonalsystems, Fig. 293, gefundenen Druckspannungen der Verticalstiele. Hierbei hat man nur zu beachten, daß man für jeden Verticalpfosten von den beiden Druckspannungen, welche für diesen Stiel und für den ihm symmetrisch zur Mittellinie gelegenen gefunden wurden, immer die absolut größere Pressung anzunehmen hat. Von der Richtigkeit dieser Bemerkung überzeugt man sich leicht durch die Figuren 296 bis 298. Gesezt, man erhielte für den Stiel  $A_3 B_3$ , Fig. 296, in dem Falle, daß die links ansteigenden Diagonalen wirksam sind, die größte Druckspannung bei einer

Belastung der Knotenpunkte  $A_3, M, A_5, A_6, A_7$  zu  $P_3$ , und für den Stiel  $A_5 B_5$ , unter derselben Voraussetzung bezüglich der activen Diagonalen, Fig. 297, den größeren Werth  $P_5$ , so hat man diesen Werth  $P_5$  auch für  $A_3 B_3$  anzunehmen. Denn wenn man für diesen letztgedachten Pfosten  $A_3 B_3$  unter der Annahme, daß die rechts ansteigenden Diagonalen, Fig. 298, zur

Fig. 296.

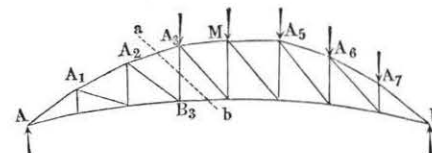


Fig. 297.

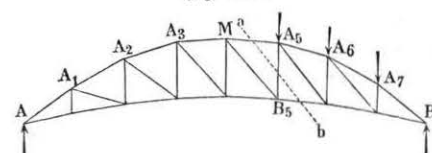
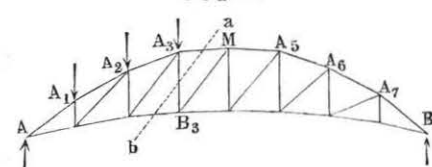


Fig. 298.



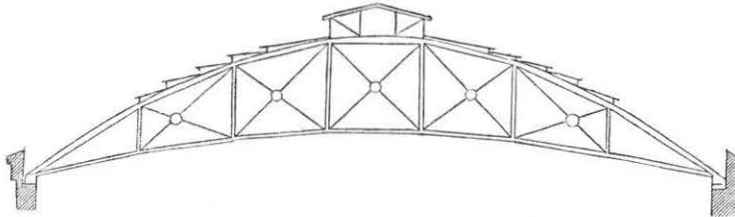
Wirkung kommen, die größte Pressung entsprechend einer Belastung der Knotenpunkte  $A_1, A_2, A_3$  links vom Schnitte  $a b$  ermittelt, so gelangt man wegen der übereinstimmenden Belastungszustände zu demselben Werthe  $P_5$ , welcher nach Fig. 297 für  $A_5 B_5$  gefunden wurde. Andererseits hätte man den für  $A_3 B_3$  gefundenen Werth  $P_3$  auch für  $A_5 B_5$  zu Grunde zu legen, für den Fall, daß  $P_3$  größer als  $P_5$  sich ergeben würde. Ein Beispiel wird den Gang der Ermittlung näher erläutern.

In Fig. 299 (a. f. S.) ist ein Sichelträger dargestellt, wie solche über der Empfangshalle des Berliner Bahnhof der Niederschlesisch-Märkischen Eisenbahn \*) aufgestellt sind. Die Spannweite dieser Binder beträgt  $120' = 37,66 \text{ m}$  und es sind die Pfeilhöhen der Parabeln, in denen die Knotenpunkte der oberen und unteren Gurtung angeordnet sind, zu  $1/5$  bzw.  $1/15$  der Spannweite angenommen. Von den 54 in  $12' = 3,75 \text{ m}$

\*) Erbkam, Zeitschr. f. Bauwesen, 1870.

von einander entfernten Bindern ist jeder durch sechs Verticalpfosten in sieben Felder getheilt, von welchen die beiden äußeren, je  $20' = 6,276$  m weiten, mit Zinkblech, die fünf mittleren Felder von je  $5,02$  m Weite mit Glas abgedeckt sind. Die oberen Gurtungstheile sind, da sie wegen der

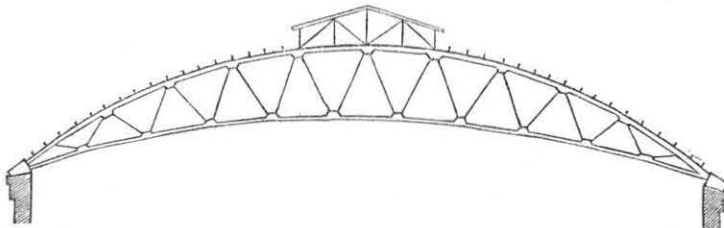
Fig. 299.



großen Entfernung der Knotenpunkte zwischen den letzteren noch durch Pfetten belastet sind, als Gitterbalken construiert, um ihnen die genügende Festigkeit gegen Durchbiegung zu geben. Von den  $50' = 15,69$  m über dem Perron gelegenen Enden der Träger ist das eine fest, das andere auf Rollen gelagert. Das Eigengewicht der Construction setzt sich zusammen aus dem Gewichte der Eisentheile mit  $12,2$  Pfd. pro Quadratfuß ( $62$  kg pro Quadratmeter) und dem der Glas und Zinkdecke mit  $4$  Pfd. pro Quadratfuß ( $20,3$  kg pro Quadratmeter). Als zufällige Belastung ist ein Winddruck von  $6$  Pfd. und eine Schneelast von  $14$  Pfd. für jeden Quadratfuß Grundfläche ( $30,5$  kg und bezw.  $71$  kg pro Quadratmeter) der Berechnung zu Grunde gelegt.

Man kann die Füllungsglieder dieser Sichelträger natürlich auch nach einem anderen Systeme anordnen, so z. B. ist bei dem in Fig. 300 darge-

Fig. 300.



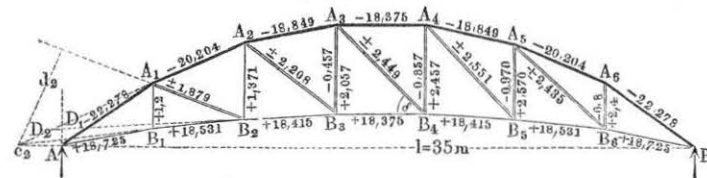
stellten Binder über der Empfangshalle des Görlitzer Bahnhofes zu Berlin \*) ein System von Zwischengliedern nach Art des Neville'schen gewählt. Für diese Träger, deren Spannweite  $121' = 38$  m beträgt, hat

\*) Erbkam, Zeitschr. f. Baumeisen, 1872.

die Obergurtung die Form eines Kreisbogens von  $95,5' = 30$  m Halbmesser erhalten. Die Berechnung derartiger Sichelträger bietet nach dem Vorstehenden und mit Berücksichtigung des über die Neville'schen Träger in §. 55 Gesagten keine Schwierigkeiten dar.

Beispiel. Als Beispiel sei ein Binder von  $35$  m Spannweite gewählt, welcher nach Art der über der Empfangshalle des Berliner Bahnhofes der Niederschlesischen Bahn aufgestellten in sieben gleiche Felder von  $5$  m Weite getheilt sein mag. Für die Parabeln der Gurtungen sollen bezw.  $7$  m und  $2$  m Pfeilhöhe gewählt werden, und es möge für jeden Knotenpunkt die permanente Belastung zu  $p = 1000$  kg  $= 1$  t, die zufällige Belastung durch Schnee und Wind zu  $k = 2$  t, also die Gesamtbelastung zu  $q = 3$  t angenommen werden.

Fig. 301.



Zur Verzeichnung der parabolischen Gurtungen erhält man zunächst die Höhen der Knotenpunkte über der Horizontalen  $AB$ , Fig. 301, von der Mitte aus beiderseits zu

$$7 \left(1 - \frac{1}{7^2}\right) = 6,857 \text{ m für } A_3 \text{ und } A_4,$$

$$7 \left(1 - \frac{9}{49}\right) = 5,714 \text{ m für } A_2 \text{ und } A_5,$$

$$7 \left(1 - \frac{25}{49}\right) = 3,429 \text{ m für } A_1 \text{ und } A_6,$$

$$2 \left(1 - \frac{1}{49}\right) = 1,959 \text{ m für } B_3 \text{ und } B_4,$$

$$2 \left(1 - \frac{9}{49}\right) = 1,633 \text{ m für } B_2 \text{ und } B_5,$$

$$2 \left(1 - \frac{25}{49}\right) = 0,979 \text{ m für } B_1 \text{ und } B_6,$$

Demgemäß ergeben sich ferner die Neigungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  der Gurtungsstücke gegen den Horizont durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{3,429}{5} = 0,6858; \quad \alpha_1 = 34^\circ 26' \text{ für } A_1 A_2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{5,714 - 3,429}{5} = 0,4571; \quad \alpha_2 = 24^\circ 34' \text{ für } A_2 A_3,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_3 = \frac{6,857 - 5,714}{5} = 0,2286; \quad \alpha_3 = 12^\circ 52' \text{ für } A_3 A_4,$$

Ebenso erhält man für die untere Gurtung die entsprechenden Winkel

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 11^\circ 5' \text{ für } AB_1, \\ \beta_2 &= 7^\circ 26' \text{ für } B_1B_2 \text{ und} \\ \beta_3 &= 3^\circ 44' \text{ für } B_2B_3.\end{aligned}$$

Für die Gurtungen des Mittelfeldes ist

$$\alpha_4 = \beta_4 = 0.$$

Zunächst findet sich die größte Horizontalspannung der Gurtungen nach (8) zu

$$H = O_4 = U_4 = q n \frac{l}{8(h_1 - h_2)} = 3.7 \frac{35}{8(7-2)} = 18,375 \text{ t},$$

und daher mit den oben ermittelten Neigungswinkeln der Gurtungen die Spannungen der letzteren:

$$O_1 = \frac{18,375}{\cos 34^\circ 26'} = 22,278 \text{ t} = O_7,$$

$$O_2 = \frac{18,375}{\cos 24^\circ 34'} = 20,204 \text{ t} = O_6,$$

$$O_3 = \frac{18,375}{\cos 12^\circ 52'} = 18,849 \text{ t} = O_5,$$

und für die untere Gurtung:

$$U_1 = \frac{18,375}{\cos 11^\circ 5'} = 18,725 \text{ t} = U_7,$$

$$U_2 = \frac{18,375}{\cos 7^\circ 26'} = 18,531 \text{ t} = U_6,$$

$$U_3 = \frac{18,375}{\cos 3^\circ 44'} = 18,415 \text{ t} = U_5.$$

Um die größten Spannungen der Zwischenglieder zu bestimmen, seien zunächst einfache, nach links ansteigende Diagonalen angenommen. Für den Schnittpunkt  $C_2$  der Gurtungen des zweiten Feldes findet man durch Rechnung oder nach der Zeichnung den Abstand von der Stütze  $A$  zu  $c_2 = 2,5 \text{ m}$ , und denjenigen von der Diagonale  $A_1B_2$  zu  $d_2 = 5,7 \text{ m}$ . Daher erhält man für diese Diagonale die Spannung  $T_2$ , wenn man die Knotenpunkte  $A_2, A_3, A_4, A_5$  und  $A_6$  mit je  $k = 2 \text{ t}$  belastet denkt, wobei das Eigengewicht als ohne Einfluß vernachlässigt werden kann, aus:

$$2 \frac{1+2+3+4+5}{7} 2,5 - T_2 5,7 = 0 \text{ zu } T_2 = + 1,879 \text{ t}.$$

Ebenso erhält man für eine Belastung nur des ersten Knotenpunktes  $A_1$ :

$$2 \frac{6}{7} 2,5 - 2 \cdot (5 + 2,5) - T_2 5,7 = 0 \text{ zu } T_2 = - 1,879 \text{ t}.$$

In gleicher Weise bestimmen sich die Spannungen in den Diagonalen der übrigen Felder mit Ausnahme des mittleren, und es wird genügen, für diese Bestimmung einfach die Ansätze anzugeben. Es ist für die

Diagonale  $A_2B_3$ :  $c_3 = 15 \text{ m}$ ,  $d_3 = 19,4 \text{ m}$ :

$$2 \frac{1+2+3+4}{7} 15 = T_3 19,4; \quad T_3 = \pm 2,208 \text{ t}.$$

Diagonale  $A_4B_5$ :  $c_4 = 15 \text{ m}$ ,  $d_4 = 16,8 \text{ m}$ :

$$2 \frac{1+2}{7} (35 + 15) = T_5 16,8; \quad T_5 = \pm 2,551 \text{ t}.$$

Diagonale  $A_5B_6$ :  $c_5 = 2,5 \text{ m}$ ,  $d_5 = 4,4 \text{ m}$ :

$$2 \frac{1}{7} (35 + 2,5) = T_6 4,4; \quad T_6 = \pm 2,435 \text{ t}.$$

Für das mittlere Feld, für welches der Schnittpunkt der Gurtungen ins Unendliche rückt, setzt man wieder die Verticalcomponente der Diagonalspannung  $T_4 \sin \delta$  gleich der verticalen Scherkraft in diesem Felde bei einer Belastung des halben Trägers. Der Neigungswinkel  $\delta$  folgt aus:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{A_3B_3}{5} = \frac{6,8571 - 1,9592}{5} = 0,9796 \text{ zu } \delta = 44^\circ 25',$$

daher erhält man aus:

$$T_4 \sin 44^\circ 25' = 2 \frac{1+2+3}{7}; \quad T_4 = \pm 2,449 \text{ t}.$$

Die Bestimmung der Spannkraften in den Verticalpfosten geschieht gleichfalls unter der Voraussetzung einfacher Diagonalen, welche auf Zug und Druck wirksam sind, wie folgt:

Der Durchschnittpunkt  $D_1$  zwischen den Gurtungen  $AA_1$  und  $B_1B_2$  fällt zwischen  $A$  und  $B$  und hat von  $A$  den horizontalen Abstand  $b_1 = 0,588 \text{ m}$ , wie aus der Zeichnung oder durch Rechnung gefunden wird. In Folge dessen erzeugen alle Belastungen Zugspannungen, so daß man  $P_{1\max}$  erhält, wenn der Träger voll belastet ist, während für den leeren Träger  $P_{1\min}$  eintritt. Man hat daher aus:

$$\frac{6.3}{2} 0,588 - P_{1\max} (5 - 0,588) = 0; \quad P_{1\max} = + 1,199 = \text{rot } 1,2 \text{ t Zug}$$

und

$$\frac{6.1}{2} 0,588 - P_{1\min} (5 - 0,588) = 0; \quad P_{1\min} = + 0,4 \text{ t Zug}.$$

Für die übrigen Pfosten fallen die betreffenden Durchschnitte  $D$  der Gurtungen außerhalb der Stützen und man findet die äußersten Anstrengungen der Pfosten nach dem Vorstehenden durch die folgenden Ansätze. Es ist für  $A_2B_2$ ,  $b_2 = 0,416 \text{ m}$  (links von  $A$ ). Daher wird für eine Belastung von  $A_2$  bis  $A_6$ :

$$\left(3 + 2 \frac{1+2+3+4+5}{7}\right) 0,416 - 1.5,416 + P_{2\min} 10,416 = 0;$$

$$P_{2\min} = + 0,229 \text{ t Zug},$$

während man für eine Belastung von  $A_1$  den Werth  $P_{2\max}$  aus:

$$\left(3 + 2 \frac{6}{7}\right) 0,416 - 3.5,416 + P_{2\max} 10,416 = 0;$$

$$P_{2\max} = + 1,371 \text{ t Zug}$$

erhält. Man hat ebenso für  $A_3B_3$  den Abstand des Schnittpunktes von  $A$ ,  $b_3 = 6,429$ , daher:

$$\left(3 + 2 \frac{1+2+3+4}{7}\right) 6,429 - 1 (11,429 + 16,429) + P_{3\min} 21,429 = 0;$$

$$P_{3\min} = - 0,457 \text{ t Druck},$$





hervorgerufen, welche an jedem Ende  $A$  einen Horizontalschub

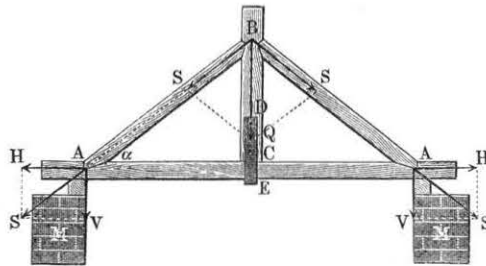
$$H = S \cos \alpha = \frac{1}{2} Q \cotg \alpha. \quad (2)$$

und einen Verticaldruck

$$V = S \sin \alpha = \frac{Q}{2}. \quad (3)$$

erzeugt. Für  $Q$  hat man außer dem Eigengewichte der Hängsäule  $BE$  und der halben Streben  $BA$  und  $EA$  noch die etwa direct in  $C$  angebrachte

Fig. 303.

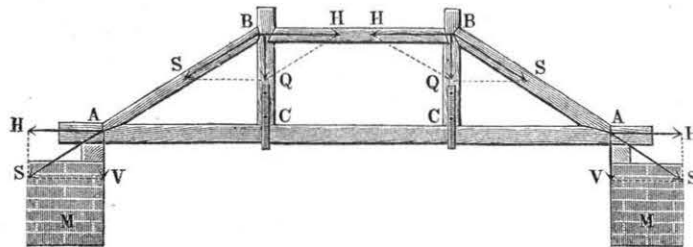


Belastung im vollen Betrage anzunehmen, während man von dem Eigengewichte des Balkens  $AA$  und der gleichmäßig darüber verbreiteten Last  $\frac{3}{8}$  als in  $C$  wirkend zu denken hat, gemäß den Verhältnissen, welche für einen auf drei gleich hohen Stützen ruhenden Balken gelten (s. §. 38). Der Balken  $AA$  wird außer auf Biegung noch durch die Kraft  $H$  auf Zug beansprucht.

Bei einer größeren Länge des Balkens kann derselbe durch das Hängwerk, Fig. 304, in zwei Zwischenpunkten  $C$  und  $C$  gestützt werden, wobei der zwischen die Köpfe der beiden Streben eingesetzte horizontale Spannriegel  $BB$  der Druckkraft

$$H = Q \cotg \alpha \quad (4)$$

Fig. 304.



zu widerstehen hat. Eine ebenso große Horizontalkraft spannt hierbei den Balken und sucht die Fasern an den Enden abzuschneiden. Von dem Eigengewichte des Balkens und der auf demselben gleichmäßig vertheilten Belastung hat man, wie bei einem Balken auf vier gleich weit entfernten Stützen,  $\frac{3}{8}$  des ganzen Betrages in jedem Punkte  $C$  und  $\frac{1}{8}$  je in  $A$  wirksam zu denken (s. §. 39).

In welcher Weise man zusammengesetzte Hängwerke nach Art der Figuren 305 und 306 zu berechnen hat, wird nach dem bisher Angeführten deutlich

Fig. 305.

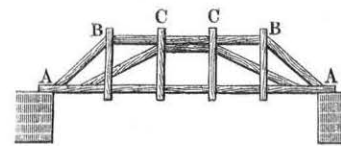
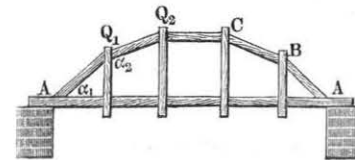


Fig. 306.



sein. In beiden Fällen läßt sich bei gleicher Entfernung der Stützpunkte annehmen, daß von der ganzen gleichmäßig über den Balken ausgebreiteten Belastung jede der äußeren Hängsäulen  $\frac{9}{40}$ , jede der inneren  $\frac{8}{40}$ , und jeder Auflagerpunkt  $\frac{3}{40}$  zu tragen hat.

Daß bei der Construction der Fig. 306 die Neigungen der Streben nicht willkürlich sind, sondern in der Weise mit einander in Beziehung stehen, daß in allen Punkten der gleiche Horizontalschub  $H$  auftritt, wurde bereits in

§. 59 gelegentlich der Sparren angeführt.

Bezeichnet man mit  $Q_1$  und  $Q_2$  die Belastungen der Stiele  $B$  und  $C$ , und sind  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Neigungswinkel der Streben  $AB$  und  $BC$  gegen den Horizont, so gilt daher die Gleichung

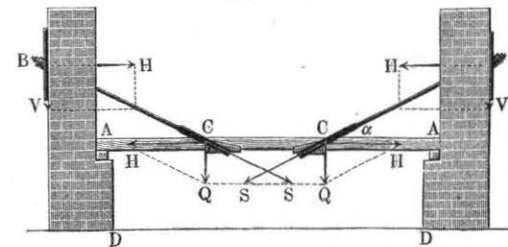
$$H = Q_2 \cotg \alpha_2 = (Q_1 + Q_2) \cotg \alpha_1$$

oder

$$\frac{\tg \alpha_1}{\tg \alpha_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} \quad (5)$$

Ein Hängwerk, bei welchem die Streben durch Zugkräfte in Anspruch genommen sind, stellt Fig. 307 vor. Hier wird der Balken nur in seinem

Fig. 307.



mittleren Theile  $CC$  durch die Kraft  $H = Q \cotg \alpha$  gezogen, während die Widerlagsmauern in  $B$  den Zugspannungen der Streben  $S = \frac{Q}{\sin \alpha}$  widerstehen müssen. Es bedarf nur der Erwähnung, daß für die Stabilität dieser Mauern gegen Rappen und Gleiten die im zweiten Capitel angegebenen betreffenden Bemerkungen volle Gültigkeit haben.

Ein einfaches Sprengwerk ist durch Fig. 308 und ein doppeltes durch Fig. 309 dargestellt. Für die Vertheilung der Kräfte gelten genau dieselben

Fig. 308.

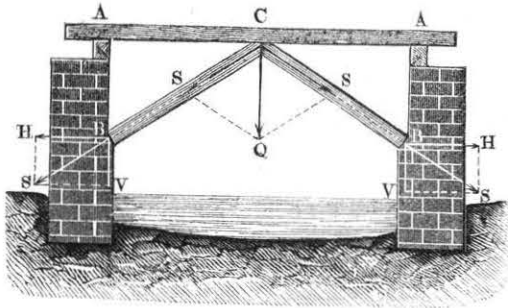
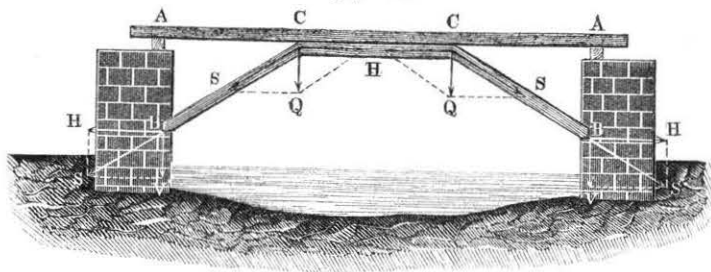


Fig. 309.



Regeln wie für die Hängwerke, Fig. 303 und Fig. 304. Bei einer größeren Anzahl zu unterstützender Punkte kann man die Construction nach Fig. 310 mit Spannriegeln oder nach Fig. 311 mit ungleichschenkeligen Sprengwerken

Fig. 310.

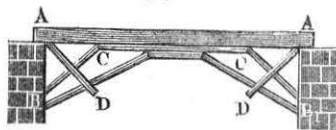
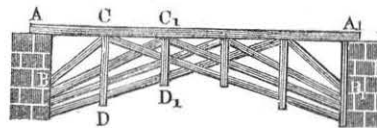


Fig. 311.



wählen, und man pflegt in solchen Fällen die Streben vor dem seitlichen Ausbiegen, welches wegen ihrer größeren Länge zu befürchten ist, durch

Zangen  $D$  zu sichern. Bei ungleichen Neigungen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  der Streben gegen den Horizont, Fig. 312, findet man die Spannkraft  $S_1$  und  $S_2$  in den Streben nach der Figur ohne Weiteres aus:

$$S_1 : S_2 : Q = \sin (90^\circ - \alpha_2) : \sin (90^\circ - \alpha_1) : \sin (\alpha_1 + \alpha_2)$$

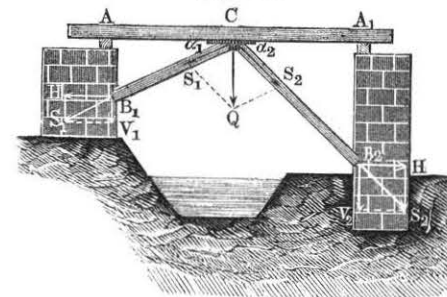
zu

$$S_1 = Q \frac{\cos \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} \quad \dots \quad (6)$$

und

$$S_2 = Q \frac{\cos \alpha_1}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}, \quad \dots \quad (7)$$

Fig. 312.



während der Horizontalschub für jede Strebe und für jedes Widerlager durch

$$H = S_1 \cos \alpha_1 = S_2 \cos \alpha_2 = Q \frac{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{Q}{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2} \quad (8)$$

ausgedrückt ist. Für die Verticalkräfte in  $B_1$  und  $B_2$  hat man:

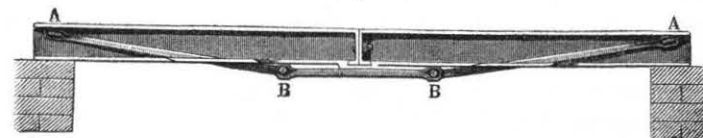
$$V_1 = H \tan \alpha_1 = Q \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2} \quad \dots \quad (9)$$

und

$$V_2 = H \tan \alpha_2 = Q \frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1 + \tan \alpha_2} \quad \dots \quad (10)$$

Man kann auch Sprengwerke, d. h. Constructionen, welche den Balken von unten unterstützen, so anordnen, daß die Streben gezogen werden, in welchem Falle man meistens den Horizontalzug der Streben nicht durch Widerlagsmauern, sondern durch die rückwirkende Festigkeit des gesprengten Balkens aufnimmt. Als Beispiel hierfür hat man den gesprengten oder armirten gußeisernen Balken, Fig. 313, und das Sprengwerk mit hölzernen

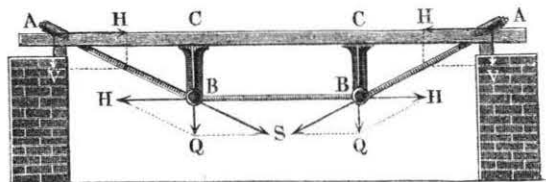
Fig. 313.





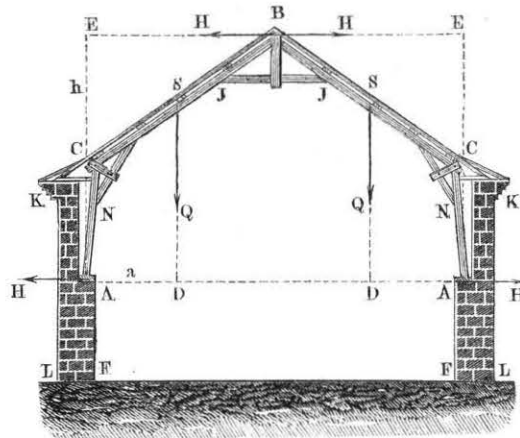
Balken, Fig. 314. Einen Horizontalschub auf die Unterstüßungsmauern üben diese Constructionen natürlich nicht aus.

Fig. 314.



Die Sprengwerke finden auch wohl Anwendung zur Construction von Dachgesperren, besonders hölzernen, in solchen Fällen, wo man einen horizontalen Balken oder Durchzug zur Aufnahme des Sparrenschubes nicht anbringen will. Alsdann muß der Sparrenschub durch die Seiten- oder Stützmauern des Gebäudes aufgenommen werden. In den Figuren 315, 316 und 317 sind drei solche Gespärre vor Augen geführt. Hierbei sind in Fig. 315 die beiden oberhalb durch einen Kehlbalken verbundenen Sparren  $BC$  durch die schrägen Stiele oder Streben  $AC$  gestützt, und in den Ecken

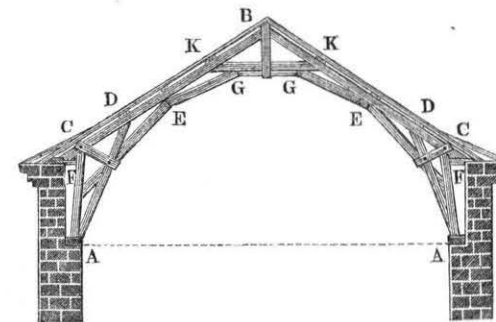
Fig. 315.



bei  $C$  durch besondere Streben versteift. Fig. 316 dagegen stellt ein Gespärre vor, bei welchem die Sparren  $BC$  durch die Streben  $AD, FE, EG$  und den Spannriegel  $GG$  unterstützt und gleichfalls durch den Kehlbalken  $KK$  verbunden sind. Bei dem Sparrenwerk, Fig. 317, ist es ein aus Streben zusammengesetzter Bogen  $ADEDA$ , welcher die Sparren  $BC$  stützt.

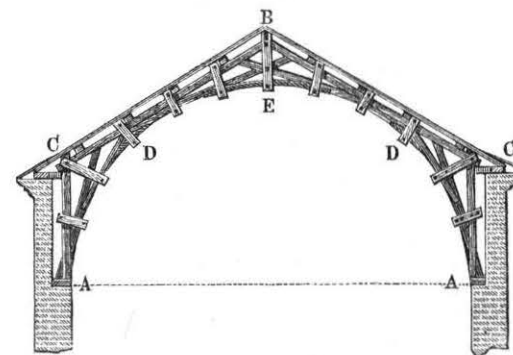
Die Ermittlung des Horizontalschubes dieser Sprengwerke ist in aller Strenge nur unter Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse der einzelnen Glieder möglich, und es möge dieserhalb auf das im Folgenden über den elastischen Bogen Angegebene verwiesen werden. Durch die Verbindung der

Fig. 316.



Sparren durch Zangen, Bänder etc. läßt sich der auf die Mauern ausgeübte Horizontalschub zum Theil herabziehen, indem diese Verbindungstheile einen entsprechenden Theil der Schubkraft aufzunehmen vermögen, ebenso wie bei der Anwendung eines Durchzuges dieser gewissermaßen wie die untere Gurting eines Fachwerkträgers den ganzen Horizontalzug aufnimmt, so daß die Stützmauern nur den verticalen Druck auszuhalten haben. Annähernd

Fig. 317.



kann man bei Gespärren, wie Fig. 315, wenn man von der Wirkung des Kehlbalkens  $JJ$  absteht, den Horizontalschub  $H$  im Scheitel  $B$  und den Fußpunkten  $A$  gleich

$$H = Q \frac{a}{h}$$

setzen, unter  $Q$  die gesammte Belastung eines Sparrens  $BC$ , unter  $h$  die

Höhe  $AE$  und unter  $\alpha$  den horizontalen Abstand des Schwerpunktes  $S$  von dem Fuße  $A$  verstanden.

Die Dimensionen der einzelnen Theile des Gespärres sind nach den Regeln der zusammengesetzten Festigkeit (s. Thl. I, Abschn. IV, Cap. 5) zu bestimmen, indem man die Summe der aus der Biegung und Ausdehnung bzw. Zusammendrückung eines solchen Gliedes sich ergebenden Spannungen gleich dem höchsten zulässigen Betrage der Materialanstrengung setzt. Beispielsweise hat man für den Sparren  $BC$ , Fig. 318, von der Länge  $l$  und dem Neigungswinkel  $\alpha$  und der gleichmäßig vertheilten Belastung  $Q$  für die Mitte das auf Biegung wirkende Moment

$$M = \frac{1}{2} H l \sin \alpha - \frac{1}{8} Q l \cos \alpha, \quad \dots \quad (11)$$

und die auf Zusammendrücken wirkende Kraft ebenfalls in der Mitte:

$$S = H \cos \alpha + \frac{1}{2} Q \sin \alpha \quad \dots \quad (12)$$

In gleicher Weise ist für die Strebe  $AC$  von der Länge  $l_1$ , der Neigung  $\alpha_1$  und dem Eigengewichte  $Q_1$  das Bruchmoment in der Mitte

$$M_1 = H \left( l \sin \alpha + \frac{1}{2} l_1 \sin \alpha_1 \right) - \frac{1}{2} Q (l \cos \alpha + l_1 \cos \alpha_1) - \frac{1}{8} Q_1 l_1 \cos \alpha_1 \quad \dots \quad (13)$$

und die Compressionskraft

$$S_1 = H \cos \alpha_1 + \left( Q + \frac{1}{2} Q_1 \right) \sin \alpha_1 \quad \dots \quad (14)$$

Um die Spannkraft  $S_2$  in der Strebe  $NO$  zu erhalten, hat man das Drehungsmoment um die Ecke  $C$ :

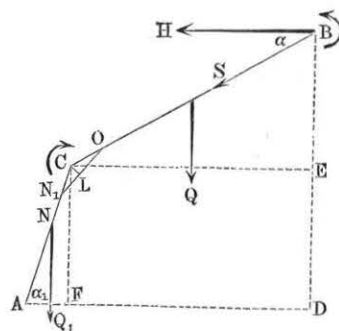
$$M_2 = H l \sin \alpha - \frac{1}{2} Q l \cos \alpha, \quad \dots \quad (15)$$

woraus man

$$S_2 = \frac{M_2}{d} \quad \dots \quad (16)$$

erhält, wenn  $d$  den normalen Abstand des Eckpunktes  $C$  von  $NO$  bedeutet.

Fig. 318.



Graphisch lassen sich aus den bekannten Belastungen der Knotenpunkte von Sprengwerken immer durch einfache Zerlegung der Kräfte die in den einzelnen Gliedern der Sprengwerke auftretenden Anstrengungen ermitteln, worüber im folgenden Paragraphen gelegentlich der Behandlung der Lehrgerüste ein Näheres angegeben werden soll.

Beispiele: 1. Wenn das doppelte Hängwerk in Fig. 304 eine 20 m lange und 4 m breite Brücke zu tragen bestimmt ist, und angenommen wird, daß jeder Quadratmeter dieser Brücke sammt Belastung 300 kg wiegt, so ergibt sich das Gewicht der ganzen Brücke zu

$$Q = 20 \cdot 4 \cdot 300 = 24\,000 \text{ kg},$$

wovon die Hälfte mit 12 000 kg von je einem der beiderseits angeordneten Hängwerke zu tragen ist. Von dieser Belastung entfällt auf jede Hängsäule der Betrag von

$$Q = \frac{3}{8} 12\,000 = 4\,500 \text{ kg},$$

welcher bei einer Neigung der Streben von  $22,5^\circ$  gegen den Horizont, einen Horizontalschub

$$H = 4\,500 \cotg 22\frac{1}{2}^\circ = 4\,500 \cdot 2,4142 = 10\,864 \text{ kg}$$

und eine Strebenkraft

$$S = \frac{4\,500}{\sin 22\frac{1}{2}^\circ} = \frac{4\,500}{0,3827} = 11\,758 \text{ kg}$$

erzeugt. Wenn man wegen der größeren Länge der Streben und Spannriegel in denselben eine Spannung von nur 0,2 kg pro Quadratmillimeter zulassen will, so hat man dem Spannriegel einen Querschnitt von 543,20 qcm und jeder Strebe einen solchen von 587,9 qcm zu geben, was bei 20 cm Breite der Hölzer bzw. 27 cm und 30 cm Höhe derselben ergibt.

2. Bei einem Ziegeldache, wie Fig. 318, sei die Länge des oberen Sparrens  $BC = l = 8 \text{ m}$ , die des unteren  $AC = l_1 = 5 \text{ m}$ , der Neigungswinkel des ersteren  $\alpha = 30^\circ$ , der des letzteren  $\alpha_1 = 75^\circ$  gegen den Horizont. Nimmt man incl. Schnee- und Winddruck eine Belastung von 250 kg pro Quadratmeter Grundfläche und eine Entfernung der Binder von 2 m an, so erhält man die Belastung des oberen Sparrens  $BC$  zu

$$Q = 2 \cdot 8 \cdot \cos 30^\circ \cdot 250 = 3464 \text{ kg},$$

und diejenige des unteren  $AB$  zu

$$Q_1 = 2 \cdot 5 \cdot \cos 75^\circ \cdot 250 = 647 \text{ kg}.$$

Man erhält daher den Sparrenschub  $H$  aus

$$H(8 \sin 30^\circ + 5 \sin 75^\circ) = 3464(5 \cos 75^\circ + 4 \cos 30^\circ) + 647 \cdot 2,5 \cdot \cos 75^\circ$$

zu

$$H = \frac{16481,7 + 418,6}{4 + 4,83} = 1915 \text{ kg}.$$

Für die Mitte  $S$  des Sparrens  $CB$  hat man daher nach (11) das Biegemoment:

$$M = \frac{1}{2} 1915 \cdot 8 \cdot 0,5 - \frac{1}{8} 3464 \cdot 8 \cdot 0,8660 = 3930 - 3000 = 930 \text{ mkg},$$

und die Spannung nach (12):

$$S = 1915 \cdot 0,8660 + \frac{1}{2} 3464 \cdot 0,5 = 1658 + 866 = 2524 \text{ kg.}$$

In gleicher Weise erhält man für den unteren Sparren  $AC$  in der Mitte nach (13) und (14):

$$M_1 = 1915 \left( 8 \cdot 0,5 + \frac{5}{2} 0,9659 \right) - \frac{1}{2} 3464 (8 \cdot 0,8660 + 5 \cdot 0,2588) - \frac{1}{8} 647 \cdot 5 \cdot 0,2588 = 12\,285 - 14\,240 - 105 = -2060 \text{ mkg}$$

und

$$S_1 = 1915 \cdot 0,2588 + \left( 3464 + \frac{1}{2} 647 \right) 0,9659 = 496 + 3659 = 4155 \text{ kg.}$$

Für die Ecke  $C$  endlich hat man nach (15) das Biegemoment:

$$M_2 = 1915 \cdot 8 \cdot 0,5 - \frac{1}{2} 3464 \cdot 8 \cdot 0,8660 = 7660 - 12\,000 = -4340 \text{ mkg,}$$

so daß, bei einem Abstände der Strebe  $NO$  von der Ecke  $C$  gleich  $0,5 \text{ m}$ , die Druckspannung dieser Strebe zu

$$S_2 = \frac{4340}{0,5} = 8680 \text{ kg}$$

folgt. Das negative Vorzeichen von  $M_1$  und  $M_2$  deutet an, daß die Biegung in dem unteren Sparren  $AC$  nach rechts im Sinne des Pfeiles geschieht, d. h. daß der Sparren nach außen convex gebogen wird, während der positive Werth von  $M$  auf eine solche Biegung des oberen Sparrentheils deutet, vermöge deren dieser Theil nach außen concav gebogen wird, wie sich dies aus der für diese Stelle vorwiegenden Einwirkung von  $H$  gegenüber  $Q$  erklärt.

Aus den berechneten Momenten  $M$  und Spannungen  $S$  hat man nun die Querschnitte der Hölzer so zu bestimmen, daß die größte Faserpannung den für das Material nach §. 35 zulässigen Werth nicht überschreitet. Wählt man beispielsweise für den unteren Sparren  $AC$  eine Breite des rechteckigen Querschnittes von  $180 \text{ mm}$  und nimmt die Höhe desselben etwa  $\frac{7}{5}$  mal so groß mit  $250 \text{ mm}$  an, so erzeugt das Moment  $M_1 = 2060 \text{ mkg}$  eine äußerste Biegungs-  
spannung  $s_b$ , welche sich aus

$$2060 \cdot 1000 = \frac{1}{6} 180 \cdot 250^2 s_b$$

zu

$$s_b = \frac{2060}{3 \cdot 625} = 1,10 \text{ kg}$$

bestimmt. Außerdem wird durch die Pressung  $S_1 = 4155 \text{ kg}$  noch eine spezifische Druckspannung von

$$s_a = \frac{4155}{180 \cdot 250} = 0,092 \text{ kg}$$

erzeugt, so daß das Holz daselbst auf der Innenseite mit der größten Spannung von

$$1,10 + 0,092 = 1,2 \text{ kg}$$

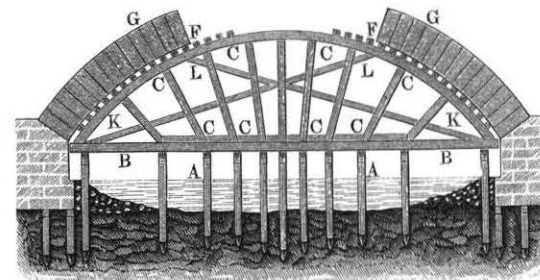
beansprucht wird, welcher Betrag für Dächer noch zulässig erscheint. Die Stärke der Mauer, auf welcher das Gespärre bei  $A$  aufruhet, ist nach den in Cap. 1 angegebenen Regeln zu ermitteln, indem dabei ein auf Umsturz wirkender Horizontal Schub  $H = 1915 \text{ kg}$  und eine verticale Belastung von  $Q + Q_1 = 4111 \text{ kg}$  für jede Mauerlänge von  $2 \text{ m}$  zwischen zwei Bindern einzuführen ist.

**Lehrgerüste.** Besonders häufige Verwendung finden die zusammen- §. 63.  
gesetzten Sprengwerke als sogenannte Lehrgerüste bei der Ausführung der Gewölbe, wobei diese Gerüste dazu dienen, das Aneinanderfügen der einzelnen Wölbsteine genau in der beabsichtigten Art zu ermöglichen, und diesen Steinen so lange eine Unterstützung zu gewähren, so lange dies vor geschehenem Schluß des Gewölbes nöthig ist. Hierzu bestehen die Lehrgerüste in der Regel aus einer hinreichend großen Anzahl von bogenförmigen Tragrippen von der entsprechenden Form, welche unterhalb durch Sprengwerke gestützt werden und äußerlich mit neben einander liegenden Latten, sogenannten Schaallatten, versehen sind, welche die Form der beabsichtigten inneren Wölbbleibung festlegen und auf welchen die Wölbsteine während des Baues direct aufruhem.

Die Lehrgerüste unterscheidet man in gestützte, d. h. solche, welche unterhalb auf eingerammten Pfählen oder besonders zu diesem Zwecke aufgeführten Pfeilern ruhen, und in gesprengte, bei denen die Lehrbögen durch Sprengwerke getragen werden, welche sich gegen die Widerlagspfeiler des Gewölbes stemmen. Diese gesprengten Lehrgerüste, welche hier vorzugsweise betrachtet werden sollen, gewähren den Vortheil, daß sie die zu überbrückende Oeffnung (Straße, Canal etc.) während des Baues nicht versperren, wie dies durch die gestützten Lehrgerüste geschieht.

Ein gestütztes Lehrgerüst zeigt Fig. 319, bei welchem das aus dem Kranze  $KK$ , den Streben  $CC$ ... und den Zangen  $L$  bestehende Gerüst vermittelt

Fig. 319.



des horizontalen Balkens  $BB$  auf den eingerammten Pfeilern  $A$  ruht. Die über die einzelnen Lehrbögen  $K$  genagelten Schaallatten  $F$  sind mehr oder minder starke Hölzer, auf welchen direct die Wölbsteine ruhen.

Die Figuren 320 und 321 (a. f. S.) zeigen dagegen zwei gesprengte Lehrgerüste, welche sich gegen die Widerlagspfeiler  $AA$  stützen. Bei dem ersteren Gerüste findet sich zwischen je zwei zusammengehörigen Streben ein horizontaler Spannriegel, weshalb bei der Anwendung eines solchen Lehr-

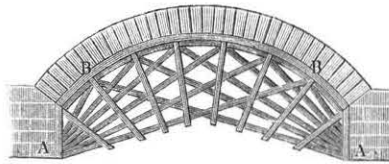


gerüstet das Gewölbe gleichzeitig von beiden Seiten *B* und *B* her ausgeführt werden muß. Bei dem Gerüste Fig. 321 dagegen, bei welchem sich je zwei

Fig. 320.



Fig. 321.



Streben direct gegen einander stemmen, könnte auch eine einseitige Ausführung des Gewölbes vorgenommen werden. Die angewendeten Bänder und Zangen haben vorzugsweise den Zweck, die seitlichen Ausbiegungen der Streben wirksam zu verhindern, welche bei der oft beträchtlichen Länge dieser Hölzer durch die Druckkräfte angestrebt werden. Damit sich das geschlossene Gewölbe allmählig und gleichmäßig setzen kann, muß die Einrichtung so getroffen werden, daß die Ausrüstung ebenfalls allmählig und ohne Stoßwirkung vorgenommen werden kann. Zu dem Ende läßt man wohl das Gerüst auf Keilen ruhen, welche nach Vollendung des Gewölbes nach und nach gelüftet werden, um eine allmähliche Senkung des Gewölbes zu bewirken. Diese Keile können ebensowohl zwischen den Stützpfeilern und dem Hauptträger, wie auch zwischen diesem und den Streben oder zwischen den letzteren und den Lehrbögen angebracht werden. Auch hat man in neuerer Zeit statt der Keile eiserne Schrauben, excentrische Scheiben u. angewendet, um die starken Erschütterungen zu vermeiden, welche mit dem Lösen der Keile verbunden zu sein pflegen. Ebenso hat man zur Unterstützung mit Sand gefüllte Säcke verwendet, deren allmähliche Entleerung man durch Einschnneiden von Löchern in der Gewalt hat. Ueber die eisernen Lehrgerüste, wie sie zum Bau von Tunneln von Rhziha vorgeschlagen und verwendet sind, ist dessen Werk.\*) nachzulesen.

Zur Feststellung der Verhältnisse dieser Lehrgerüste ist zunächst die Ermittlung des Druckes erforderlich, welcher von dem in der Ausführung befindlichen Gewölbe auf die Schaalung in verschiedenen Punkten ausgeübt wird.

Es sei zu dem Ende durch *ABC*, Fig. 322, ein im Bau begriffenes Gewölbe und durch *a b* der zuletzt aufgelegte Wölbstein dargestellt, dessen Gewicht *G*<sub>1</sub> in dem Schwerpunkte *s*<sub>1</sub> wirksam zu denken ist. Damit dieser Stein auf der unter dem Winkel *α*<sub>1</sub> gegen den Horizont geneigten Lager-

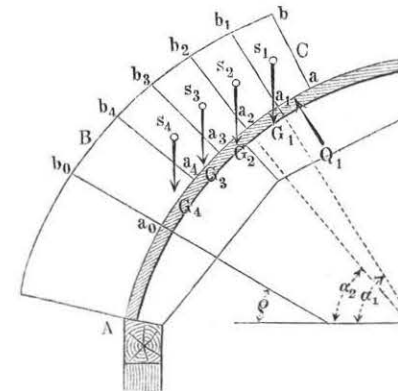
\*) Rhziha, Die neue Tunnelbaumethode in Eisen, 1864.

fläche *a*<sub>1</sub> *b*<sub>1</sub>, auf welcher er ruht, nicht abgleite, muß das Lehrgerüst in der Fläche *a a*<sub>1</sub> eine Reaction gegen den Stein ausüben, welche in der Richtung der Gleitfläche *a*<sub>1</sub> *b*<sub>1</sub> wirksam, nach den bekannten Gesetzen der schiefen Ebene den Werth:

$$Q_1 = G_1 (\sin \alpha_1 - \varphi \cos \alpha_1) \quad \dots \quad (1)$$

hat, wenn *φ* den Reibungscoefficienten der Steine auf einander oder richtiger denjenigen des nassen Mörtels bedeutet. Denkt man sich diese Kraft *Q*<sub>1</sub>

Fig. 322.



von der Schaalung *a a*<sub>1</sub> ausgeübt, und untersucht, welche Reaction *Q*<sub>2</sub> die Schaalung *a*<sub>1</sub> *a*<sub>2</sub> gegen den vorhergehenden Stein *a*<sub>1</sub> *b*<sub>2</sub> in der Richtung *a*<sub>2</sub> *b*<sub>2</sub> ausüben müsse, um auch diesen am Abgleiten zu verhindern, so findet sich, daß dieser Stein im Gleichgewichte sein muß unter Einwirkung seines Eigengewichtes *G*<sub>2</sub>, der Reaction *Q*<sub>2</sub> in *a*<sub>1</sub> *a*<sub>2</sub> nach der Richtung der Fläche *a*<sub>2</sub> *b*<sub>2</sub>, ferner der in der Fläche *a*<sub>1</sub> *b*<sub>1</sub> wirksam zu denkenden Reaction *Q*<sub>1</sub> und der Reibung, welche sich

einem Abgleiten des Steins entlang der Lagerfuge *a*<sub>2</sub> *b*<sub>2</sub> entgegensetzt. Wenn diese letztere den Winkel *α*<sub>2</sub> mit dem Horizonte, also denjenigen *α*<sub>1</sub> — *α*<sub>2</sub> mit *Q*<sub>1</sub> bildet, so findet man die das Abgleiten aufstrebende Kraft zu

$$G_2 \sin \alpha_2 - Q_1 \cos (\alpha_1 - \alpha_2) - Q_2$$

und die das Abgleiten hindernde Reibung auf *a*<sub>2</sub> *b*<sub>2</sub> zu

$$\varphi [G_2 \cos \alpha_2 - Q_1 \sin (\alpha_1 - \alpha_2)],$$

so daß man für den Gleichgewichtszustand durch Gleichsetzung beider Ausdrücke die von *a*<sub>1</sub> *a*<sub>2</sub> auszuübende Reaction zu

$$Q_2 = G_2 (\sin \alpha_2 - \varphi \cos \alpha_2) - Q_1 [\cos (\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi \sin (\alpha_1 - \alpha_2)] \\ = A - B \quad \dots \quad (2)$$

erhält. Diese Gleichung gilt offenbar allgemein für jeden beliebigen Stein wie z. B. *a*<sub>3</sub> *b*<sub>4</sub>, wenn man für *G*<sub>2</sub> dessen Gewicht und für *Q*<sub>1</sub> diejenige Reaction einführt, welche von dem Lehrgerüste auf alle oberhalb *a*<sub>3</sub> *b*<sub>3</sub> noch verlegten Steine *a*<sub>3</sub> *a* ausgeübt wird.

Der Druck *Q*<sub>2</sub> besteht der Gleichung (2) zufolge aus einer Differenz *A* — *B*, welche immer kleiner sein wird als der Minuend *A*, da man leicht

erkennt, daß unter den gewöhnlichen Verhältnissen \*) der Subtrahend  $B = Q_1 [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi \sin(\alpha_1 - \alpha_2)]$  immer positiv sein wird. Der Werth  $A = G_2 (\sin \alpha + \varphi \cos \alpha)$  bedeutet aber nach (1) für irgend welchen Stein denjenigen Druck  $Q$ , welchen er auf das Lehrgerüst ausübt, wenn er der zuletzt aufgelegte ist, so daß hieraus ohne Weiteres die Regel folgt: Der Druck auf das Lehrgerüst an irgend einer Stelle wird am größten, sobald das Gewölbe bis zu dieser Stelle vorge-schritten ist, jede weitere Fortsetzung der Einwölbung vermindert den specifischen Druck auf das Lehrgerüst an der betrachteten Stelle.

Aus (1) folgt unmittelbar, daß für  $\varphi = \tan \alpha_1$ , d. h. für  $\alpha_1 = \varphi$  der Druck  $Q$  gleich Null wird, daß also erst von derjenigen Lagerfuge  $a_0 b_0$  an, deren Neigung gegen den Horizont gleich dem Reibungswinkel  $\varphi$  ist, ein Druck auf das Lehrgerüst ausgeübt wird. Es ergibt sich übrigens aus (2), daß in diesem Grenzpunkte  $a_0$  nur dann ein Druck sich einstellt, wenn das Gewölbe gerade bis zu diesem Punkte ausgeführt ist, bei weiterer Ausführung giebt (2) für den Punkt  $a_0$  einen negativen Werth, und der Anfangspunkt, in welchem die Reaction des Lehrgerüsts zu wirken beginnt, rückt von  $a_0$  aus um so mehr nach der Mitte hin, je weiter die Einwölbung fort-schreitet.

Nachdem der Schlussstein eingesetzt und der Mörtel entsprechend erhärtet ist, hört natürlich jeder weitere Druck auf das Lehrgerüst auf, und das Gewölbe gewinnt nach dem Ausrüsten des Lehrgerüsts seine Stabilität durch den Eintritt des bezüglichen Horizontalschubes, wie im Cap. 2 ausführlich erörtert worden ist.

Nimmt man, um den Druck des Gewölbes auf das Lehrgerüst zu bestimmen, der Sicherheit wegen an, daß in jedem Punkte der maximale mögliche Druck in demselben auf das Lehrgerüst wirke, eine Voraussetzung, die in Wirklichkeit nach dem Vorstehenden niemals eintreten wird, da der Druck in jedem Punkte von dem maximalen Werthe mit dem Fortgange der Ausführung sich vermindert, so kann man am einfachsten graphisch durch folgende Construction die Gesamtbelastung des Lehrgerüsts ermitteln.

Der Druck auf das Lehrgerüst in einem Elemente  $a_1 a_2$ , Fig. 323, in centraler zu  $a_1 a_2$  senkrechter Richtung bestimmt sich, wenn das Gewölbe von  $AB$  bis  $a_1 b_1$  ausgeführt ist, nach (1) zu  $\partial Q_1 = \partial G_1 (\sin \alpha_1 - \varphi \cos \alpha_1)$ , wenn  $\partial G_1$  das Gewicht eines Wölbsteinelementes  $a_1 b_2$  von der unendlich

\*) Für gewöhnlich ist  $\varphi = \tan 22^\circ = 0,4$ ;  $\alpha_1$  höchstens  $90^\circ$ ,  $\alpha_2$  nach dem Folgenden mindestens  $22^\circ$ , daher äußersten Falles

$\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \varphi(\sin \alpha_1 - \alpha_2) = \cos 68^\circ - 0,4 \sin 68^\circ = 0,374 - 0,374 = 0$ , in allen anderen Fällen aber größer.

geringen Breite  $a_1 a_2$  und  $\alpha_1$  die Neigung dieses Elementes gegen den Horizont bezeichnet. Dieses Gewicht bestimmt sich für die Einheit in der Breitenrichtung parallel der Gewölbare zu

$$\partial G_1 = a_1 b_1 \cdot a_1 a_2 \cdot \gamma,$$

unter  $\gamma$  das specifische Gewicht des Wölbmaterials verstanden. Der specifische Druck auf die Flächeneinheit in  $a_1$  ist daher durch

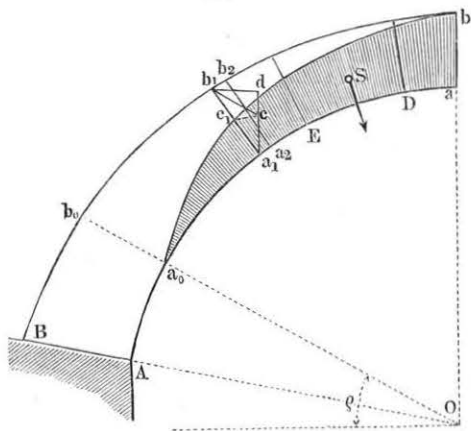
$$\frac{\partial Q_1}{a_1 a_2} = a_1 b_1 \cdot \gamma (\sin \alpha_1 - \varphi \cos \alpha_1)$$

gegeben. Zieht man daher durch  $a_1$  eine Verticallinie  $a_1 d$  und durch  $b_1$  eine gegen die Horizontale  $b_1 d$  unter dem Reibungswinkel  $\varphi$  geneigte Gerade  $b_1 c$ , so erhält man

$$\begin{aligned} a_1 c &= a_1 d - dc = a_1 b_1 (\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \tan \varphi) \\ &= a_1 b_1 (\sin \alpha_1 - \varphi \cos \alpha_1). \end{aligned}$$

Legt man daher einen Maßstab für die Kräfte zu Grunde, nach welchem die Einheit gleich dem Gewichte  $\gamma$  einer Cubikeinheit Gewölbmasse ist, so

Fig. 323.



kann man die Strecke  $a_1 c$  als das Maß für den in  $a_1$  nach der centralen Richtung  $b_1 a_1$  auf das Lehrgerüst ausgeübten Druck ansehen. Wenn man daher  $a_1 c_1 = a_1 c$  macht, und diese Construction für eine hinreichend große Anzahl von Fugen wiederholt, so liefert die Verbindung aller so erhaltenen Punkte  $e_1$  eine Curve  $a_0 c_1 b$ , welche sich im Scheitel  $b$  tangential an die äußere Wölbung anschließt und in

der inneren Wölbung in dem Punkte  $a_0$  verläuft, für welchen die Fuge  $a_0 b_0$  unter dem Winkel  $\varphi$  gegen den Horizont geneigt ist. Man kann daher die zwischen dieser Curve und der inneren Wölbung enthaltene, in der Figur schraffierte Fläche als die Belastungsfläche des Lehrgerüsts ansehen, derart nämlich, daß auf jedes Element wie  $a_1 a_2$  des Lehrbogens in der Fugenrichtung  $b_1 a_1$  das Gewicht eines Steinprismas von der Dicke  $a_1 a_2$  und der Höhe  $a_1 c_1$  wirkt. Mit Rücksicht hierauf kann man in der bekannten

Weise durch Flächenverwandlung für jedes Stück  $DE$  des Lehrbogens zwischen zwei Stützpunkten  $D$  und  $E$ , wie sie durch die Streben hergestellt werden, den centralen Druck ermitteln, der, im Schwerpunkte  $S$  der zugehörigen Belastungsfläche angreifend, das Lehrgerüst belastet, und daraus findet man wieder die auf die Stützpunkte  $D$  und  $E$  selbst entfallenden Belastungen.

Auf eine nähere Bestimmung dieser Belastungen für die verschiedenen Gewölbe soll hier nicht eingegangen werden; es möge genügen, darauf hinzuweisen, daß diese Bestimmung auf analytischem Wege u. A. von Heinzlerling in einem Artikel der Berliner Bauzeitung \*) ausführlich vorgenommen ist.

Anmerkung. Es muß hier bemerkt werden, daß die vorstehende Untersuchung den Druck auf das Lehrgerüst nur unter der Voraussetzung eines angestrebten Abgleitens der Gewölbtheile bestimmt. Da nun aber auch ein Einsturz durch Kippen geschehen kann und geschehen wird, sobald das Lehrgerüst den zur Verhinderung des Kantens erforderlichen Gegendruck nicht zu äußern vermag, so hat man die Inanspruchnahme auch in dieser Hinsicht zu prüfen. Culmann giebt hierfür im Wesentlichen die folgende graphische Construction an.

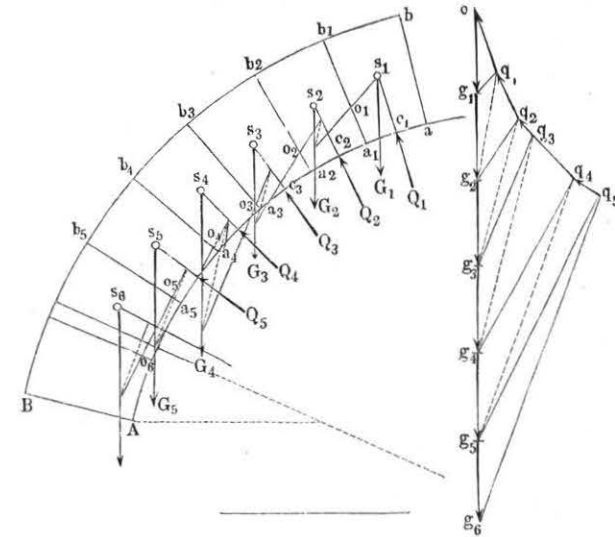
Es sei der Bau des Gewölbes, Fig. 324, von  $AB$  bis  $ab$  vorgeschritten, so theile man dasselbe durch die Lagerfugen  $a_1 b_1, a_2 b_2 \dots$  in eine beliebige Anzahl gleicher oder ungleicher Theile, und trage deren in den Schwerpunkten  $s_1, s_2 \dots$  wirksam zu denkende Gewichte  $G_1, G_2 \dots$  auf einer verticalen Kräfte-  
linie als die einzelnen Strecken  $og_1, g_1 g_2, g_2 g_3 \dots$  hinter einander auf. Die Belastungen oder Reactionen  $Q_1, Q_2, Q_3 \dots$  des Lehrgerüsts für die einzelnen Theile  $aa_1, a_1 a_2 \dots$  der inneren Wölbung denkt man sich in den Mitten  $c_1, c_2, c_3 \dots$  dieser Flächen senkrecht zu den letzteren wirksam.

Berlegt man nun  $og_1 = G_1$  nach  $og_1 g_1$ , d. h. nach der Richtung von  $Q_1$  und einer solchen  $o_1 s_1$ , welche von der Normalen zu  $a_1 b_1$  um den Reibungswinkel  $\rho$  abweicht, so erhält man in  $og_1$  das Maß für die Belastung  $Q_1$  des Lehrbogens  $aa_1$ , während  $g_1 g_2$  die Pressung  $P_1$  ergibt, mit welcher der Stein  $aa_1$  in  $o_1$  gegen den folgenden Stein  $a_1 b_2$  gepreßt wird. Setzt man daher diese Kraft  $P_1 = g_1 g_2$  mit dem Gewichte  $G_2 = g_2 g_3$  des zweiten Steines zu einer Mittelkraft  $q_1 g_2$  zusammen, so erhält man durch Zerlegung dieser letzteren nach  $g_1 g_2$  und  $g_2 g_3$  die Belastung  $Q_2$  des Lehrgerüsts in  $a_1 a_2$  und die Pressung  $P_2$ , mit welcher die Fuge  $a_2 b_2$  gepreßt wird, vorausgesetzt, daß  $g_1 g_2$  parallel der Kraft  $Q_2$  in  $c_2$  gezogen wird, und daß  $g_2 g_3$  wieder um den Reibungswinkel  $\rho$  von der Normalen zur Fuge  $a_2 b_2$  abweicht. Indem man in bekannter Weise parallel zu den Kräften des Kräftepolygons das Seilpolygon zeichnet, erhält man in  $o_2$  den Angriffspunkt der Pressung  $P_2$  in der Fuge  $a_2 b_2$ . Führt man in dieser Weise fort, so erhält man in den Strecken  $og_1, g_1 g_2, g_2 g_3 \dots$  die Druckkräfte, denen das Lehrgerüst in  $c_1, c_2, c_3 \dots$  widerstehen muß, um ein Abgleiten der betreffenden Gewölbschichten zu verhindern, so lange die Angriffspunkte  $o_1, o_2, o_3$  der Fugenpressungen noch in das Gewölbe selbst hinein-

\*) Erbkam, Zeitschr. f. Bauwesen, 1874.

fallen. Wenn indessen, wie dies in der Figur für die Fuge  $a_4 b_4$  der Fall ist, die wie angegeben gezeichnete Pressung  $P_4$  die Fuge  $a_4 b_4$  außerhalb der Wölbstärke trifft, so ist dies ein Beweis, daß das Gewölbe in dieser Fuge nicht mehr durch Gleiten, sondern durch Kippen gefährdet ist. Man hat daher jetzt die Mittelkraft  $q_3 g_4$ , welche den Stein  $a_3 b_4$  angreift, nach  $g_3 g_4$  parallel mit  $Q_4$  und nach einer solchen Richtung  $q_4 g_4$  zu zerlegen, daß die hiermit parallele Fugenpressung  $P_4$  die Fuge  $a_4 b_4$  selbst noch innerhalb des Gewölbes, also mindestens in der inneren Kante  $a_4$  trifft. Besser

Fig. 324.



wird es sein, um ein Zerbröckeln der Kante  $a_4$  zu vermeiden, den Angriffspunkt  $o_4$  noch um eine gewisse Größe  $a_4 o_4$  (0,09 bis 0,120 m nach Culmann) von der Kante entfernt anzunehmen. In derselben Weise hat man weiter im Kräftepolygone die Richtungen für die Fugenpressungen  $P_5, P_6 \dots$  zu bestimmen, und man erkennt aus der Zeichnung, daß diese mit Rücksicht auf das Kanten anzunehmenden Richtungen von  $P_4, P_5 \dots$  flacher, daher die betreffenden Stützkräfte  $Q_4, Q_5 \dots$  des Lehrgerüsts größer ausfallen, als dieselben für die gleichen Fugen mit Rücksicht auf das Gleiten werden würden. Während sonach die obersten Schichten bei nicht genügend starkem Lehrgerüste abgleiten, findet eine Gefährdung des Baues durch ein Kippen der unteren Schichten statt.

Die Kräfte, welchen die Streben eines Lehrgerüsts ausgesetzt sind, lassen sich nach dem oben über Sparren und über Sprengwerke Gesagten leicht ermitteln. Ist  $Q$  der centrale Druck, welchen die Belastung des Lehrbogens auf den Vereinigungspunkt zweier Streben ausübt, die unter dem Winkel

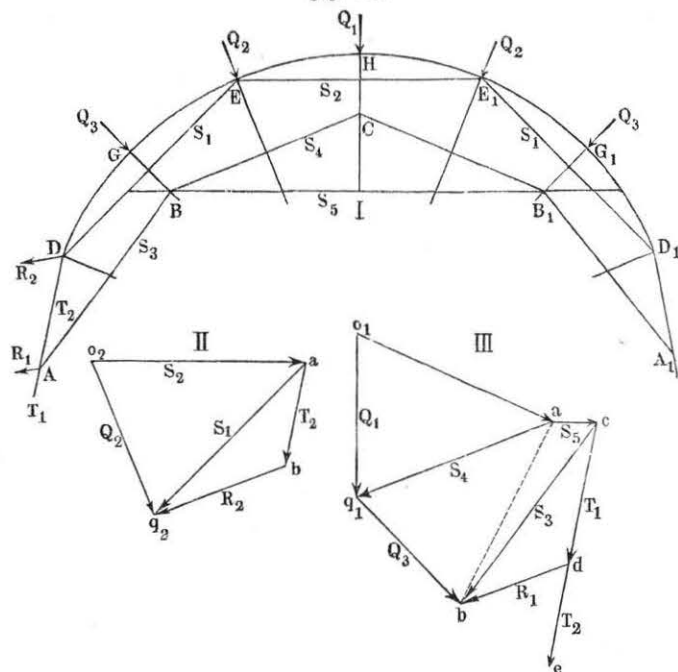


$\beta_1$  und  $\beta_2$  gegen diese Kraft geneigt sein mögen, so findet man diese Strebenkräfte durch Zerlegung von  $Q$  ohne Weiteres zu:

$$S_1 = Q \frac{\sin \beta_2}{\sin (\beta_1 + \beta_2)} \text{ und } S_2 = Q \frac{\sin \beta_1}{\sin (\beta_1 + \beta_2)}.$$

Schließlich möge noch die graphische Ermittlung der in den Gliedern eines Lehrgerüsts auftretenden Kräfte gezeigt werden, zu welchen Zwecke man nur

Fig. 325.

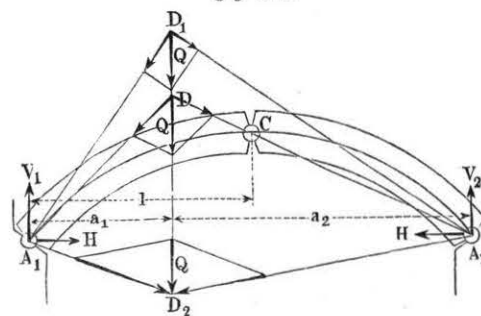


die Zeichnung des zugehörigen Kräftepolygons auszuführen hat. Es sei etwa das Lehrgerüst, Fig. 325, zu Grunde gelegt, welches aus den beiden einfachen Systemen  $ABCB_1A_1$  und  $DEE_1D_1$  besteht, deren centrale Belastungen in  $HC$  durch  $Q_1$ , in  $E$  und  $E_1$  durch  $Q_2$  und in  $GB$  und  $G_1B_1$  durch  $Q_3$  bezeichnet sein mögen. Trägt man in Fig. 325 II nach dem gewählten Kräftemaßstabe die Belastung  $Q_2 = o_2 q_2$  der Richtung und Größe nach auf, zieht durch  $o_2$  eine Horizontale  $o_2a$  und durch  $q_2$  eine Parallele zur Strebe  $DE$ , so erhält man die Druckkräfte  $S_2 = o_2a$  in dem Spannriegel  $EE_1$  und  $S_1 = aq_2$  in der Strebe  $ED$ . Letztere Kraft  $S_1 = aq_2$  kann man ferner zerlegen in  $ab$  parallel dem Stiele  $DA$  und

$bq_2$  nach einer Richtung, welche von der Normalen zur Widerlagsmauer in  $D$  um den Reibungswinkel zwischen Holz und Mauerwerk abweicht. Als dann erhält man in  $ab = T_2$  die Pressung des Stieles  $AD$  unterhalb  $D$ , und in  $bq_2 = R_2$  den Druck gegen die Mauer in  $D$ . Ganz in derselben Weise giebt das Kräftepolygon, Fig. III, die Kräfte, welche in den Gliedern des zweiten Sprengwerkes  $ABCB_1A_1$  wirken, wenn man  $o_1 q_1 = Q_1$  macht, durch die Endpunkte  $o_1$  und  $q_1$  mit  $CB_1$  und  $CB$  Parallelen zieht, die Strebenkraft  $S_4 = aq_1$  in  $CB$  mit der Belastung  $Q_3 = q_1b$  zusammensetzt, und die Resultirende  $ab$  nach der Richtung  $ac$  des Spannriegels  $BB_1$  und  $cb$  der Strebe  $BA$  zerlegt. Aus dieser letzteren Kraft  $S_3$  erhält man wieder die in dem Stiele  $DA$  unterhalb  $A$  zur Wirkung kommende Druckkraft  $T_1 = cd$  und die in  $A$  gegen das Widerlager ausgeübte Pressung  $db$  in einer Richtung, welche von der Normalen zu  $DA$  um den Reibungswinkel zwischen Holz und Mauerwerk abweicht. Der Stiel  $DA$  ist daher zwischen  $D$  und  $A$  der Pressung  $T_2 = ab$  in II und unterhalb  $A$  der Summe der Pressungen  $T_2$  und  $T_1 = cd$ , also der Kraft  $ce$  in III ausgesetzt. In ähnlicher Art hat man auch bei anders angeordneten Lehrgerüsten die Kräftezerlegung vorzunehmen.

**Bogenträger mit Scharnieren.** Unter Bogenträgern sollen im §. 64. Folgenden solche Träger mit einer gekrümmten oder polygonalen Gurtung  $A_1CA_2$ , Fig. 326, verstanden werden, bei denen die andere Gurtung fehlt, indem deren Wirkung durch die horizontalen Reactionen der Widerlager in

Fig. 326.



ähnlicher Weise wie bei den Sprengwerken und Gewölben ersetzt wird. Denkt man sich einen irgendwie gekrümmten Balken  $A_1CA_2$ , für welchen in der Folge immer eine zur Mitte  $C$  symmetrische Form, also auch gleiche Höhe der Stützpunkte  $A_1$  und  $A_2$  vorausgesetzt werden sollen, in einem beliebigen Punkte  $D$  durch eine Last  $Q$  angegriffen, so erkennt man, daß

durch diese Belastung  $Q$  in den Stützpunkten  $A_1$  und  $A_2$  Reactionen  $R_1$  und  $R_2$  hervorgerufen werden, welche, so verschieden auch ihre Richtung und Größe sein mag, jedenfalls in einem Punkte  $D_1$  oder  $D_2$  der Kraftrichtung von  $Q$  sich schneiden müssen. Da über die Lage  $D_1$  oder  $D_2$  dieses Schnittpunktes von vornherein nichts Bestimmtes angegeben werden kann, so muß man, ähnlich wie bei den Gewölben, annehmen, daß zunächst den Bedingungen des Gleichgewichtes in unendlich mannigfacher Weise genügt werden kann. Es wird nur so viel aus den Gleichgewichtsbedingungen mit Bestimmtheit sich angeben lassen, daß für die verticalen Componenten  $V_1$  und  $V_2$  der beiden Reactionen  $R$  die Beziehungen gelten:

$$V_1 + V_2 = Q \text{ und } V_1 a_1 = V_2 a_2,$$

wenn  $a_1$  und  $a_2$  die Abschnitte bedeuten, in welchen die ganze Spannweite  $A_1 A_2 = 2l$  durch die Richtung von  $Q$  getheilt wird. Ferner müssen die horizontalen Componenten  $H_1$  und  $H_2$  der Reactionen  $R$  einander gleich und entgegengesetzt sein. Während also unter allen Umständen, unabhängig von der Höhenlage des Schnittpunktes  $D$ , die Verticalkräfte durch:

$$V_1 = Q \frac{a_2}{2l} \text{ und } V_2 = Q \frac{a_1}{2l}$$

gegeben sind, kann die Horizontalkraft  $H$  jeden beliebigen Werth nach der einen oder anderen Richtung annehmen. Man erkennt aus der Figur, daß die Horizontalkraft um so kleiner ausfällt, je größer die Entfernung des besagten Schnittpunktes  $D$  von der Horizontalen  $A_1 A_2$  ist, und daß die Widerlager nach außen gepreßt oder nach innen gezogen werden, je nachdem der Schnittpunkt  $D$  oberhalb ( $D_1$ ) oder unterhalb ( $D_2$ ) der Horizontalen  $A_1 A_2$  gelegen ist. Ersteres ist bei den Sprengwerkbrücken, letzteres bei den Hängebrücken der Fall. Welche von den unendlich vielen möglichen Reactionen  $R_1$  und  $R_2$  in Wirklichkeit eintreten, läßt sich nur unter Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse bestimmen, worüber in dem folgenden Paragraphen ein Weiteres angegeben werden soll. Für die vorliegende Untersuchung soll zunächst eine Voraussetzung gemacht werden, durch welche die oben angegebene Unbestimmtheit gänzlich verschwindet. Es sei nämlich angenommen, daß der Träger aus zwei symmetrischen, in der Mitte  $C$  in einem Scharniere drehbar zusammenstoßenden Theilen bestehe, und ebenso möge vorausgesetzt werden, daß durch Anordnung von Scharnieren in den Rämpfern  $A_1$  und  $A_2$  die Angriffspunkte der ausgeübten Widerlagsreactionen festgelegt seien. Die Richtung dieser letzteren ist unter diesen Voraussetzungen unzweideutig dadurch bestimmt, daß die von der Belastung  $Q$  der linken Trägerhälfte in dem Berührungspunkte  $C$  auf die rechte Trägerhälfte ausgeübte Druckkraft auch durch den Punkt  $A_2$  gehen muß, weil sonst diese rechte Hälfte einer Drehung um  $A_2$  ausgesetzt wäre. Zieht man daher von

$A_2$  durch  $C$  eine Gerade, so erhält man in deren Durchschnittpunkte  $D$  mit der Richtung von  $Q$  denjenigen Punkt, durch welchen auch die Reactionsrichtung von  $A_1$  hindurchgehen muß. Es ist ohne Weiteres klar, daß der horizontale Druck in dem Scheitelscharniere  $C$  dieselbe Größe  $H$  haben muß, wie in den Rämpferscharnieren  $A_1$  und  $A_2$ , und daß auch hier genau wie bei den Gewölben ein constanter Horizontalschub auftreten muß.

Durch die Anwendung solcher Scharniere ist nicht nur die Möglichkeit geboten, die von den Widerlagern ausgeübten Reactionen in jedem Falle mit vollständiger Sicherheit nach den Regeln der Statik zu bestimmen, sondern diese Einwirkungen sind auch unabhängig gemacht von den Elasticitätsverhältnissen der Träger und Widerlager, sowie von den Schwankungen der Temperatur. Wie bedeutend aber durch diese Verhältnisse die Spannungen

in den Bogenträgern ohne Scharniere beeinflusst werden können, wird aus der Betrachtung des elastischen Bogenträgers im folgenden Paragraphen sich ergeben. Mit Rücksicht hierauf sind denn in der neueren Zeit vielfach derartige Scharnierbogenträger ausgeführt, und zwar können dieselben ebensowohl als Sprengwerksträger

Fig. 327.

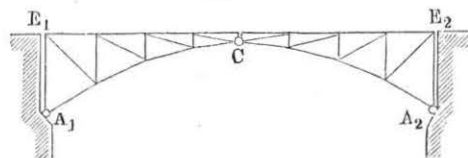
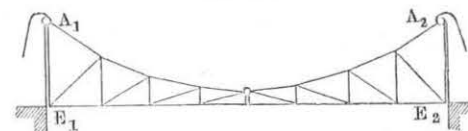


Fig. 328.



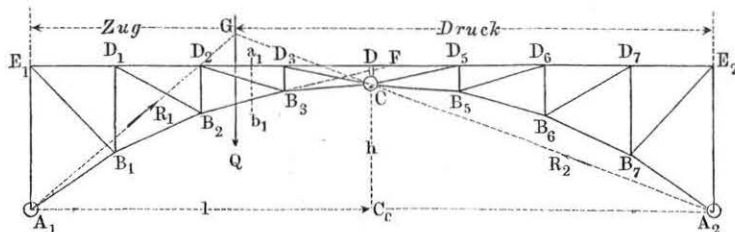
nach Fig. 327, wie auch als Hängewerksträger, Fig. 328, ausgeführt werden, je nachdem man die bogenförmige (richtiger polygonale) Gurtung unterhalb oder oberhalb der Fahrbahn  $E_1 E_2$  anbringt, welche in jedem Falle durch ein System von verticalen und diagonalen Zwischengliedern mit der Bogen-gurtung verbunden wird.

Die Untersuchung ist in beiden Fällen wesentlich dieselbe, sie möge im Folgenden für einen Sprengwerksträger, Fig. 329 (a. f. S.), angeführt werden.

Wenn der Träger  $A_1 C A_2$ , Fig. 329, nach der Gestalt eines Parabelsegmentes mit der Sehne  $A_1 A_2 = 2l$  und der Pfeilhöhe  $CC_0 = h$  gebildet ist, und man denkt denselben mit einer gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilten Last bedeckt, welche in einzelnen Punkten  $A_1 B_1 B_2 \dots A_2$  angreifen möge, so sind nach dem in §. 56 über die Parabelträger Gesagten in dem oberhalb des Bogens angebrachten Fachwerkssysteme

sowohl in der oberen Gurtung wie in den Diagonalen keinerlei Spannungen vorhanden, und nur die Verticalpfosten  $BD$  werden durch die von ihnen zu übertragenden Belastungen gedrückt. Wenn dagegen der Träger einer einseitigen Belastung durch die Verkehrslast ausgesetzt ist, so stellen sich auch in

Fig. 329.



den Fachwerksgliedern gewisse Zug- oder Druckspannungen ein, deren Maximalwerthe in ähnlicher Art zu bestimmen sind, wie dies für die vorstehend besprochenen Fachwerke geschehen ist. Man denkt sich zu dem Ende wieder durch den Träger einen Schnitt gelegt, welcher außer dem betreffenden Gliede nur noch zwei andere Theile trifft, deren Durchschnittpunkt als Momentenmittelpunkt für alle diejenigen Kräfte angesehen wird, die auf das zwischen dem gedachten Schnitte und dem Scheitelscharnier  $C$  gelegene Trägerstück wirken. So z. B. wählt man, dem Durchschnitte  $a_1 b_1$  entsprechend, den Punkt  $B_3$  als Momentenpunkt für das Stück  $a_1 D C b_1$ , um die Spannung  $U_3$  in  $D_2 D_3$  zu bestimmen, während für die untere Gurtung  $B_2 B_3$  der obere Knotenpunkt  $D_2$ , und für die Diagonalenspannung  $T_3$  in  $D_2 B_3$  der Punkt  $F$  als Momentenmittelpunkt gilt, in welchem die Richtungen von  $D_2 D_3$  und  $B_2 B_3$  sich treffen. Hierbei hat man denjenigen Belastungszustand zu Grunde zu legen, für welchen die gesuchte Spannung den größten Absolutwerth annimmt, und für diesen Belastungszustand die betreffenden Werthe der Horizontalkraft  $H$  und der Vertikalkraft  $V$  zu bestimmen, mit welchen die jenseitige Trägerhälfte im Scheitelscharnier  $C$  auf das betrachtete Trägerstück wirkt. Diese Rechnung ist also genau in der oben mehrfach gezeigten Art auszuführen, und es bleibt daher hier nur noch übrig, die für die einzelnen Constructionsglieder ungünstigsten Belastungszustände zu bestimmen.

Um diesen Zustand für irgend ein Stück der unteren Bogengurtung z. B.  $B_2 B_3$  zu ermitteln, ziehe man durch den betreffenden Momentenpunkt  $D_2$  und den Auflagerpunkt  $A_1$  eine Gerade, welche die durch  $A_2$  und  $C$  geführte Gerade in  $G$  schneiden mag. Es ist nun sofort deutlich, daß ein in der Verticalebene durch  $G$  wirkendes Gewicht  $Q$  auf das Trägerstück  $a_1 b_1 C$  eine Gesamtwirkung äußert, welche in die Richtung  $G D_2 A_1$  hineinfällt,

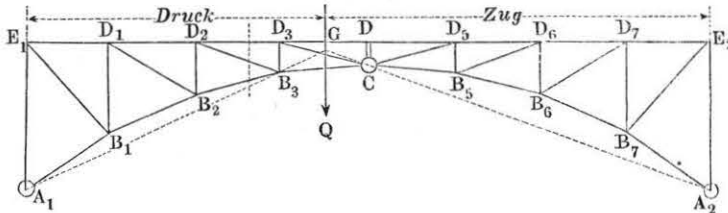
da diese Gesamtwirkung sich aus dem Gewichte  $Q$  selbst und aus der durch dasselbe in  $C$  hervorgerufenen Reaction  $R_2$  zusammensetzt, die Mittelfraft dieser beiden Kräfte aber der Reaction  $R_1$  des Auflagerpunktes  $A_1$  gleich und entgegengesetzt ist. Bei der Aufstellung der Momente in Bezug auf  $D_2$  fällt daher das Moment der gedachten Mittelfraft  $-R_1$  von  $Q$  und  $R_2$  gleich Null aus, d. h. die in  $G$  wirkende Belastung  $Q$  ist ohne Einfluß auf die Spannung  $U_3$  in dem Bogenstücke  $B_2 B_3$ . Wenn dagegen die Belastung  $Q$  zwischen diesem Punkte  $G$  und der Mitte  $C$  wirkt, so geht die gedachte Resultirende von  $Q$  und  $R_2$  unterhalb von  $D_2$  vorüber und sucht das betreffende Balkenstück  $C a_1 b_1$  rechtsläufig um  $D_2$  zu drehen, welche Drehung nur durch eine Druckspannung in  $B_2 B_3$  aufgehoben werden kann. Dasselbe gilt auch noch für eine Stellung der Last  $Q$  in irgend einem Punkte der rechten Trägerhälfte  $C A_2$ , für welche Stellung die gesammte Einwirkung von  $Q$  auf das betrachtete Balkenstück  $C a_1 b_1$  lediglich auf Erzeugung der nach der Richtung von  $C$  nach  $A_1$  wirkenden Kraft  $-R_1$  hinausläuft, welche Kraft ebenfalls eine Rechtsdrehung um  $D_2$  anstrebt, d. h. eine Druckspannung in dem Bogentheile  $B_2 B_3$  hervorruft. Wenn dagegen  $Q$  in einem Punkte links von  $G$  wirkt, so wird die durch  $Q$  auf das Trägerstück  $C a_1 b_1$  ausgeübte Einwirkung in jedem Falle eine Linksdrehung um  $D_2$  anstreben, sei es nun, daß  $Q$  zwischen  $G$  und  $D_2$  oder über  $D_2$  hinaus zwischen  $E_1$  und  $D_2$  wirkt. Im ersteren Falle, bei einer Stellung von  $Q$  zwischen  $G$  und  $D_2$ , ist die gedachte Einwirkung von  $Q$  als die Resultirende aus  $Q$  und  $R_2$ , also als  $-R_1$  zu denken, während bei einer Stellung von  $Q$  links von  $D_2$  die ganze Einwirkung aus der in der Richtung  $A_2 C$  wirkenden Reaction  $R_2$  des Auflagerpunktes  $A_2$  besteht. Jede Belastung des Trägers links von  $G$  bringt daher in dem Gurtungsstücke  $B_2 B_3$  Zugspannungen hervor. Man hat daher die Verticale durch  $G$  als die Grenze anzusehen zwischen denjenigen Belastungen, welche Zug- (links) und Druckspannungen (rechts) in dem Bogenstücke  $B_2 B_3$  hervorrufen, wie dies in der Figur angedeutet ist. Um daher für dieses Bogenstück die äußersten Spannungen zu ermitteln, hat man den Träger, außer durch das gleichmäßig vertheilte Eigengewicht  $p$ , einmal in der Strecke  $G E_1$  und einmal in der Strecke  $G E_2$  mit der beweglichen Last  $k$  bedeckt anzunehmen. Es ist übrigens ersichtlich, daß für die Bestimmung der Dimensionen nur diejenige Spannung  $U_2$  maßgebend sein wird, welche durch die Belastung der Druckabtheilung  $G E_2$  erzeugt wird, da durch die Belastung der Zugabtheilung  $G E_1$  die durch das Eigengewicht schon erzeugte Druckpressung in  $B_2 B_3$  ihrer Größe nach vermindert wird und also einen kleineren Werth annimmt als die größte Druckspannung.

In ganz derselben Weise lassen sich für die übrigen Glieder des Fachwerkes die Grenzen angeben, welche die auf Zug oder Druck wirkenden



Belastungen von einander trennen. So erhält man in Bezug auf die obere Gurtung  $D_2 D_3$ , Fig. 330, die Belastungsscheide in dem Durchschnittspunkte  $G$  zwischen der Reaktionsrichtung  $A_2 C$  und der Verbindungslinie von  $A_1$  und dem Momentenpunkte  $B_3$ . Eine der vorstehenden ganz ähnliche

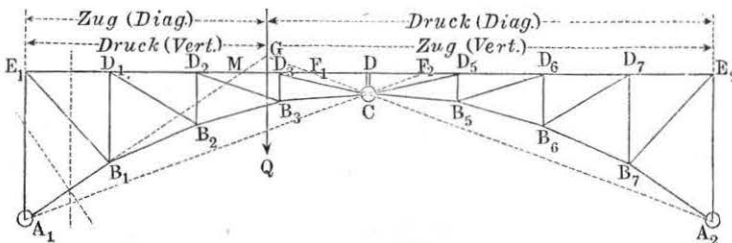
Fig. 330.



Betrachtung führt dann zu dem Resultate, daß jede Belastung links von  $G$  Druckspannungen, und jede Belastung rechts von  $G$  Zugspannungen in dem Gurtungsstücke  $D_2 D_3$  hervorruft. Man erhält daher die äußersten Spannungswerthe für  $O_3$ , wenn man einmal die eine, das andere Mal die andere Abtheilung mit  $k$  belastet denkt. Das Eigengewicht  $p$  kann hierbei ganz vernachlässigt werden, da nach dem vorstehend Bemerkten die gleichförmig vertheilte Belastung Spannungen in der oberen Gurtung gar nicht hervorruft. Aus dem letzteren Grunde müssen denn auch die beiden äußersten Werthe von  $O_3$  der Größe nach übereinstimmen, da diese entgegengesetzten Spannungen sich gegenseitig aufheben müssen, wenn beide Abtheilungen  $G E_1$  und  $G E_2$  belastet werden.

Für eine Diagonale wie  $B_1 E_1$  sowie für die Verticale  $A_1 E_1$ , Fig. 331, gilt der Durchschnitt  $M$  der oberen Gurtung mit derjenigen  $A_1 B_1$  als

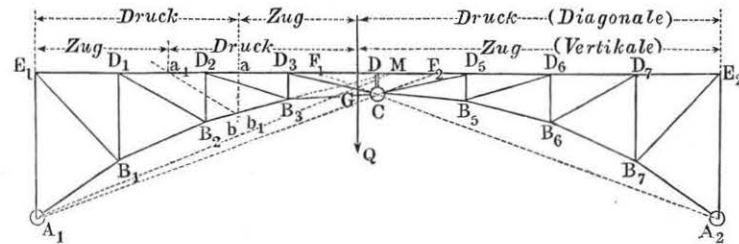
Fig. 331.



Momentenpunkt, und daher wird die Gerade  $A_1 M$  in ihrem Durchschnittspunkte  $G$  mit  $A_2 C$  diejenige Stelle ergeben, in welcher ein Gewicht  $Q$  wirken muß, um keine Spannung in  $B_1 E_1$  und  $A_1 E_1$  hervorzurufen. Es gilt daher  $GQ$  als Belastungsscheide, und man erkennt leicht, daß eine

Belastung des links gelegenen Theiles  $E_1 G_1$  in der Diagonale Zug- und in der Verticale Druckspannungen hervorbringen muß, während die rechts von  $G$  angebrachten Belastungen die entgegengesetzten Spannungen in der Diagonale und Verticale erzeugen. Diese Beziehung gilt aber nur so lange, als der Momentenmittelpunkt  $M$  außerhalb der beiden Punkte  $F_1$  und  $F_2$  gelegen ist, in denen die obere Gurtung  $E_1 E_2$  von den Reaktionsrichtungen  $A_1 C$  und  $A_2 C$  getroffen wird. Wenn dagegen der Momentenmittelpunkt  $M$  zwischen  $F_1$  und  $F_2$  fällt, wie dies für die Diagonale  $D_2 B_3$  und die Verticale  $D_2 B_2$ , Fig. 332, der Fall ist, so findet man zunächst wieder in dem

Fig. 332.



Durchschnitte  $G$  zwischen der Geraden  $A_1 M$  und derjenigen  $A_2 C$  eine Belastungsscheide, indem wieder eine Belastung  $Q$  in  $G$  keine Spannung, und jede Belastung rechts von  $G Q$  wie vorher eine Druckspannung in der Diagonale  $D_2 B_3$  und eine Zugspannung in dem Verticalstiele  $D_2 B_2$  hervorruft. In dem links von  $G Q$  befindlichen Trägerteile  $G E_1$  indessen stellt sich jetzt noch eine zweite Belastungsscheide ein, welche mit dem gefährten Schnitte, also für die Diagonale mit  $a b$  und für die Verticale mit  $a_1 b_1$  übereinstimmt; denn es ist ersichtlich, daß eine Belastung links von  $G Q$  das abgeschnittene Stück  $C a b$  bezw.  $C a_1 b_1$  um den Momentenpunkt  $M$  links- oder rechtsum zu drehen bestrebt ist, je nachdem diese Belastung rechts oder links von der bezüglichen Schnittstelle  $a$  und  $a_1$  wirkt.

Aus den der Figur eingeschriebenen Bezeichnungen ist die Art der Spannung ersichtlich, welche eine Belastung der betreffenden Abtheilung in dem zugehörigen Füllungsgrade hervorruft.

In ähnlicher Art hat man auch diejenige Belastung der Brücke festzustellen, bei welcher auf den Pfeiler  $BDE$ , Fig. 333 (a. f. S.), das größte Umsturmmoment wirkt. Der Horizontaldruck in  $A_2$  sucht offenbar diesen Pfeiler um die Kante  $E$  durch Rechtsdrehung umzukanten, während der Verticaldruck  $V_2$  ebensowohl wie der Druck  $R_1'$  des benachbarten Bogens  $A_1' C'$  die entgegengesetzte Drehungsrichtung um  $E$  haben, also für die Stabilität günstig wirken. Zieht man durch diesen Punkt  $E$  und  $A_2$  eine



Für die Diagonale  $B_3 D_2$  liegt der Momentenmittelpunkt auf der oberen Gurtung um 0,555 m rechts vom Scheitel und in einem normalen Abstände von der Diagonale gleich 1,5 m. Die beiden Belastungsscheiden liegen nach Fig. 332 im dritten und vierten Felde, man erhält daher den größten Zug in der Diagonale, wenn man nur  $D_3$  belastet, und da man hierfür das Eigengewicht unberücksichtigt lassen kann, so hat man:

$$-10V - 3H + 5 \cdot 2,5 \cdot 3 = 0,$$

$$-10V + 3H = 0,$$

woraus

$$V = 1,875 \text{ t}; H = 6,25 \text{ t},$$

und daher aus

$$T_{3\max} 1,5 = 5 \cdot (2,5 + 0,555) - V \cdot 0,555 - H \cdot 0,5 = +11,10 \text{ mt}$$

$$T_{3\max} = 7,4 \text{ t Zug}$$

folgt.  $T_{3\min}$  würde man bei Belastung der übrigen Knotenpunkte zu

$$T_{3\min} = -7,4 \text{ t Druck}$$

erhalten.

Für den Verticalstiel  $D_2 B_2$  gilt derselbe Momentenmittelpunkt wie für die Diagonale, die beiden Belastungsscheiden liegen aber hier nach Fig. 332 im zweiten und vierten Felde, daher die beiden Knotenpunkte  $D_2$  und  $D_3$  das eine Mal allein belastet, das andere Mal unbelastet anzunehmen sind. Wenn  $D_2$  und  $D_3$  belastet sind, erhält man die größte Druckkraft  $P_{3\min}$  und zwar ist:

$$-10V - 3H + 2 \cdot 2,5 + 7 \cdot 2,5 (2 + 3) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2,5 \cdot 4 = 0;$$

$$-10V + 3H - 2 \cdot 2,5 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) = 0;$$

$$V = 3,125 \text{ t}; H = 23,75 \text{ t};$$

daher

$$P_{3\min} 5,555 = -1 \cdot 0,555 - 7 (3,055 + 5,555) + H \cdot 0,5 + V \cdot 0,555,$$

$$P_{3\min} = -8,5 \text{ t Druck}.$$

Belastet man die anderen Knotenpunkte, so hat man aus:

$$10V - 3H + 7 \cdot 2,5 + 2 \cdot 2,5 (2 + 3) + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2,5 \cdot 4 = 0,$$

$$10V + 3H - 7 \cdot 2,5 \left(1 + 2 + 3 + \frac{4}{2}\right) = 0;$$

$$V = 3,125 \text{ t}; H = 36,25 \text{ t};$$

womit man

$$P_{3\max} 5,555 = H \cdot 0,5 - V \cdot 0,555 - \frac{1}{2} 7 \cdot 0,555 - 2 (3,055 + 5,555),$$

und hieraus

$$P_{3\max} = -0,5 \text{ t Druck}$$

erhält.

§. 65. Elastische Bogenträger. Um die Verhältnisse der Bogenträger ohne Scheitelscharnier zu prüfen, welche Prüfung, wie vorstehend bemerkt wurde, nur unter Berücksichtigung der Elasticitätsverhältnisse möglich ist, hat man zunächst die Bedingungen für die Biegung eines krummen Balkens über-

haupt festzustellen. Hierzu kann die allgemeine Gleichung der elastischen Linie für den geraden Balken dienen, welche in §. 35, II durch  $\varrho = \frac{TE}{M}$  ausgedrückt wurde, wenn  $E$  den Elasticitätsmodul des Materials bedeutet und unter  $T$  das Trägheitsmoment des Querschnitts, sowie unter  $\varrho$  der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie für irgend welche Stelle des Balkens verstanden wird, für welche das Biegemoment der äußeren Kräfte gleich  $M$  ist. Bezieht man die Balkenaxe auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem und bezeichnet mit  $\alpha$  den Winkel, welchen die Balkenaxe im Punkte  $x, y$  mit der horizontalen  $X$ -Axe bildet, so kann man bekanntlich das Balkenelement an dieser Stelle durch  $\partial s = \varrho \partial \alpha$  ausdrücken, worin  $\partial \alpha$  den Contingenzwinkel oder die Aenderung der Neigung  $\alpha$  in zwei unendlich nahe gelegenen Punkten  $x, y$  und  $x + \partial x, y + \partial y$  bedeutet.

Hieraus folgt  $\frac{1}{\varrho} = \frac{\partial \alpha}{\partial s}$  und die Gleichung der elastischen Linie schreibt sich daher auch:

$$M = TE \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1)$$

Diese zunächst für Balken mit ursprünglich gerader Axe gültige Gleichung kann auch noch genau genug für die schwach gekrümmten Balken angewendet werden, wie sie bei Bogenbrücken vorzukommen pflegen, vorausgesetzt, daß man hier unter dem Werthe  $\partial \alpha = \frac{\partial s}{\varrho}$  ebenfalls die Veränderung der Neigung versteht, welche durch das Biegemoment in dem betreffenden Elemente hervorgerufen wird.

Es möge etwa ein an dem einen Ende  $C$  horizontal eingeklemmter Balken, Fig. 334, von Hause aus die gekrümmte Avenform  $ABC$  haben, und

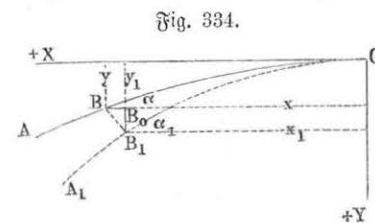


Fig. 334.

unter dem Einflusse von irgend welchen biegenden Kräften in die Form  $A_1 B_1 C$  übergehen, so gilt für irgend ein Element von der Länge  $\partial s$  in  $B$ , für welches die Neigung der Tangente gegen die horizontale  $X$ -Axe ursprünglich durch  $\alpha$

und in der nachherigen Stellung durch  $\alpha_1$  bezeichnet sein mag:

$$M = TE \frac{\partial \alpha_1 - \partial \alpha}{\partial s} = TE \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho} \right), \cdot \cdot \cdot (2)$$

wenn  $\varrho$  und  $\varrho_1$  die Krümmungshalbmesser in  $B$  und  $B_1$  vor und nach der Biegung bedeuten. Durch Integration der Gleichung (2) erhält man:



$$\alpha_1 - \alpha = \int \frac{M}{TE} \partial s, \dots \dots \dots (3)$$

welche Gleichung für irgend einen Punkt  $B$  die Änderung  $\alpha_1 - \alpha$  in der Neigung der Tangente gegen den Horizont ergibt, sobald man das Integral zwischen den Grenzen  $s = 0$  in  $C$  und  $s$  in  $B$  vornimmt.

Bezeichnet man ferner mit  $x$  und  $y$  die Ordinaten des Punktes  $B$  und mit  $x_1$  und  $y_1$  diejenigen des Punktes  $B_1$ , so kann man die horizontale Verschiebung  $B_0 B = x_1 - x$  und die verticale Senkung  $B_0 B_1 = y_1 - y$  in folgender Weise berechnen. Setzt man bei der immer nur geringen Größe der Neigungsänderung  $\alpha_1 - \alpha$  annähernd:

$$\sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = \frac{\alpha_1 - \alpha}{2},$$

$$\sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} = \sin \alpha$$

und

$$\cos \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} = \cos \alpha,$$

so erhält man aus den bekannten trigonometrischen Formeln:

$$\sin \alpha_1 - \sin \alpha = 2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = \cos \alpha \cdot (\alpha_1 - \alpha)$$

$$= \cos \alpha \int \frac{M}{TE} \partial s;$$

$$\cos \alpha_1 - \cos \alpha = -2 \sin \frac{\alpha_1 + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha_1 - \alpha}{2} = -\sin \alpha \cdot (\alpha_1 - \alpha)$$

$$= -\sin \alpha \int \frac{M}{TE} \partial s.$$

Wenn hierin

$$\sin \alpha = \frac{\partial y}{\partial s}, \sin \alpha_1 = \frac{\partial y_1}{\partial s}$$

und

$$\cos \alpha = \frac{\partial x}{\partial s}, \cos \alpha_1 = \frac{\partial x_1}{\partial s}$$

eingeführt wird, so findet man

$$\frac{\partial y_1 - \partial y}{\partial x} = \int \frac{M}{TE} \partial s = \alpha_1 - \alpha \dots \dots \dots (4)$$

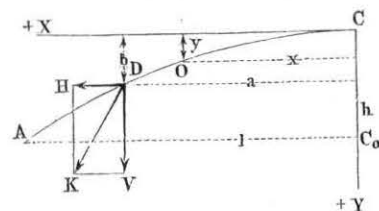
$$\frac{\partial x - \partial x_1}{\partial y} = \int \frac{M}{TE} \partial s = \alpha_1 - \alpha \dots \dots \dots (5)$$

Diese Gleichungen können, wenn sie integriert werden, dazu dienen, in jedem gegebenen Falle, d. h. bei bestimmter Form und Belastung des Bal-

kens, die Senkung und horizontale Verschiebung für jeden Punkt des Balkens zu bestimmen.

In den meisten Fällen der Praxis können die immer sehr flachen Bögen der Brückenträger als parabelförmige angesehen werden, unter welcher Voraussetzung im Folgenden die Untersuchung geführt werden möge\*).

Fig. 335.



Es sei  $ABC$ , Fig. 335, ein parabolischer, im Scheitel  $C$  horizontal eingespannter Balken von der horizontalen Ausladung  $AC_0 = l$  und der Pfeilhöhe  $CC_0 = h$ , dessen Scheiteltgleichung also durch

$$y = \frac{h}{l^2} x^2 = n x^2 \dots \dots \dots (6)$$

dargestellt ist, wenn  $n = \frac{h}{l^2}$  gesetzt wird. Hieraus folgt zunächst

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2 n x, \dots \dots \dots (7)$$

und annähernd

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial x \sqrt{1 + 4 n^2 x^2} = (1 + 2 n^2 x^2) \partial x, \dots \dots \dots (8)$$

da für die hier in Betracht kommenden Fälle  $n^2 x^2 = \frac{h^2 x^2}{l^4}$  nur klein ist gegen die Einheit.

Setzt man nun für den Balken überall gleiche Querschnitte, also  $T$  constant voraus, so geht die Gleichung (3) mit dem aus (8) folgenden Werthe von  $\partial s$  über in:

$$\alpha_1 - \alpha = \frac{1}{TE} \int M (1 + 2 n^2 x^2) \partial x \dots \dots \dots (9)$$

Es sei der Balken in irgend einem Punkte  $D$ , dessen Ordinaten  $a$  und  $b = n a^2$  sind, durch eine beliebige Kraft  $K$  angegriffen, deren verticale und horizontale Componenten durch  $V$  und  $H$  ausgedrückt sein mögen, wobei diese Componenten positiv oder negativ genommen sein sollen, je nachdem sie nach den Richtungen der positiven oder negativen Coordinatenachsen wirksam sind. Für diesen Fall hat man das Biegemoment für irgend einen

\*) Handelt es sich um die Untersuchung anders geformter krummer Balken, z. B. kreisförmiger, so ändert sich die Rechnung nur insofern, daß anstatt der Parabelgleichung (6) die zugehörige Gleichung der Trägerform zu Grunde zu legen ist.

zwischen  $D$  und  $C$  gelegenen Punkt, z. B.  $O$ , mit den Coordinaten  $x$  und  $y = nx^2$  zu:

$$M = V(a-x) - H(b-y) = V(a-x) - Hn(a^2-x^2). \quad (10)$$

Mit diesem Werthe von  $M$  liefert daher die Gleichung (9):

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha &= \frac{1}{TE} \int [V(a-x) - Hn(a^2-x^2)] (1 + 2n^2x^2) dx \\ &= \frac{V}{TE} \left( ax - \frac{x^2}{2} + 2n^2 \frac{ax^3}{3} - 2n^2 \frac{x^4}{4} \right) - \frac{H}{TE} n \left( a^2x - \frac{x^3}{3} \right. \\ &\quad \left. + 2n^2 \frac{a^2x^3}{3} - 2n^2 \frac{x^5}{5} \right) = \frac{\mathfrak{B}}{TE} - \frac{\mathfrak{H}}{TE} \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

wenn man der Kürze wegen die beiden Factoren von  $\frac{1}{TE}$  mit  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{H}$  bezeichnet.

Um die verticale und horizontale Verschiebung des Punktes  $O$  zu ermitteln, dienen die Gleichungen (4) und (5), wenn man darin für  $\alpha_1 - \alpha$  den Ausdruck aus (11) einführt und zwischen den Grenzen 0 für  $C$  und  $x$  für  $O$  integrirt, wobei man nach (7)  $\partial y = 2nx \partial x$  zu setzen hat. Danach wird:

$$\begin{aligned} y_1 - y &= \frac{V}{TE} \left( \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{6} + n^2 \frac{ax^4}{6} - n^2 \frac{x^5}{10} \right) - \frac{H}{TE} n \left( \frac{a^2x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right. \\ &\quad \left. + n^2 \frac{a^2x^4}{6} - n^2 \frac{x^6}{15} \right) = \frac{\mathfrak{B}_1}{TE} - \frac{\mathfrak{H}_1}{TE} = \eta_x \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \frac{V}{TE} 2n \left( \frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{8} + 2n^2 \frac{ax^5}{15} - n^2 \frac{x^6}{12} \right) - \frac{H}{TE} 2n^2 \left( \frac{a^2x^3}{3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^5}{15} + 2n^2 \frac{a^2x^5}{15} - 2n^2 \frac{x^7}{35} \right) = \frac{\mathfrak{B}_2}{TE} - \frac{\mathfrak{H}_2}{TE} = \xi_x \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (11) bis (13) gelten nur für das Trägerstück zwischen  $C$  und dem Angriffspunkte  $D$  der Kraft  $K$ , da auf das freie Stück  $AD$  ein Biegemoment  $M$  gar nicht ausgeübt wird. Mit  $x=a$  erhält man aus den vorstehenden Gleichungen die Richtungsänderung und die verticale sowie die horizontale Verschiebung in dem Angriffspunkte  $D$  der Kraft  $K$  zu:

$$\varphi_a = \alpha_1 - \alpha = \frac{V}{TE} \left( \frac{a^2}{2} + n^2 \frac{a^4}{6} \right) - \frac{H}{TE} n \left( 2 \frac{a^3}{3} + n^2 \frac{4a^5}{15} \right) \dots \dots (11^a)$$

$$\eta_a = y_1 - y = \frac{V}{TE} \left( \frac{a^3}{3} + n^2 \frac{a^5}{15} \right) - \frac{H}{TE} n \left( 5 \frac{a^4}{12} + n^2 \frac{a^6}{10} \right) \dots \dots (12^a)$$

$$\xi_a = x - x_1 = \frac{V}{TE} n \left( 5 \frac{a^4}{12} + n^2 \frac{a^6}{10} \right) - \frac{H}{TE} n^2 \left( 8 \frac{a^5}{15} + n^2 \frac{16a^7}{105} \right) (13^a)$$

Wenn man wegen der Kleinheit von  $n$  in vorstehenden Formeln die Glieder in den Klammern, welche mit  $n^2$  behaftet sind, gegen die anderen vernachlässigt, so erhält man annähernd:

$$\varphi_a = \frac{V}{TE} \frac{a^2}{2} - \frac{H}{TE} 2n \frac{a^3}{3} \dots \dots \dots (11^b)$$

$$\eta_a = \frac{V}{TE} \frac{a^3}{3} - \frac{H}{TE} 5n \frac{a^4}{12} \dots \dots \dots (12^b)$$

$$\xi_a = \frac{V}{TE} 5n \frac{a^4}{12} - \frac{H}{TE} 8n^2 \frac{a^5}{15} \dots \dots \dots (13^b)$$

Für das freie Ende  $A$  des Trägers ist die Richtungsänderung  $\alpha_1 - \alpha$  der Balkentangente durch denselben Werth  $\varphi_a$  aus (11<sup>a</sup>), wie für den Angriffspunkt  $D$  der Kraft  $K$  ausgedrückt, da das Balkenstück  $AD$  einer Biegung nicht unterworfen ist. Dagegen setzt sich die Senkung  $\eta$  des Punktes  $A$  zusammen aus derjenigen  $\eta_a$  des Punktes  $D$  und einem zweiten Betrage, welcher aus der Richtungsänderung um  $\varphi_a$  in  $D$  hervorgeht und für den Endpunkt  $A$  wegen des horizontalen Abstandes  $l - a$  desselben von  $D$  den Werth  $(l - a) \varphi_a$  hat. Folglich hat man für das freie Ende  $A$  die verticale Senkung

$$\eta = \eta_a + (l - a) \varphi_a \dots \dots \dots (14)$$

und ebenso findet sich die horizontale Verschiebung wegen des verticalen Abstandes  $h - b = n(l^2 - a^2)$  zwischen  $D$  und  $A$  zu:

$$\xi = \xi_a + n(l^2 - a^2) \varphi_a \dots \dots \dots (15)$$

Um auch die Biegungsverhältnisse für einen gekrümmten Balken zu ermitteln, welcher durch eine gleichmäßig über seine Horizontalprojection ausgebreitete Last  $q$  pro Längeneinheit angegriffen wird, hat man in obige Ausdrücke  $H = 0$  und für  $V$  das Lastelement  $q \partial x$  einzuführen. Setzt man dann für den Abstand  $a$  allgemein die Abscisse  $x$  und integrirt zwischen den Werthen  $x_1$  und  $x_2$ , zwischen denen die Last ausgebreitet ist, so erhält man die entsprechenden Gleichungen. Es sollen hier nur die Verschiebungen des freien Endes  $A$  unter der Voraussetzung bestimmt werden, daß der Träger seiner ganzen Länge nach, also zwischen den Abscissen  $x_1 = 0$  und  $x_2 = l$  mit der Last  $ql$  bedeckt ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man die Verschiebungen des freien Endes  $A$  aus den Gleichungen (14) und (15), wenn man darin die Werthe aus (11<sup>a</sup>) bis (13<sup>a</sup>) mit  $x$  anstatt  $a$  einführt. Danach folgt die verticale Verschiebung aus (14):

$$\begin{aligned} \eta &= \int_0^l \frac{q \partial x}{TE} \left( \frac{x^3}{3} + n^2 \frac{x^5}{15} \right) + \int_0^l (l - x) \frac{q \partial x}{TE} \left( \frac{x^2}{2} + n^2 \frac{x^4}{6} \right) \\ &= \frac{q}{TE} \left( \frac{l^4}{8} + n^2 \frac{l^6}{60} \right) \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

und die horizontale Verschiebung aus (15):

$$\xi = \int_0^l \frac{q \partial x}{TE} n \left( 5 \frac{x^4}{12} + n^2 \frac{x^6}{10} \right) + \int_0^l n (l^2 - x^2) \frac{q \partial x}{TE} \left( \frac{x^2}{2} + n^2 \frac{x^4}{6} \right) \\ = \frac{q}{TE} n \left( \frac{3l^5}{20} + n^2 \frac{l^7}{42} \right) \quad (17)$$

Die hier entwickelten Gleichungen krümmen einseitig eingeklemmter Balken können nun dazu dienen, die Verhältnisse der Biegung bogenförmiger Träger

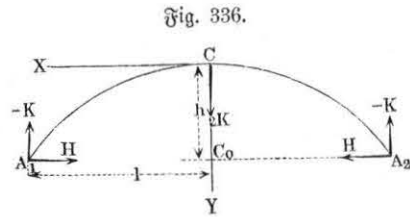


Fig. 336.

festzustellen. Zu dem Ende sei  $A_1CA_2$ , Fig. 336, die Mittellinie eines parabolischen Balkens von der Spannweite  $A_1A_2 = 2l$  und der Höhe in der Mitte  $CC_0 = h$ , dessen Gleichung also wieder durch (6):

$$y = \frac{h}{l^2} x^2 = n x^2$$

gegeben ist. Es sei zunächst vorausgesetzt, daß der Träger in  $A_1$  und  $A_2$  auf horizontalen Stützflächen ohne Reibung ruhe, so daß ein seitliches Verschieben der Stützpunkte möglich ist, und daß der Träger in der Mitte mit einem Gewicht  $2K$  belastet sein soll. Unter dieser Voraussetzung wird in jedem Fußpunkte  $A_1$  und  $A_2$  durch die feste Stütze eine vertical aufwärts gerichtete Reaction  $V = -K$  gegen den Träger geäußert, wogegen eine horizontale Reaction wegen der angenommenen Verschieblichkeit der Enden nicht auftritt. Man denke sich nunmehr den Träger zur Hälfte  $CA_2$  in eine feste Wand eingeschlossen, was hier deswegen angängig ist, ohne an den Bedingungen des Gleichgewichtes etwas zu ändern, weil der Träger wegen der symmetrischen Anordnung immer im Scheitel  $C$  eine horizontale Tangente beibehält. Hierdurch ist die Untersuchung des Trägers auf die vorstehend durchgeführte eines einseitig bei  $C$  horizontal eingeklemmten Balkens  $A_1C$  zurückgeführt, welcher am freien Ende  $A_1$ , also am Hebelarme  $l$ , einer Verticalkraft  $-K$  ausgesetzt ist. Man erhält daher ohne Weiteres die verticale und horizontale Verschiebung jedes Fußpunktes  $A_1$  und  $A_2$  in Bezug auf den fest vorausgesetzten Scheitel  $C$ , wenn man in (12<sup>a</sup>) und (13<sup>a</sup>) für  $V$  den Werth  $-K$ , und  $a = l$  sowie  $H = 0$  setzt, zu:

$$\eta = -\frac{K}{TE} \left( \frac{l^3}{3} + n^2 \frac{l^5}{15} \right) = -\frac{K}{TE} \left( \frac{l^3}{3} + \frac{h^2 l^2}{15} \right) \quad (18)$$

$$\xi = -\frac{K}{TE} n \left( \frac{5l^4}{12} + n^2 \frac{l^6}{10} \right) = -\frac{K}{TE} \left( \frac{5h l^2}{12} + \frac{h^3}{10} \right) \quad (19)$$

Das negative Vorzeichen von  $\xi = x - x_1$  deutet an, daß die Schenkel  $A_1$  und  $A_2$  nach außen treten und das von  $\eta = y_1 - y$  bedeutet eine Verminderung des verticalen Abstandes zwischen  $A_1A_2$  und  $C$ , d. h. also eine Senkung des Scheitels  $C$  um  $\eta$ .

Nimmt man an, daß der Bogen  $A_1CA_2$  gleichmäßig mit  $q$  pro Längeneinheit der Horizontalprojection belastet ist, so erhält man die Verschiebungen, wenn man zu den durch diese gleichförmig vertheilte Last nach (16) und (17) sich ergebenden Werthen

$$\eta = \frac{q}{TE} \left( \frac{l^4}{8} + \frac{h^2 l^2}{60} \right)$$

und

$$\xi = \frac{q}{TE} \left( \frac{3h l^3}{20} + \frac{h^3 l}{42} \right)$$

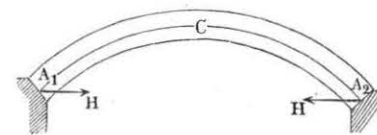
diejenigen Beträge hinzufügt, welche durch die verticalen Stützreactionen  $-q l$  in  $A_1$  und  $A_2$  erzeugt werden. Danach findet sich mit Bezug auf (12<sup>a</sup>) und (13<sup>a</sup>):

$$\eta = \frac{q}{TE} \left( \frac{l^4}{8} + \frac{h^2 l^2}{60} \right) - \frac{q l}{TE} \left( \frac{l^3}{3} + n^2 \frac{l^5}{15} \right) \\ = -\frac{q}{TE} \left( \frac{5 l^4}{24} + \frac{h^2 l^2}{20} \right) \quad (20)$$

$$\xi = \frac{q}{TE} \left( \frac{3h l^3}{20} + \frac{h^3 l}{42} \right) - \frac{q l}{TE} n \left( \frac{5 l^4}{12} + n^2 \frac{l^6}{10} \right) \\ = -\frac{q}{TE} \left( \frac{4h l^3}{15} + \frac{8h^3 l}{105} \right) \quad (21)$$

Wenn nun aber vorausgesetzt wird, daß der Bogenträger sich mit seinen Fußpunkten  $A_1$  und  $A_2$  gegen unverschiebbare Widerlager, Fig. 337, stemmt,

Fig. 337.



so hat man sich zu denken, daß von jedem dieser Widerlager außer der verticalen Reaction  $V$  noch ein horizontaler nach innen gerichteter Schub  $H$  auf den Bogenschwung ausgeübt wird, welcher genau in sol-

cher Größe auftritt, daß die durch denselben hervorgerufene horizontale Verschiebung gerade die oben durch (19) und (21) berechneten Verschiebungen  $\xi$  aufhebt, welche durch die Belastung  $2K$  bzw.  $2ql$  nach außen veranlaßt werden. Durch die Horizontalkraft  $H$  in  $A_1$  wird nun eine horizontale Verschiebung des Endes  $A_1$  erzeugt, welche sich aus (13<sup>a</sup>) mit  $V = 0$  zu



$$\xi = \frac{H}{TE} \left( \frac{8 h^2 l}{15} + \frac{16 h^4}{105 l} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot (22)$$

bestimmt. Daher hat man, um die Größe des horizontalen Widerlagerdruckes  $H$  zu ermitteln, einfach den Werth (22) gleich demjenigen (19) oder (21) zu setzen, je nachdem der Bogen im Scheitel  $C$  durch  $2K$  oder über der ganzen Länge gleichmäßig durch  $2ql$  belastet ist. Diese Gleichsetzung liefert bei der Belastung des Scheitels aus (22) und (19) den gesuchten Horizontalschub:

$$H = -K \frac{\frac{5}{12} h l^2 + \frac{h^3}{10}}{\frac{8}{15} h^2 l + \frac{16}{105} \frac{h^4}{l}} = \text{rot} - K \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28 l} \right), \cdot \cdot (23)$$

und bei gleichmäßig vertheilter Belastung aus (22) und (21):

$$H = -q \frac{\frac{4}{15} h l^3 + \frac{8}{105} h^3 l}{\frac{8}{15} h^2 l + \frac{16}{105} \frac{h^4}{l}} = -q \frac{l^2}{2h} \cdot \cdot \cdot (24)$$

Die Horizontalkraft  $H$ , welche in dem Falle einer Belastung des Scheitels durch  $2K$  mittelst der Gleichung (23) bestimmt ist, bringt für sich allein eine verticale Verschiebung hervor, die nach (12<sup>a</sup>) sich bestimmt zu:

$$\eta = \frac{K}{TE} \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28 l} \right) \left( 5 \frac{h l^2}{12} + \frac{h^3}{10} \right).$$

Addirt man daher diese Verticalverschiebung algebraisch zu der durch (18) gegebenen, welche durch die Belastung  $2K$  des Scheitels und die verticalen Stützreactionen in  $A_1$  und  $A_2$  allein hervorgerufen werden, so erhält man die Senkung des Scheitels:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{K}{TE} \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28 l} \right) \left( 5 \frac{h l^2}{12} + \frac{h^3}{10} \right) - \frac{K}{TE} \left( \frac{l^3}{3} + \frac{h^2 l}{15} \right) \\ &= -\frac{K}{TE} \left( \frac{l^3}{128} + \frac{23 h l^2}{6720} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot (25) \end{aligned}$$

oder für die meisten Fälle genau genug zu:

$$\eta = -\frac{K}{TE} \frac{l^3}{128} \cdot \cdot \cdot \cdot (25^a)$$

Das negative Zeichen deutet auf eine Verringerung des verticalen Abstandes  $h$  zwischen dem Scheitel und den Rämpfern, d. h. auf eine Senkung des Scheitels. Vergleicht man diese Senkung mit derjenigen eines

geraden Balkens von der Länge  $L = 2l$  und der Belastung  $Q = 2K$  in der Mitte, für welchen die Durchbiegung nach §. 35 zu:

$$f = \frac{Q L^3}{48 TE} = \frac{2K (2l)^3}{48 TE} = \frac{K l^3}{3 TE}$$

ist, so erkennt man, daß die Senkung des Bogenscheitels nur  $\frac{3}{128}$  von der Durchbiegung des geraden Balkens beträgt.

Wenn man in gleicher Art für einen durch die gleichmäßig vertheilte Last  $2ql$  angegriffenen Bogenträger die durch den Horizontalschub  $H = -q \frac{l^2}{2h}$  allein erzeugte verticale Verschiebung  $\eta$  des Fußpunktes nach (12<sup>a</sup>) bestimmt, so erhält man diese Größe zu:

$$\eta = \frac{q}{TE} \frac{l^2}{2h} \left( 5 \frac{h l^2}{12} + \frac{h^3}{10} \right) = \frac{q}{TE} \left( \frac{5 l^4}{24} + \frac{h^2 l^2}{20} \right), \cdot \cdot (26)$$

also gleich und entgegengesetzt derjenigen Verschiebung, welche durch die Belastung  $2ql$  und die verticalen Stützreactionen nach (20) erzeugt werden, so daß man daraus schließt, daß in diesem Falle der Scheitel durch die Biegung gar keiner Senkung ausgesetzt ist. In diesem Falle ist überhaupt das Biegemoment in allen Punkten des Trägers gleich Null, indem in jedem Querschnitte die Mittellkraft der äußeren Kräfte in die Richtung der Tangente an die Parabel hineinfällt. Der Bogen verhält sich daher genau so wie die parabolische Gurtung eines Parabelträgers (§. 56), oder wie eine parabolische Kette mit gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilter Belastung. Für diese Belastungsart ist die parabolische Trägerform daher eine sogenannte Gleichgewichtscurve, und die ganze Formänderung des Bogens reducirt sich auf diejenige, die durch die Verklürzung entsteht, welcher der Bogen in Folge der Druckspannungen ausgesetzt ist.

Um auch die Wirkung einer einseitigen Belastung des Bogenträgers zu ermitteln, sei der Träger zunächst in zwei gleichweit um  $a$  vom Scheitel  $C$

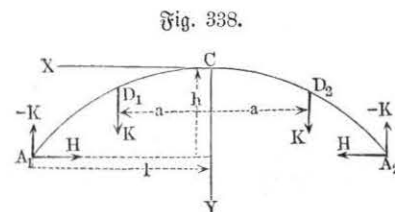


Fig. 338.

abstehenden Punkten  $D_1$  und  $D_2$ , Fig. 338, mit je  $K$  belastet. Für diesen Fall, in welchem die verticale Stützreaction in  $A_1$  und  $A_2$  jeweils  $-K$  beträgt, bestimmt sich der horizontale Schub  $H$  in gleicher Weise wie vorstehend. Denkt man nämlich

wieder die eine Hälfte  $CA_2$  des Trägers in eine feste Wand eingeschlossen, so hat man die horizontale Verschiebung, welche das Balkenende  $A_1$  durch

die Belastung  $K$  in  $D_1$  erleidet, gleich und entgegengesetzt derjenigen zu setzen, welche die Reactionen  $-K$  und  $-H$  in  $A_1$  hervorbringen. Man findet diese von  $K$  verursachte Verschiebung von  $A_1$  nach (15), wenn man die angenäherten Formeln (11<sup>b</sup>) und (13<sup>b</sup>) zu Grunde legt zu:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_a + n(l^2 - a^2) \varphi_a = \frac{K}{TE} 5n \frac{a^4}{12} + n(l^2 - a^2) \frac{K}{TE} \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{K}{TE} n \left( \frac{l^2 a^2}{2} - \frac{a^4}{12} \right), \dots \dots \dots (27)\end{aligned}$$

während durch  $-K$  und  $-H$  in  $A_1$  wirkend eine horizontale Verschiebung erzeugt wird, die aus (13<sup>b</sup>), wenn  $l$  für  $a$  gesetzt wird, sich berechnet zu:

$$\xi = -\frac{K}{TE} 5n \frac{l^4}{12} + \frac{H}{TE} 8n^2 \frac{l^5}{15} \dots \dots \dots (28)$$

Setzt man die Summe von (27) und (28) gleich Null, so folgt daraus der Horizontalschub:

$$\begin{aligned}H &= \frac{15}{8n^2 l^5} K \left( \frac{5nl^4}{12} - \frac{n l^2 a^2}{2} + \frac{n a^4}{12} \right) \\ &= \frac{5}{32nl} K \left( 5 - 6 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4} \right), \dots \dots \dots (29)\end{aligned}$$

Es ist nun leicht ersichtlich, daß zu diesem Horizontalschube jede der beiden in  $D_1$  und  $D_2$  angebrachten Belastungen  $K$  die Hälfte des Betrages liefert. Dies folgt daraus, daß die Belastung  $K$  in  $D_1$  auf  $A_1$  denselben Einfluß ausüben muß, wie die Belastung  $K$  in  $D_2$  ihn auf  $A_2$  äußert, und daraus, daß die Horizontalkräfte stets in beiden Widerlagern in gleicher Größe auftreten.

Wenn daher der Bogen nur in einem Punkte der einen Hälfte, etwa in  $D_1$ , durch die Last  $K$  angegriffen wird, so ist der Horizontalschub der Widerlager auch nur halb so groß, als (29) anzeigt, daher hat man für diesen Fall:

$$H = \frac{5}{64nl} K \left( 5 - 6 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4} \right) \dots \dots \dots (30)$$

Selbstredend sind die verticalen Reactionen der beiden Widerlager für diesen Fall der einseitigen Belastung nun nicht mehr von gleicher Größe, sondern durch:

$$V_1 = K \frac{l+a}{2l} \text{ für } A_1 \dots \dots \dots (31)$$

und

$$V_2 = K \frac{l-a}{2l} \text{ für } A_2 \dots \dots \dots (32)$$

gegeben.

Wenn man in (30) für  $K$  im Abstände  $a$  von der Mitte die Belastung  $q \partial x$  eines Elementes im Abstände  $x$  einführt, so hat man für  $H$  den durch

dieses Element erzeugten Betrag  $\partial H$  zu setzen, und man erhält daher für einen Bogenträger, welcher nach Fig. 339 einerseits zwischen den Abscissen  $x_1$  und  $x_2$  gleichförmig mit  $q$  ( $x_2 - x_1$ ) belastet ist, durch Integration den Horizontalschub:

$$\begin{aligned}H &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{5}{64nl} q \partial x \left( 5 - 6 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} \right) \\ &= \frac{5}{64nl} q \left[ 5(x_2 - x_1) - 2 \frac{x_2^3 - x_1^3}{l^2} + \frac{1}{5} \frac{x_2^5 - x_1^5}{l^4} \right], \dots (30^a)\end{aligned}$$

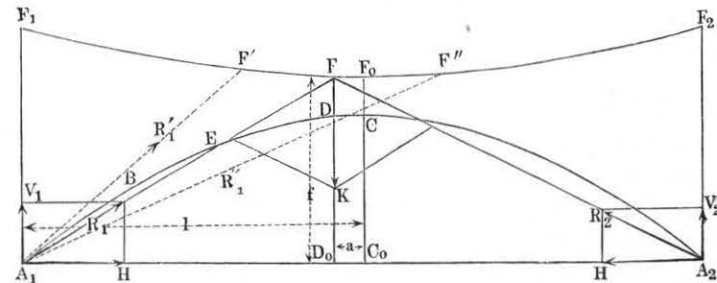
welcher Ausdruck für den Fall der Belastung einer ganzen Bogenhälfte, also mit  $x_1 = 0$  und  $x_2 = l$ , entsprechend der Gleichung (24) in

$$H = \frac{5}{64nl} q \left( 5l - 2l + \frac{1}{5} l \right) = q \frac{l^2}{4h}$$

übergeht.

Denkt man sich für den Bogenträger  $A_1 C A_2$ , Fig. 340, welcher in  $D$  durch die Belastung  $K$  angegriffen wird, die Horizontalkraft  $H$  berechnet,

Fig. 340.



und diese in jedem Widerlager  $A_1$  und  $A_2$  mit der daselbst auftretenden verticalen Reaction  $V_1$  und  $V_2$  zu je einer Mittellkraft  $R_1$  und  $R_2$  vereinigt, so müssen diese beiden letzteren Auflagerreactionen  $R_1$  und  $R_2$  mit der Belastung  $K$  im Gleichgewichte sein, folglich ihre Richtungen sich in einem Punkte  $F$  der Richtung von  $K$  schneiden. Die Höhe  $FD_0 = f$  dieses

Durchschnittspunktes über der Horizontalen  $A_1 A_2$  durch die Widerlager ist leicht zu bestimmen, denn man hat nach der Figur:

$$\frac{V_1}{H} = \frac{F D_0}{A_1 D_0} = \frac{f}{l - a}$$

oder

$$V_1 (l - a) = f H,$$

d. h. mit Rücksicht auf (30) und (31):

$$K \frac{l^2 - a^2}{2l} = f \frac{5}{64 n l} K \left( 5 - 6 \frac{a^2}{l^2} + \frac{a^4}{l^4} \right).$$

Hieraus folgt jene Höhe  $f$ , wenn  $n = \frac{h}{l^2}$  eingeführt wird:

$$f = \frac{32}{5} h \frac{l^2 - a^2}{5 l^2 - 6 a^2 + \frac{a^4}{l^2}} = \frac{32}{5} h \frac{1 - \frac{a^2}{l^2}}{5 - \frac{a^2}{l^2}} \dots (33)$$

also unabhängig von der Größe der Belastung  $K$ , und nur abhängig von deren Lage ( $a$ ) und von der Form des Parabelbogens.

Wenn man in dieser Gleichung nach und nach für  $\frac{a}{l}$  alle Werthe von 0 für den Scheitel  $C$  bis 1 für die Kämpfer  $A_1$  und  $A_2$  einführt, so erhält man für die Höhen  $f$  des Schnittpunktes  $F$  über  $A_1 A_2$  Werthe zwischen

$$f_0 = \frac{32}{25} h = 1,28 h$$

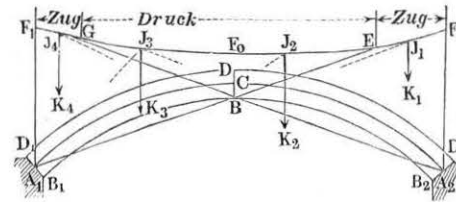
in  $C$  und

$$f_1 = \frac{32}{20} h = 1,6 h$$

über den Kämpfern  $A_1$  und  $A_2$ , und durch alle diese Ordinaten  $f$  wird eine Curve  $F_1 F F_0 F_2$  festgelegt, in welcher der mehrerwähnte Schnittpunkt  $F$  der Stützreactionen  $R$  sich bewegt, wenn die Last  $K$  von  $A_1$  nach  $A_2$  fortschreitet. Wenn daher in irgend welchem Punkte wie  $D$  eine Last  $K$  wirkt, so ruft dieselbe in  $A_1$  eine Reaction  $R_1$  hervor, deren Richtung durch  $A_1 F$  gegeben ist, und welche daher auf den Bogentheil  $A_1 E$  ein Biegemoment in  $B$  äußert, das durch  $R_1 b$  ausgedrückt ist, unter  $b$  den normalen Abstand des Punktes  $B$  von der Reaktionsrichtung  $A_1 F$  verstanden. Dieses Biegemoment fällt daher mit diesem Abstände  $b$  zu Null aus in dem Punkte  $E$ , in welchem die Bogenlinie von der Reaktionsrichtung  $A_1 F$  geschnitten wird. Hieraus folgt weiter, daß die Verticalebene durch  $F$  eine Scheide der Belastungen bildet, welche in  $E$  entgegengesetzte Biegemomente hervorrufen. Es ist nämlich ebenfalls aus der Figur zu ersehen, daß eine Versetzung der Last  $K$  nach  $F'$ , links von  $FD$ , eine Reaction  $R_1'$  in  $A_1$  erzeugt, welche das Trägerstück  $A_1 E$  um  $E$  rechts herum zu drehen

strebt, während die Last in einem Punkte rechts von  $F$ , etwa in  $F''$ , eine im entgegengesetzten Sinne drehende Reaction in  $A_1$  hervorruft. Diese Eigenschaft der Curve  $F$  kann daher dazu dienen, für irgend welchen Querschnitt des Bogenträgers den ungünstigsten Belastungszustand zu ermitteln.

Fig. 341.



Es sei zu dem Ende wieder durch  $A_1 C A_2$ , Fig. 341, die Mittellinie eines Bogenträgers dargestellt, welcher etwa aus den beiden Gurtungen  $B_1 B_2$  und  $D_1 D D_2$  mit zwischenliegenden Füllungsmitgliedern bestehen möge. Es sei ferner  $F_1 F_0 F_2$  die gemäß der Gleichung (33) ermittelte Curve, welche den geometrischen Ort für die Schnittpunkte der beiderseitigen Stützreactionen  $R$  darstellt. Um für die obere Gurtung in irgend einem Querschnitte des Bogenträgers, z. B.  $BD$ , den ungünstigsten Belastungszustand zu ermitteln, denkt man sich nach dem Früheren  $B$  als Momentenmittelpunkt angenommen. Legt man nun durch  $B$  die beiden nach  $A_1$  und  $A_2$  gerichteten Strahlen, welche die Curve  $F$  in  $E$  und  $G$  treffen, so ist leicht zu ersehen, daß die Verticalebenen durch diese Schnittpunkte Grenzscheiden für die Belastungen bilden, welche in der Obergurtung bei  $D$  entgegengesetzte Anstrengungen hervorrufen.

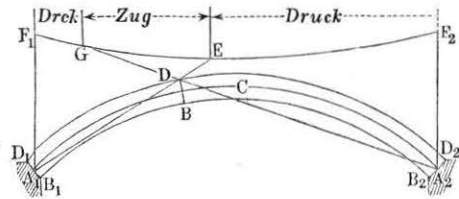
Irgend eine Belastung  $K_1$  des Feldes zwischen  $E$  und  $A_2$  äußert nämlich auf das Trägerstück  $A_1 B D$  eine Reaktionswirkung  $R_1$  in der Richtung  $A_1 J_1$ , welche das Trägerstück  $A_1 B$  um  $B$  links herum zu drehen strebt, so daß dadurch in der oberen Gurtung bei  $D$  eine Zugspannung hervorgerufen wird. Eine Last  $K_2$  dagegen zwischen  $B$  und  $E$  ruft die rechts um  $B$  drehende Reaction von der Richtung  $A_1 J_2$  hervor, und erzeugt somit Druckspannung in  $D$ . Dasselbe gilt auch für eine zwischen  $B$  und  $G$  wirkende Last  $K_3$ , denn deren Einfluß auf das Trägerstück  $A_1 B D$  stellt sich dar als die Mittelkraft aus der in der Richtung  $A_1 J_3$  wirkenden Reaction  $R_1$  und der Belastung  $K_3$ , und diese Mittelkraft ist nichts anderes, als der in der Richtung  $J_3 A_2$  wirkende Auflagerdruck gegen die Stütze  $A_2$ . Da diese Kraft auch um  $B$  rechts drehend wirkt, so muß sie in  $D$  ebenfalls Druckspannung erzeugen. Endlich wird eine die Strecke zwischen  $G$  und  $A_1$  angreifende Last  $K_4$  eine Wirkung in der Richtung  $J_4 A_2$  auf das Bogenstück  $A_1 B D$  ausüben, folglich wegen der linksdrehenden Wirkung Zugspannung in  $D$  hervorrufen. Die obere Gurtung wird daher in  $D$  den äußersten Anstrengungen ausgesetzt sein, wenn die bewegliche Last ent-



weder nur die Strecke  $EG$ , oder nur die beiden Strecken  $F_1G$  und  $EF_2$  bedeckt.

In gleicher Weise findet sich für die untere Gurtung in  $B$ , Fig. 342, die ungünstigste Belastung, wenn man den oberen Knotenpunkt  $D$  als Momenten-

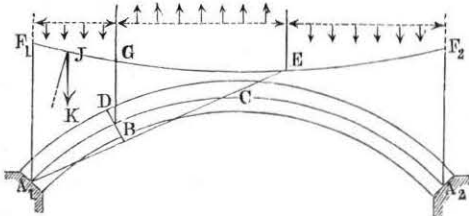
Fig. 342.



mittelpunkt betrachtet, und von  $D$  nach  $A_1$  und  $A_2$  zieht. In der Figur ist durch die Bezeichnung Zug und Druck ersichtlich gemacht, welcher Art die Spannungen sind, die durch eine Belastung der betreffenden Abtheilung in  $B$  hervorgerufen werden. Es muß dabei bemerkt werden, daß die hier ins Auge gefaßten, durch die bewegliche Last  $K$  hervorgerufenen Zug- oder Druckspannungen zu denjenigen Spannungen hinzutreten, welche vermöge der constanten Belastung durch das Eigengewicht  $p$  hervorgerufen werden. Da diese letzteren Spannungen immer Druckspannungen sind, so erkennt man, daß die ungünstigste für die Dimensionen der Gurtungen maßgebende Belastungsart diejenige sein wird, bei welcher auch durch die bewegliche Last nur Druckspannung erzeugt wird, d. h. wenn die in den Figuren 341 und 342 mit Druck bezeichneten Abtheilungen allein belastet sind, also die innere, wenn es sich um die Obergurtung, und die beiden äußeren, wenn es sich um die Untergurtung handelt.

Die mehrerwähnte Curve  $F$ , welche den geometrischen Ort für die Durch-

Fig. 343.



Es sei nämlich  $BD$ , Fig. 343, wieder ein beliebiger Querschnitt des Bogens und  $A_1E$  senkrecht zu diesem Querschnitte gezogen, so ist nach dem Obigen klar, daß ein in der verticalen Ebene durch  $E$  wirkendes Gewicht in  $BD$  keine tangentiale Schubkraft erzeugen kann, da die hervorgerufene Reaction  $R_1$

der Figur ist durch die Bezeichnung Zug und Druck ersichtlich gemacht, welcher Art die Spannungen sind, die durch eine Belastung der betreffenden Abtheilung in  $B$  hervorgerufen werden. Es muß dabei bemerkt werden, daß die hier ins Auge gefaßten, durch die bewegliche Last  $K$  hervorgerufenen Zug- oder Druckspannungen zu denjenigen Spannungen hinzutreten, welche vermöge der constanten Belastung durch das Eigengewicht  $p$  hervorgerufen werden. Da diese letzteren Spannungen immer Druckspannungen sind, so erkennt man, daß die ungünstigste für die Dimensionen der Gurtungen maßgebende Belastungsart diejenige sein wird, bei welcher auch durch die bewegliche Last nur Druckspannung erzeugt wird, d. h. wenn die in den Figuren 341 und 342 mit Druck bezeichneten Abtheilungen allein belastet sind, also die innere, wenn es sich um die Obergurtung, und die beiden äußeren, wenn es sich um die Untergurtung handelt.

Belastungszustand zu ermitteln, für welchen die tangentiale Abscheerungskraft in irgend einem Querschnitte ihren größten Werth erreicht, so daß hieraus auch die größten Anstrengungen der Füllungslieder bestimmt werden können.

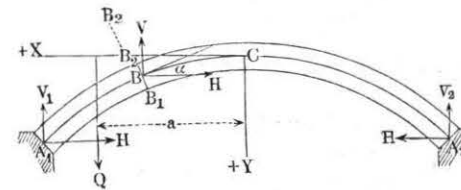
der Stütze  $A_1$  normal zu der Querschnittsfläche  $BD$  gerichtet ist. Man erkennt daraus, daß jede rechts von  $E$  zwischen  $E$  und  $A_2$  wirkende Belastung eine Schubkraft in  $DB$  erzeugt, welche bestrebt ist, das Bogenstück  $A_1BD$  nach innen oder unten zu verschieben, während eine Belastung zwischen  $E$  und der Verticalebene  $G$  durch die Mitte des Querschnittes eine Auflagerreaction  $R_1$  erzeugt, welche das Stück  $A_1BD$  aufwärts zu verschieben trachtet. Eine Belastung der Strecke  $GA_1$  dagegen muß wieder abwärts wirkende Schubkräfte hervorrufen, da der Einfluß einer solchen Belastung  $K$  auf  $A_1BD$  sich wieder als Mittelkraft aus  $K$  und der nach  $A_1J$  gerichteten Reaction  $R_1$ , d. h. als der nach  $JA_2$  gerichtete Druck gegen die jenseitige Stütze  $A_2$  bestimmt.

Den Horizontalschub  $H$  für diese ungünstigsten Belastungszustände hat man in jedem Falle nach der Gleichung (30\*) zu ermitteln.

**Spannungen der Bögen.** Hat man in der vorstehend angegebenen §. 66.

Art für einen bestimmten Belastungszustand eines Bogens die horizontale Schubkraft  $H$ , sowie die verticalen Auflagerreactionen  $V_1$  und  $V_2$  in  $A_1$  und  $A_2$ , Fig. 344, ermittelt, so bestimmt sich für irgend einen Querschnitt

Fig. 344.



durch den Punkt  $B$  die daselbst auftretende Spannung wie folgt. Auf diesen Querschnitt wirkt eine Horizontalkraft, welche für den Bogen an jeder Stelle den constanten Werth

—  $H$  der horizontalen Widerlagerreaction hat, und eine verticale Kraft  $V$ , welche sich aus der Differenz zwischen der aufwärts gerichteten Auflagerreaction —  $V_1$  in  $A_1$  und den zwischen  $A_1$  und  $B$  wirkenden Belastungen  $Q$ , also zu

$$V = Q - V_1 \dots \dots \dots (34)$$

bestimmt. Es sind hier wieder diese Kräfte positiv oder negativ angenommen, je nachdem sie nach den Richtungen der positiven oder negativen Coordinatenachsen wirken. Bezeichnet nun  $\alpha$  den Neigungswinkel der parabolischen Mittellinie des Bogens in  $B$  gegen den Horizont, so erhält man die nach dieser Tangente, d. h. normal zu dem Querschnitte  $B_1B_2$  gerichtete Spannung zu

$$S = V \sin \alpha + H \cos \alpha = V \frac{\partial y}{\partial s} + H \frac{\partial x}{\partial s}.$$

Für die Parabel hat man nun nach (7) und (8):

$\partial y = 2nx \partial x$  und  $\partial s = (1 + 2n^2 x^2) \partial x$ ,  
so daß man hiermit

$$S = \frac{V 2nx + H}{1 + 2n^2 x^2}$$

oder annähernd

$$S = (V 2nx + H) (1 - 2n^2 x^2) \dots (35)$$

erhält.

Setzt man zunächst wieder voraus, der Bogenträger sei wie ein gerader Balken mit seinen Enden verschieblich auf horizontale Stützflächen gesetzt, so daß  $H = 0$  ist, so findet man bei einer Belastung des Scheitels  $C$  durch  $2K$ , also mit  $V = -K$ , die Spannung

$$S = -K 2nx (1 - 2n^2 x^2).$$

Die Spannung ist daher in diesem Falle im Scheitel gleich Null und wächst mit  $x$ , so daß sie an den Enden für  $x = l$  den größten Werth

$$S_{max} = -K 2nl (1 - 2n^2 l^2) = -2K \frac{h}{l} \left(1 - 2 \frac{h^2}{l^2}\right)$$

annimmt.

Wäre unter derselben Voraussetzung verschieblicher Auflager der Träger gleichmäßig mit  $q$  pro Längeneinheit der Horizontalprojection belastet, so wäre  $V = -qx$ , und daher die Spannung

$$S = -2qn x^2 (1 - 2n^2 x^2),$$

oder angenähert

$$S = -2qn x^2,$$

da man den Werth  $2n^2 x^2 = 2 \frac{h^2 x^2}{l^4}$  als klein gegen 1 vernachlässigen kann. Auch hierfür ist die Spannung im Scheitel gleich Null, und sie erreicht ihren größten Werth an den Enden zu

$$S_{max} = -2qn l^2 = -2qh.$$

Nimmt man dagegen an, daß der Bogen sich in  $A_1$  und  $A_2$  gegen feste Widerlager stemme, so hat man bei einer Belastung des Scheitels durch  $2K$  die Vertikalkraft  $V = -K$  und nach (23) die Horizontalkraft

$$H = -K \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right),$$

womit man aus (35)

$$S = \left[ -K 2nx - K \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \right] (1 - 2n^2 x^2)$$

erhält.

Dies schreibt sich, unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von  $n$ :

$$\begin{aligned} S &= K \left( -2nx - \frac{25l}{32h} + \frac{h}{28l} + \frac{25}{16} \frac{ln^2}{h} x^2 \right) \\ &= K \left( \frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25l}{32h} + \frac{h}{28l} \right) \dots (36) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird mit:

$$\frac{25}{16} \frac{h}{l^3} 2x = 2 \frac{h}{l^2}, \text{ d. h. mit } x = \frac{16}{25} l = 0,64 l$$

ein Maximum von dem Betrage:

$$S_{max} = -K \left( \frac{25l}{32h} + \frac{423h}{700l} \right).$$

Wenn dieser Bogen gleichmäßig belastet ist, so hat man:

$$V = -qx,$$

und nach (24):

$$H = -q \frac{l^2}{2h},$$

so daß man hiermit die Druckkraft:

$$S = \left( -qx \cdot 2nx - q \frac{l^2}{2h} \right) (1 - 2n^2 x^2) = -q \left( \frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) (37)$$

erhält, und wenn dieser Bogen noch außerdem das Gewicht  $2K$  im Scheitel trägt, ist:

$$S = K \left( \frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25l}{32h} + \frac{h}{28l} \right) - q \left( \frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) \dots (38)$$

Durch Differentiation erhält man hieraus denjenigen Werth von  $x$ , für welchen  $S$  zu einem Maximum wird, aus:

$$K \left( \frac{25}{8} \frac{h}{l^3} x - 2 \frac{h}{l^2} \right) - 2q \frac{h}{l^2} x = 0$$

zu

$$x = \frac{16K}{25K - 16ql} l.$$

Dieser Ausdruck gilt natürlich nur, so lange er Werthe liefert, welche kleiner als  $l$  sind; wenn dagegen  $x > l$ , d. h. wenn  $16K > 25K - 16ql$  ist, oder für  $K \leq \frac{16}{9} ql$  stellt sich die größte Druckkraft  $S$  an den Enden  $A_1$  und  $A_2$  ein.

Die Druckkraft  $S$  erzeugt in dem Querschnitte  $F$  des Bogens eine spezifische Druckspannung von der Größe:

$$s_d = \frac{S}{F} \dots (39)$$

Außerdem wird aber der Bogen noch durch ein gewisses Moment  $M$  der äußeren Kräfte auf Biegung beansprucht, wodurch beiderseits in den von der neutralen Ase entferntesten Fasern die Biegungsspannung:

$$s_b = M \frac{e}{T} \quad \dots \quad (40)$$

hervorgerufen wird, wenn wie bisher  $T$  das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die durch dessen Schwerpunkt gehende horizontale Ase und  $e$  den Abstand dieser letzteren von der äußersten Faserschicht bedeutet. Das Moment  $M$  der äußeren Kräfte erhält man in dem vorausgesetzten Belastungszustande des Bogens, Fig. 344, dann zu:

$$M = -V_1(l-x) + H(h-y) + Q(a-x),$$

worin man für  $V_1$  und  $H$  die verticale und horizontale Auflagerreaction einzuführen hat, welche dem zu Grunde gelegten Belastungszustande gemäß nach dem Vorstehenden zu ermitteln sind. Wenn man daher mit  $s$  die höchstens zulässige specifische Faser Spannung des Materials pro Quadratinheit bezeichnet, so gilt für die Bestimmung der Querschnittsdimensionen die Bedingung:

$$s = s_a \pm s_b = \frac{S}{F} \pm \frac{M e}{T} \quad \dots \quad (41)$$

Setzt man z. B. eine Belastung des Scheitels durch  $2K$  voraus, so hat man:

$$V_1 = -K, H = -K \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right)$$

nach (23), und

$$S = K \left( \frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{h}{28l} \right)$$

nach (36), folglich die Spannungen in den äußersten Fasern:

$$s = \frac{K}{F} \left( \frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{h}{28l} \right) \pm \frac{K e}{T} \left[ (l-x) - \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) (h-y) \right] \quad \dots \quad (42)$$

Hieraus folgt für den Bogenscheitel mit  $x = y = 0$ :

$$s_c = -\frac{K}{F} \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \pm \frac{K e}{T} \left( \frac{7}{32} l + \frac{h^2}{28l} \right) \quad \dots \quad (42^a)$$

während für die Enden  $A_1$  und  $A_2$  mit  $x = l$ ;  $y = h$  die Spannung in allen Punkten zu:

$$s_a = \frac{S}{F} = -\frac{K}{F} \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{45}{112} \frac{h}{l} \right) \quad \dots \quad (42^b)$$

sich ergibt.

Um für diesen Fall die schwächste Stelle, für welche  $s$  ein Maximum wird, zu erhalten, findet man aus (42) durch  $\frac{\partial s}{\partial x} = 0$ :

$$\frac{K}{F} \left( \frac{25}{8} \frac{h}{l^3} x - 2 \frac{h}{l^2} \right) + \frac{K e}{T} \left[ -1 + \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \frac{\partial y}{\partial x} \right] = 0,$$

oder mit  $\frac{\partial y}{\partial x} = 2nx = 2 \frac{h}{l^2} x$ , wenn man mit  $\frac{TFl^2}{K}$  multiplicirt:

$$T \frac{25}{8} \frac{h}{l} x - T 2h - F e l^2 + F e \left( \frac{25}{16} l - \frac{h^2}{14l} \right) x = 0,$$

woraus

$$x = \frac{T 2h + F e l^2}{\frac{25}{8} T \frac{h}{l} + F e \left( \frac{25}{16} l - \frac{h^2}{14l} \right)} \quad \dots \quad (43)$$

folgt. Wenn man hierin das Glied  $\frac{h^2}{14l}$  vernachlässigt, so folgt annähernd

$$x = \frac{16}{25} l,$$

und durch Einführung dieses Werthes und

$$y = \frac{h}{l^2} x^2 = \frac{256}{625} h$$

in (42) erhält man daher die größte Spannung:

$$s_{max} = -\frac{K}{F} \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{423}{700} \frac{h}{l} \right) + \frac{K e}{T} \left[ \frac{9}{25} l - \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{28l} \right) \frac{369}{625} h \right] \\ = -\frac{K}{F} \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{423}{700} \frac{h}{l} \right) - \frac{K e}{T} \left( \frac{81}{800} l - \frac{369}{17500} \frac{h^2}{l} \right) \quad \dots \quad (44)$$

Wenn die Last  $2lq$  gleichmäßig über den Bogen vertheilt ist, so hat man, wie oben gefunden, das Moment  $M$  und also auch die Biegungsspannung für jeden Querschnitt gleich Null; die ganze Spannung ist also die aus  $S$  sich ergebende nach (37) durch:

$$s = \frac{S}{F} = -\frac{q}{F} \left( \frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) \quad \dots \quad (45)$$

bestimmt.

Durch die Druckkraft  $S$  wird auch eine Zusammendrückung des Bogensträgers in tangentialer Richtung, also eine Verkürzung der Bogenlänge, und in Folge davon eine Senkung des Scheitels herbeigeführt, welche sich folgenderart bestimmt. Bezeichnet man mit  $\sigma$  die Verkürzung eines Bogenstückes zwischen dem Scheitel und einem Punkte mit der Abscisse  $x$ , ist also



unter  $\partial \sigma$  die Verkürzung des Bogenelementes  $\partial s$  verstanden, so hat man nach den für die rückwirkende Elasticität geltenden Regeln:

$$\partial \sigma = \frac{S}{FE} \partial s = \frac{S}{FE} (1 + 2n^2 x^2) \partial x,$$

wenn  $E$  den Elasticitätsmodul des Bogenmaterials bedeutet. Man erhält daher die Verkürzung  $\sigma$  für das Stück zwischen den Abscissen 0 und  $x$  zu:

$$\sigma = \int_0^x \frac{S}{FE} (1 + 2n^2 x^2) \partial x \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

Für einen in der Mitte mit  $2K$  belasteten Bogen hat man daher nach (36), wenn wiederum der Querschnitt  $F$  überall von gleicher Größe vorausgesetzt wird:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{K}{FE} \int_0^x \left( \frac{25}{16} \frac{h}{l^3} x^2 - 2 \frac{h}{l^2} x - \frac{25}{32} \frac{l}{h} + \frac{h}{28l} \right) \left( 1 + 2 \frac{h^2}{l^4} x^2 \right) \partial x \\ &= \frac{K}{FE} \left( -\frac{h}{l^2} x^2 - \frac{25}{32} \frac{l}{h} x + \frac{h}{28l} x \right) \quad . \quad . \quad . \quad (47) \end{aligned}$$

und für die Bogenhälfte mit  $x = l$ :

$$\sigma = -\frac{K}{FE} \left( \frac{27}{28} h + \frac{25}{32} \frac{l^2}{h} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (47^a)$$

Wenn dagegen der Bogen gleichmäßig mit  $2lq$  belastet ist, so erhält man mit  $S = -q \left( \frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right)$  nach (37):

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{q}{FE} \int_0^x \left( \frac{h}{l^2} x^2 + \frac{l^2}{2h} \right) \left( 1 + 2 \frac{h^2}{l^4} x^2 \right) \partial x \\ &= -\frac{q}{FE} \left( \frac{2}{3} \frac{h}{l^2} x^3 + \frac{l^2}{2h} x + \frac{2}{5} \frac{h^3}{l^6} x^5 \right) \quad . \quad . \quad . \quad (48) \end{aligned}$$

und für die Bogenhälfte:

$$\sigma = -\frac{q}{FE} \left( \frac{2}{3} h l + \frac{l^3}{2h} + \frac{2}{5} \frac{h^3}{l} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (48^a)$$

Wenn der Bogen beiden Belastungen  $2K$  und  $2ql$  ausgesetzt ist, so bestimmt sich die Verkürzung einer Bogenhälfte durch die Summe von (47<sup>a</sup>) und (48<sup>a</sup>).

Aus der Verkürzung einer Bogenhälfte läßt sich auch die Senkung  $\eta$  des Scheitels bestimmen. Man findet nämlich die Bogenlänge  $s$  der Parabel durch Integration von (8) zu:

$$s = x + \frac{2}{3} n^2 x^3 = x + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^4} x^3$$

und für die Bogenhälfte mit  $x = l$ :

$$s = l + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l}.$$

Hieraus ergibt sich durch Differentiiren nach  $h$ :

$$\partial s = \frac{4}{3} \frac{h}{l} \partial h \text{ oder } \partial h = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \partial s.$$

Setzt man daher für  $\partial s$  die Verkürzung  $\sigma$  ein, so giebt  $\partial h$  die Veränderung von  $h$ , d. h. die Senkung des Scheitels:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \sigma.$$

Beispielsweise würde für gleichzeitige Belastung des Bogens mit  $2K$  im Scheitel und mit  $2lq$  in gleichmäßiger Vertheilung die Senkung des Scheitels nach (47<sup>a</sup>) und (48<sup>a</sup>) annähernd zu:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l^3}{h^2 FE} \left( \frac{25}{32} K + \frac{q l}{2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

folgen.

Nach den vorstehenden Ermittlungen ist es nunmehr auch leicht, den Einfluß von Temperaturänderungen auf die Spannungsverhältnisse der Bogenträger zu ermitteln. Denkt man sich nämlich zunächst den Bogenträger mit seinen Enden verschieblich auf horizontale Stützflächen gestellt, so wird die mit der Zunahme der Temperatur verbundene Verlängerung des Trägers eine Vergrößerung der horizontalen Entfernung der Enden  $A_1$  und  $A_2$  und somit eine Verschiebung der letzteren nach außen im Gefolge haben. Gesezt diese Verschiebung betrage für jedes Ende den Werth  $\tau l$ , unter  $\tau$  die durch die Temperaturerhöhung bewirkte Aenderung der Längeneinheit verstanden, so kann man sich die Wirkung der festen Widerlager derartig denken, daß dieselben Horizontalkräfte  $H$  auf die Trägerenden ausüben, von genügender Größe, um die Verschiebung wieder aufzuheben. Man erhält daher den hierzu erforderlichen Horizontalschub aus (13<sup>b</sup>), wenn man darin  $V = 0$  setzt und  $l$  für  $a$  einführt, durch:

$$\xi = \tau l = -\frac{H}{TE} \frac{8}{15} h^2 l.$$

Der hieraus folgende Horizontaldruck:

$$H = \frac{15}{8} \frac{\tau TE}{h^2}$$

erzeugt im Querschnitte durch den Scheitel eine Druckspannung:

$$s_d = \frac{H}{F}$$

und eine Biegungsspannung:

$$s_b = \frac{Me}{T} = \frac{Hhe}{T},$$

so daß die durch die Temperaturzunahme erzeugte Spannung im Scheitel den größten Werth:

$$s_t = \frac{H}{F} + \frac{Hhe}{T} = \frac{15}{8} \frac{\tau E}{h^2} \left( \frac{T}{F} + he \right) \dots (50)$$

annimmt.

Hierin kann man den Ausdehnungskoeffizienten für Eisen zu 0,000012 für 1° C. annehmen, so daß  $\tau = 0,000012 t$  zu setzen ist, wenn  $t$  die Temperaturveränderung in Grad C. bedeutet. Um diese durch die Temperaturveränderung hervorgerufene Spannung muß die durch die Belastung erzeugte geringer sein, als die höchstens zulässige, und hierdurch wird der Vortheil einer günstigen Materialverwendung größtentheils wieder aufgehoben, welcher sonst mit dem elastischen Bogenträger verbunden ist.

Beispiel. Ein gußeiserner Bogenträger von 5 m Spannweite und 1 m Pfeilhöhe der parabolischen Mittellinie hat in seinem Scheitel ein Gewicht von 5000 kg zu tragen. Wie groß hat man die Breite  $b$  des rechteckigen Querschnitts im Scheitel anzunehmen, wenn die Höhe daselbst 0,3 m gewählt wird, unter der Bedingung, daß mit Berücksichtigung einer Temperaturschwankung von 30° C. die größte Faserspannung den Betrag von  $s = 6$  kg pro Quadratmillimeter nicht übersteige?

Hier ist, unter  $a = 300$  mm die Höhe und unter  $b$  die gesuchte Breite des Querschnitts im Scheitel verstanden:

$$F = b \cdot 300 \text{ und } T = \frac{b}{12} 300^3,$$

daher

$$\frac{T}{F} = \frac{300^2}{12} \text{ und } e = \frac{a}{2} = 150,$$

daher erhält man nach (50) die durch die Temperaturveränderung hervorgerufene Spannung, wenn der Elasticitätsmodul  $E = 10\,000$  gesetzt wird:

$$\begin{aligned} s_t &= \frac{15}{8} \frac{0,000012 \cdot 30 \cdot 10\,000}{1000 \cdot 1000} \left( \frac{300 \cdot 300}{12} + \frac{300 \cdot 1000}{2} \right) \\ &= \frac{0,054}{8} \left( \frac{90}{12} + \frac{300}{2} \right) = 0,054 \cdot 19,7 = 1,06 \text{ kg.} \end{aligned}$$

Die durch die Belastung erzeugte Spannung darf daher nicht mehr als  $6 - 1,06 = 4,94$  kg betragen. Für den Scheitel erhält man nun aus (42a) durch Einführung von  $K = 2500$ ,  $l = 2,5$  m und  $h = 1$  m die größte Spannung:

$$\begin{aligned} s_c &= - \frac{2500}{b \cdot 300} \left( \frac{25}{32} \frac{2,5}{1} - \frac{1}{28 \cdot 2,5} \right) - \frac{2500 \cdot 150}{\frac{1}{12} b \cdot 300^3} \left( \frac{7}{32} 2500 + \frac{1000 \cdot 1000}{28 \cdot 2500} \right) \\ &= - \frac{16,15}{b} - \frac{93,53}{b} = - \frac{109,68}{b}. \end{aligned}$$

Daher folgt:

$$b = \frac{109,68}{4,94} = 22,2 \text{ mm.}$$

Wenn der Bogen außerdem noch eine gleichmäßig über seine Horizontalprojection verbreitete Last von  $q = 500$  kg pro Meter Länge zu tragen hätte, so würde dadurch im Scheitel nach (45) noch eine Spannung:

$$s = - \frac{500}{b \cdot 300} \frac{2,5 \cdot 2,5}{2 \cdot 1} = - \frac{5,21}{b}$$

eintreten, so daß man für diesen Fall die erforderliche Breite aus:

$$b = \frac{16,15 + 93,53 + 5,21}{4,94} = \frac{114,89}{4,94} = 23,2 \text{ mm}$$

erhalten würde.

Die Senkung des Scheitels durch die Compression des Materials berechnet sich in diesem letzteren Falle nach (49) zu:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{3}{4} \frac{2,5^3}{1000^3} \frac{1000^3}{23,2 \cdot 300 \cdot 10\,000} \left( \frac{25}{32} 2500 + 500 \cdot 2,5 \right) \\ &= \frac{15,63 \cdot 32,03}{928} = 0,54 \text{ mm,} \end{aligned}$$

während die durch die Biegung sich nach (25a) zu:

$$\eta_2 = \frac{2500}{\frac{1}{12} 23,2 \cdot 300^3 10\,000} \frac{2,5^3}{128} \frac{1000^3}{128} = \frac{3906}{6682} = 0,59 \text{ mm,}$$

also die gesammte Senkung zu:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = 1,13 \text{ mm}$$

berechnet.

Anmerkung. Für einen geraden Balken von gleicher Spannweite und Belastung hätte man für die Mitte das Biegemoment durch:

$$M = 5000 \frac{5}{4} + 500 \frac{5^2}{8} = 7812,5 \text{ mkg,}$$

folglich erhielte man bei gleicher Höhe des Trägers die erforderliche Breite  $b$  aus:

$$M = s \frac{T}{e} = 6 \frac{b h^2}{6} = b h^2$$

zu

$$b = \frac{7812,5 \cdot 1000}{300 \cdot 300} = 86,7 \text{ mm.}$$

Dieses Resultat zeigt die günstigere Verwendung des Materials bei dem Bogenträger im Vergleich zu dem geraden Balken, welche auch dann noch stattfindet, wenn man bei dem letzteren einen vortheilhafteren Querschnitt als den rechteckigen wählen wird.

§. 67. **Bogenträger aus Holz und Gusseisen.** Bei gleichem Querprofile und gleichem Tragmodul, sowie unter übrigens gleichen Verhältnissen, besitzen, dem Vorstehenden zufolge, die Träger mit bogenförmiger Ase, die sogenannten Bogenträger, eine größere Tragkraft als die Balkenträger, deren Längsaxe eine gerade ist. Da nun die Bogenträger aus Gusseisen direct beim Gusse die Bogenform erhalten, so kann der Tragmodul bogenförmiger Balken von dem der geraden Balken nicht sehr verschieden sein, und deshalb ist denn auch bei gusseisernen Trägern die Anwendung der Bogenform von besonderem Vortheil. Anders ist es aber bei Trägern aus Holz oder Schmiedeeisen. Da das Holz und in einem gewissen Grade auch das Eisenblech durch das Biegen bei seiner Verwendung zu Bogenträgern an Tragkraft verliert, so ist der Tragmodul eines Trägers aus gebogenem Holze oder Eisenblech kleiner als der eines geraden Trägers oder Balkens und daher bei diesen Stoffen die Bogenform mit Vorsicht und namentlich immer nur von mäßiger Krümmung anzuwenden. Ist  $r$  der Krümmungshalbmesser des gebogenen Balkens und  $e$  der größte Abstand seiner Fasern von der neutralen Ase, so hat man die spezifische Ausdehnung oder Zusammendrückung dieser Fasern (s. Vd. I):

$$\sigma = \frac{e}{r},$$

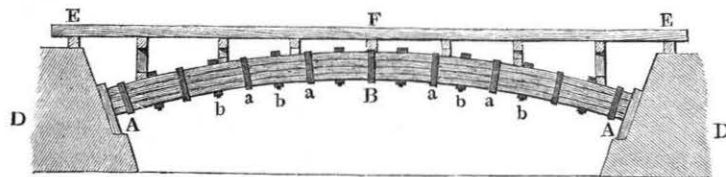
und daher die entsprechende Spannung:

$$s = \sigma E = \frac{e}{r} E,$$

wo  $E$  den Elasticitätsmodul bezeichnet.

Da hiernach die Spannung des gebogenen Balkens direct wie die Dicke oder Höhe ( $2e$ ) und umgekehrt wie der Halbmesser  $r$  der Krümmung desselben wächst, so setzt man ihn mit Vortheil aus dünnen brettförmigen Stücken (Bohlen) zusammen, indem man dieselben mit ihren breiten Flächen über einander legt, zusammenschraubt u. s. w. Einen solchen Bohlenbogen  $ABA$ , welcher aus vier über einander liegenden Bohlen besteht, führt Fig. 345 vor Augen. Dieser Bogen trägt einen Balken  $EFE$  und stützt

Fig. 345.



sich gegen die Widerlager  $DD$ . Die Bohlen, aus welchen derselbe besteht, werden durch Bänder  $a, a \dots$  und Schrauben  $b, b \dots$  zusammengehalten.

Die Balkenbögen werden aus ganzen Balken in ähnlicher Weise zusammengesetzt; übrigens verbindet man auch die über einander liegenden Balken noch durch Verzahnung oder durch eingesezte Dübel, wie gerade Balken, noch fester mit einander. Zum Biegen der Balken und Bohlen zu Tragbögen ist Lärchen-, Kiefern-, Tannen- und Eichenholz, und zwar im grünen Zustande, zu verwenden. Man biegt diese Holzstücke von der Mitte aus nach den Enden zu auf einem besonderen Gerüste, und läßt sie auf diesem mindestens zwei Monate lang im gespannten Zustande liegen. Bei diesem Biegen des frischen Holzes wird natürlich die Elasticitätsgrenze bedeutend überschritten, und es ist daher zu erwarten, daß der Festigkeitsmodul des trockenen Balkens, welcher eine bleibende Bogenform angenommen hat, kleiner ist als derjenige, welchen er ohne Biegung haben würde. Ardant findet ihn kaum ein Viertel von dem eines einfachen geraden Balkens. Nach Thl. I wäre z. B. für Holz im Mittel die relative Ausdehnung bei der Elasticitätsgrenze:

$$\sigma = \frac{e}{r} = \frac{1}{600},$$

und daher der entsprechende Krümmungshalbmesser:

$$r = 600 e,$$

z. B. für  $e = 0,15$  m,  $r = 90$  m, daher bei einer Spannweite  $2l = 16$  m die zulässige Pfeilhöhe nur  $h = \frac{l^2}{2r} = \frac{64}{180} = 0,355$  m, und folglich das

Verhältniß  $\frac{h}{2l} = \frac{1}{45}$ . Erfahrungsmäßig kann man nach Wiebeking (s. dessen allgemeine Wasserbaukunst Vd. III) Balken von Tannenholz um  $\frac{h}{2l} = \frac{1}{25}$ , und solche von Eichenholz um  $\frac{h}{2l} = \frac{1}{40}$  biegen; die viel schwächeren Bohlen von vielleicht nur zwei Zoll Stärke lassen sich natürlich in einem viel stärkeren Verhältnisse krümmen, z. B. um  $\frac{h}{2l} = \frac{1}{10}$ . Die einzelnen Balken und Bohlen haben eine Länge von höchstens 16 m; bei größeren Spannweiten muß man folglich mehrere Balken oder Bohlen der Länge nach an einander anstoßen (schiften).

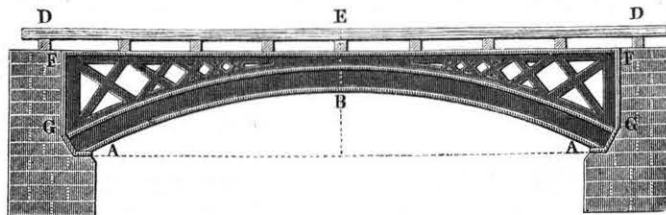
Bei einer anderen Construction von Bohlenbögen werden die Bohlen nicht über, sondern neben einander gelegt, weshalb dieselben auch nicht krumm gebogen, sondern nur krumm geschnitten werden. Hierbei geht jedoch viel Holz verloren; auch erfordert diese Construction eine sehr solide Verbindung der Bohlen oder Felgen unter einander.

Schmiedeeiserne Tragbögen lassen sich natürlich mit Vortheil aus Eisenblech ausschneiden und zusammennieten.



Die Art und Weise, wie ein gußeiserner Bogen als Träger dient, ist aus Fig. 346 zu ersehen. Der eigentliche Bogen  $ABA$  ist außen und innen durch eine breite Rippe verstärkt und zur Unterstüßung des Balkens  $DED$  dient eine breite Tragwand  $FF$ , welche den ganzen Bogen oben

Fig. 346.



horizontal begrenzt. Das Ganze stützt sich mittelst starker Flanschen an die Widerlagsmauern  $G, G$ . Wenn man diese Bögen aus mehreren Theilen zusammensetzt, so läßt man die einzelnen Stücke in Flanschen an einander anstoßen und verbindet dieselben mit einander durch Schraubenbolzen.

Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen abgehandelte Theorie der Tragkraft von krummen Balken oder Bögen ist von Ardan (s. dessen am Ende des Capitels angeführte Schrift) durch Versuche an verschiedenen Holzbögen erprobt worden. Was z. B. den Horizontalschub anlangt, so ergab sich für den Fall, daß die Last  $2K$  in der Mitte des Bogens hängt, der Horizontalschub nach (23) zu:

$$H = K \left( \frac{25}{32} \frac{l}{h} - \frac{h}{281} \right),$$

und für den Fall, daß dieselbe längs der Sehne des Bogens gleichmäßig vertheilt ist, dieser Schub nach (24) zu:

$$H_1 = q \frac{l^2}{2h} = q 2l \frac{l}{4h} = \frac{Ql}{4h}.$$

Obgleich diese Formeln nur unter der Voraussetzung gefunden worden sind, daß die Träger nach der Parabel gebogen sind, so stimmen doch dieselben mit den Ergebnissen der Versuche an nach dem Kreise gebogenen Trägern ziemlich überein. So findet z. B. Ardan für einen Halbkreisbogen, im ersten Falle:

$$H = 0,32 \cdot 2K = 0,64 K,$$

und im zweiten Falle:

$$H_1 = 0,22 \cdot 2ql = 0,22 Q,$$

während die Formeln, wenn man darin  $l = h$  setzt, auf:

$$H = 0,745 K \text{ und } H_1 = 0,25 Q$$

führen.

Bei den häufiger angewendeten gedrückten Bögen ist, wie zu erwarten war, die Uebereinstimmung zum Theil noch größer.

Für die gleichförmig vertheilte Belastung mit  $Q = 2ql$  ist, wenn das Verhältniß der halben Spannweite  $l$  zur Spannhöhe  $h$ :

$\frac{l}{h} =$	2	3	4	5	10	beträgt,
nach Ardan:	$H = 0,54 Q$	$0,775 Q$	$1,02 Q$	$1,33 Q$	$3,33 Q$	

und dagegen nach der Formel  $H = \frac{Ql}{4h}$ :

$H =$	$0,50 Q$	$0,75 Q$	$1,00 Q$	$1,250 Q$	$2,500 Q$
-------	----------	----------	----------	-----------	-----------

Was die Senkung des Scheitels betrifft, welche eine längs der Sehne gleichmäßig vertheilte Last hervorbringt, so kann dieselbe natürlich bei der Kreisform des Trägers nicht Null sein. Ardan findet dieselbe für einen Halbkreisbogen:

$$\eta = 0,007 \frac{Q l^3}{T E} = 0,084 \frac{Q l^3}{b a^3 E},$$

wenn  $b$  und  $a$  die Querschnittsdimensionen des Bogens bezeichnen.

Bei einer längs der Sehne gleichmäßigen Belastung hat der Parabelbogen nur durch seine Druckfestigkeit zu widerstehen, und es folgt der entsprechende Querschnitt dieses Tragbogens aus (45), wenn man darin  $x = l$  und  $2ql = Q$  setzt:

$$F = \frac{q}{s} \left( h + \frac{l^2}{2h} \right) = \frac{Q}{2s} \left( \frac{h}{l} + \frac{l}{2h} \right).$$

Ein kreisbogenförmiger Träger muß dagegen auch durch seine Biegezugfestigkeit widerstehen, und es findet Ardan für denselben, wenn dessen Halbmesser durch  $r$  bezeichnet wird:

$$F = a b = \left( \mu + \frac{\nu r}{4a} \right) \frac{Q}{2s},$$

wobei für

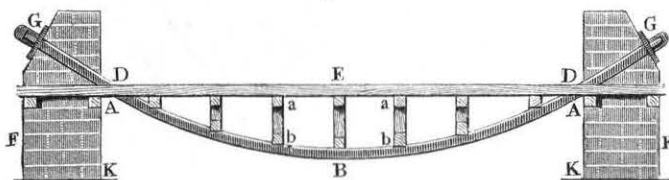
$\frac{l}{h} =$	2	3	4	5	10	15	20
$\mu =$	1,080	1,550	2,040	2,660	6,660	7,630	9,520
und $\nu =$	0,792	0,263	0,117	0,053	0,034	0,022	0,001



Anmerkung. Die größeren Holzbrücken haben zum Theil noch größere Spannweiten als die steinernen Brücken. Bei der oberen Schynsill-Brücke kommt ein Bogen von über 100 m Spannweite und 6 m Höhe vor. Die alten Schweizer Brücken, sowie die Wiebeking'schen Brücken, haben schon Spannweiten von 50 bis 60 m. Bei der Trenton-Brücke hat der mittlere Bogen eine Spannweite von 60 m und eine Höhe von 8 m. Eine sehr große Gitterbrücke ist bei Wittenberge über die Elbe geführt. Dieselbe hat 11 Stützstellen zu je 53,5 m und 3 zu je 37,5 m Spannweite. Die Tragwände dieser Brücke haben eine Höhe von 6 m, während ihr Abstand von einander nur 4 m misst. Die Versuche, welche vorläufig mit einem Theile dieser Brücke angestellt worden sind, haben sehr günstige Resultate geliefert; bei der Fahrt und dem Stillstande einer Locomotive von 600 Centner Gewicht betrug die Senkung nur 15 mm; bei einem Marsche von 240 Mann über die Brücke war dieselbe nur 14 mm, erst bei einer gleichmäßigen Belastung von 2000 Centnern und einer Ueberfahrt von zwei Locomotiven von 1260 Centner Gewicht betrug die Senkung 78 mm. Siehe die Nachrichten darüber in der Eisenbahnzeitung, 1850, Nr. 29 bis 31, oder polyt. Centralblatt, 1850, Vief. 18.

§. 68. Hängebögen. Wenn man den Tragbogen nicht nach oben, sondern nach unten, folglich in die Richtung der Last stellt, so findet in Hinsicht auf den seither betrachteten Fall nur der Unterschied statt, daß der Bogen durch die Belastung dort comprimirt und hier ausgedehnt wird, daß er also im ersten Falle durch seine Druck- und im letzteren Falle durch seine Zugfestigkeit widerstehen muß. Da das Schmiedeeisen eine große Zug- und das Gußeisen eine größere Druckfestigkeit besitzt, so ist das erstere mehr zu einer solchen umgekehrten Bogenstellung geeignet als das Gußeisen. Einen solchen Tragbogen führt Fig. 348 vor Augen. Es ist  $ABA$  ein schmiede-

Fig. 348.



eiserner Bogen,  $DED$  der von ihm getragene Balken, ferner sind  $FK, FK$  die beiden Widerlagspfeiler, und  $G, G$  Keile und Unterlagsplatten, womit sich die Bögen von außen gegen die Widerlager stützen. Natürlich sind es alle Mal mindestens zwei neben einander liegende Tragbögen, welche einen oder mehrere Balken wie  $DED$  unterstützen, und es besteht immer die Verbindung dieser Theile unter einander aus den Querbalken  $a, a, \dots, b, b, \dots$  und Tragsäulen  $ab, ab, \dots$ . Die Wirkung eines solchen Tragbogens auf die Widerlager ist, wie bei den umgekehrten Häng- und Sprengwerken, von außen nach innen gerichtet; man hat also hier dafür zu sorgen,

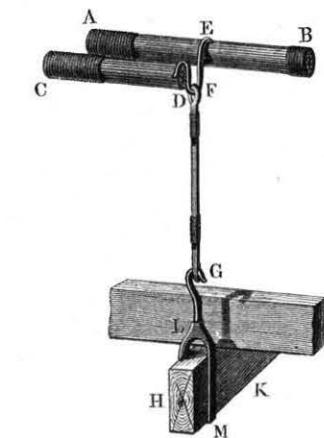
daß die Widerlager nicht um die inneren Kanten  $K, K$  nach innen kippen. Uebrigens kann man einen Balken  $DED$  durch einen solchen Bogen ebenso gut von oben als von unten unterstützen, wenn man nur die Tragsäulen  $ab, ab$  durch Hängesäulen ersetzt. Man hat es dann mit einem sogenannten Hängebogen zu thun und nennt auch die durch Hängebögen getragenen Brücken Hängebrücken. In der Regel bildet man diese Bögen nicht aus krummem Holz oder Eisen, sondern man läßt dieselben entweder aus Seilen, und namentlich Drahtseilen, oder aus schmiedeeisernen Ketten bestehen. Die hierzu verwendeten Spann- oder Tragseile bestehen aus Draht von 1 bis 4 mm Dicke, und haben je nach der Spannweite u. s. w. eine Stärke von 25 bis 250 mm. Die Drahtbrücke bei Freiburg in der Schweiz, welche eine Spannweite von 273 m hat, wird z. B. von vier Seilen getragen, welche aus 1056 Drähten von je 3,2 mm Stärke bestehen, und 136 mm dick sind, und die Drahtbrücke über den Niagara-Wasserfall, von 257 m Spannweite, besteht aus vier Drahtseilen, welche bei 3640 Drähten einen Durchmesser von 250 mm haben. Damit die nur neben einander liegenden und übrigens gehörig gefirnigten Drähte eines Taues gehörig zusammenhalten, sind sie in Abständen von circa 0,3 m ungefähr 0,3 m lang mit anderem Draht umwickelt.

Die Glieder der Tragketten bestehen aus mehreren neben einander liegenden und hochkantig gestellten Eisenschienen von 2,5 bis 4 m Länge, und sind durch cylindrische Bolzen mit einander verbunden. Der Querschnitt eines Kettenringes und folglich auch die Anzahl und die Querschnittsdimensionen der einzelnen Schienen eines ganzen Gliedes sind natürlich von der Spannweite, Höhe u. s. w. abhängig. Die 132 m span nende Kettenbrücke zu Prag wird z. B. von acht Ketten getragen, deren Glieder aus je sechs 3,14 m langen, 105 mm hohen und 15 mm dicken Schienen zusammengesetzt sind; die 198 m span nende Kettenbrücke zu Pesth ruht hingegen nur auf vier Ketten mit 3,75 m langen und 0,270 m hohen Gliedern, welche je 10 bis 11 Schienen enthalten, die zusammen in der Mitte der Kette eine Dicke von 310 mm und an den Enden derselben eine solche von 315 mm haben. Endlich hat man Hängebrücken aus über einander liegenden Eisenbändern construirt; eine größere Brücke dieser Art befindet sich zu Survesnes bei Paris. Dieselbe hat eine Spannweite von 63 m und es besteht hier jedes Tragseil aus 20 über einander liegenden gewalzten Eisenbändern von 81 mm Breite und 3,83 bis 4,15 mm Dicke.

Das Hängewerk, welches die Brückenbalken mit den Spann- oder Tragseilen verbindet, besteht entweder aus schmiedeeisernen Hängestangen oder aus Hängefeilen. Die Art und Weise, wie diese Stangen oder Seile einerseits mit den Spannketten und andererseits mit den Balken der Brücke zu verbinden sind, ist aus Folgendem zu ersehen.

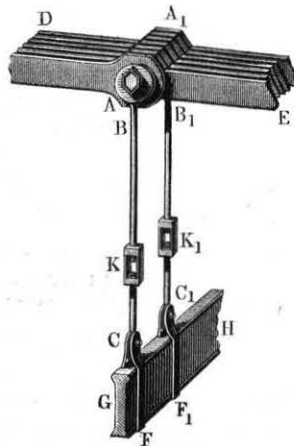


Hat eine Drahtbrücke nicht je zwei neben einander hängende Seile, so hängt man die Hängefseile mittelst einfacher Dehre an das Tragseil; besteht sie hingegen aus je zwei neben einander hängenden Seilen, so werden die Hängefseile mittelst Haken an ein solches Seilpaar aufgehangen. Diese Aufhängungsweise ist in Fig. 349 dargestellt. *AB* und *CD* sind die beiden Seile, *DE* ist der Haken und *FG* stellt das Hängefseil vor. Das Tragseil *CD* ist unmittelbar beim Haken abgeschnitten gedacht. Die Enden *HK* der Querbalken oder Unterzüge, auf welchen die ganze Brücke ruht, sind entweder mit Bügeln *LM* umgeben, deren hakenförmige Köpfe in die unteren Dehre *G* der Hängefseile eingehakt werden, oder sie sind von unten mit Eisenplatten bekleidet, und es werden die durch die Querbalken und



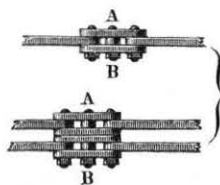
diese Platten gehenden, zu diesem Ende durchlochten oder schraubenförmig zugeschnittenen Enden der Hängefseile durch Keile oder starke Schraubenmutter mit den ersteren fest verbunden.

Fig. 350.



versehenen Hängefseilen sind auch hier mittelst Bügel *CF*, *C1F1* an die gußeisernen Querbalken angeschlossen. Bei älteren Kettenbrücken sind die

Fig. 351.

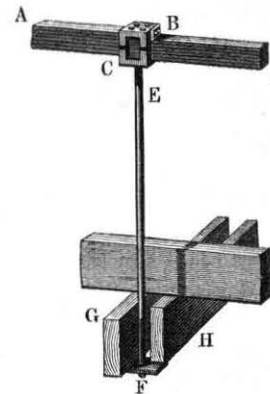


Die Art und Weise, wie die Hängefseile an die Tragketten angehängt werden, ist aus Fig. 350 und Fig. 351 zu ersehen. Bei der ersteren Anordnung hängen die Hängefseile *BC*, *B1C1* unmittelbar an dem Bolzen *AA1*, Fig. 350, welcher die Kettenlieder *DA* und *EA1* mit einander verbindet. Die mit Stell- oder Scheerengliedern *K*, *K1*

Kettenglieder durch besondere Blätter mit einander verbunden, welche in ihrer Mitte noch besondere Bolzen *A*, *B*, Fig. 351, tragen, woran die Hängefseile aufgehängt werden.

Die Aufhängung der Brücke an ein Bandseil ist in Fig. 352 abgebildet. Es ist hier an jeder Stelle, wo oben ein Band *AB* endigt, und

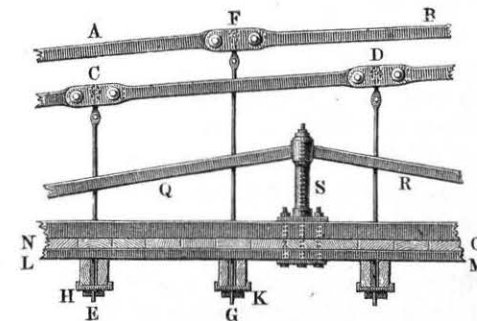
Fig. 352.



unten ein neues Band hinzutritt, eine gußeiserne Klemmbüchse *BC* aufgesetzt, an welche die Enden *B* und *C*, nachdem sie durch dieselbe gegangen sind, durch je zwei Schrauben befestigt werden. Die mit einem Kopfe in der Klemmbüchse aufgehängene Hängefseile *EF* trägt an ihrem unteren Ende eine Eisenplatte *F*, auf welcher die Enden von zwei Querbalken *G* und *H* aufliegen, zwischen denen die Hängefseile hindurchgeht.

Meist hat man auf einer und derselben Seite der Brücke zwei Tragketten über einander, wie z. B. *AB* und *CD*, Fig. 353, und deshalb gehen auch doppelt so viel Hängefseile als Kettenglieder nach der Brücke herab; ist folglich die Länge der Kettenglieder 3 bis 4 m, so beträgt die Entfernung zwischen je zwei Hängefseilen *CE* und *FG* 1,5 bis 2 m. Die Figur zeigt auch

Fig. 353.



noch, wie die unteren Enden der Kettenstäbe durch Fußplatten *H*, *K* und Keile *E*, *G* mit den Querbalken verbunden sind. Auf den Querbalken liegen die Längenschwellen wie *LM*, quer darüber wieder eine Bohlenlage *NO*, oder eine Holzpflasterung u. s. w.

Was die Breite der Brückenbahn anlangt, so rechnet man auf eine Laufbahn 1 bis 2 m und auf eine Fahrbahn 2 bis 4 m; eine Brücke mit zwei Lauf- und zwei Fahrbahnen erhält folglich eine Totalbreite von 6 bis 12 m.

Um der Brücke eine größere Steifigkeit zu geben, versieht man die Brückenbahn noch mit besonderen Verstrebungen, wie z. B. *QRS*, Fig. 353; sehr zweckmäßig sind z. B. die nach dem Principe der Gitterwände construirten Steifwände. Man kann auch nach Eadiat und Dudry die Querbalken durch einen Gitterbalken ersetzen, wobei sich die Last eines Balkens auf das ganze Gitterwerk vertheilt. Auch giebt man zu diesem Zwecke der Brückenbahn eine schwache Wölbung.

Die Bogenhöhe der Hängebrücken ist in Ansehung der ganzen Brückenlänge meist sehr klein ( $\frac{1}{7}$  bis  $\frac{1}{25}$  der Sehne), daher die Spannung der Seile oder Ketten sehr bedeutend (s. Vd. I); es haben daher auch die Pfeiler, über welche die Seile oder Ketten weggehen, und die Anker, mit denen die Seil- oder Kettenenden an den Ufern befestigt sind, eine bedeutende Kraft auszuhalten, und es sind deshalb Pfeiler von großer Stabilität und Widerlager von bedeutendem Widerstande in Anwendung zu bringen. Die Entfernungen zwischen je zwei Pfeilern macht man, um nicht zu schwere Seilketten zu erhalten und die Pfeiler nicht zu sehr zu belasten, nicht gern über 160 m, doch kommen auch Umstände vor, welche zu größeren Spannweiten nöthigen; es beträgt dieselbe z. B. bei der Menai-Kettenbrücke in England 176 m und bei der Seilbrücke zu Freiburg in der Schweiz sogar 264 m.

Wenn die Kette zu beiden Seiten eines Pfeilers ungleich gespannt wird, was bei einer einseitigen Belastung stets eintritt, so sucht dieselbe über ihrem Lager nach der Seite der größeren Spannung fortzugleiten; da nun aber die Kette mit dem Kopfe des Pfeilers durch die aus der Mittellast der Spannungen entspringende Reibung bis zu einem gewissen Grade verbunden ist, so hat hiernach der Pfeiler einer der Reibung gleichen Seitenkraft durch seine Stabilität zu widerstehen. Aus diesem Grunde hat man denn auch Pfeiler von großen Breiten und Dicken anzuwenden, oder besondere Mittel zu benutzen, um diese Wirkungen der ungleichen Belastung zu ermäßigen. Diese Mittel bestehen entweder darin, daß man die Ketten über Rollen oder Walzen laufen läßt, und dadurch die gleitende Reibung auf eine kleinere Zapfen- oder Walzenreibung zurückführt, oder daß man die Ketten an einen Sector anschließt, welcher, sich auf dem Kopfe des Pfeilers wälzend, sich nach der einen oder nach der anderen Seite hin neigen läßt, oder daß man endlich gar den Pfeiler durch eine Säule ersetzt, welche um eine horizontale Ase drehbar ist. In der Anordnung von Fig. 354 sind die zwei Ketten *AB*, *CD* über gewöhnliche Leitrollen *E*, *E*, *F*, *F* gelegt, in Fig. 355 liegen hingegen die beiden Ketten auf einem gußeisernen Sattel

*EFE*, welcher wieder auf neun gußeisernen Walzen ruht. Diese Walzen werden endlich von einer Fußplatte *GH* unterstützt, die auf dem Kopfe des Kettenpfeilers fest sitzt. Wenn die beiden Ketten auf der einen Seite mehr als auf der anderen belastet sind, so rollt der ganze Sattel sammt den

Fig. 354.

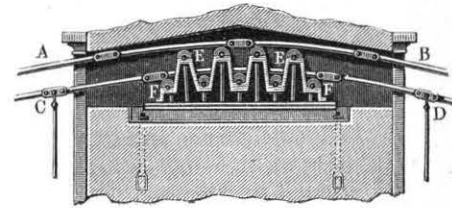
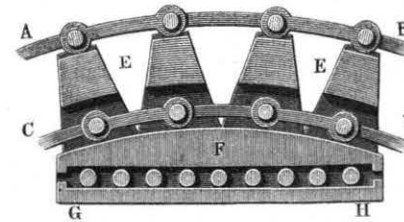
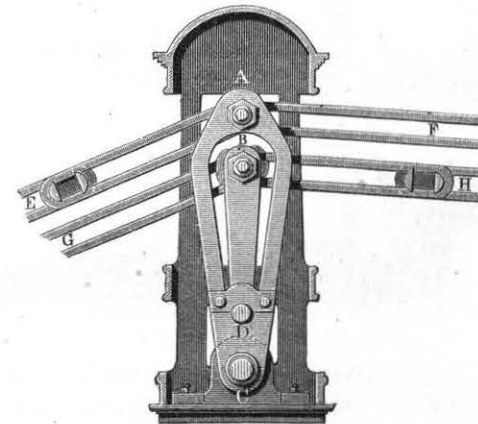


Fig. 355.



die untere Kette *GBH* an einem kleineren Hebel *DB* befestigt ist, dessen Drehungsaxe *D* auf dem ersten Hebel selbst sitzt.

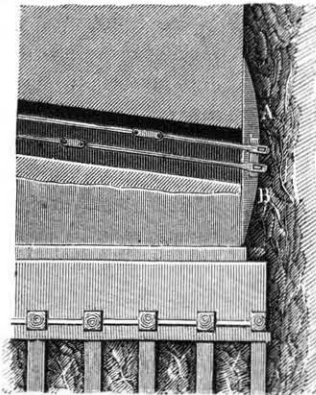
Fig. 356.



daraufliegenden Ketten so weit fort, bis die Spannung der Ketten auf der einen Seite nahezu gleich derjenigen auf der anderen Seite geworden ist. In Fig. 356 ist eine Kettenführung dargestellt, welche bei einer Kettenbrücke über die Maas bei Seraing zur Anwendung gekommen ist. Die obere Kette *EAF* ist hier an einen Hebel *CA* angeschlossen, dessen Drehungsaxe *C* auf dem Kopfe einer gußeisernen Säule ruht, während

Damit die Mittelkraft aus den beiden Spannungen der über einen Pfeiler weggehenden Kette vertical wirke, und so vom Pfeiler am sichersten aufgenommen werde, ist es nöthig, daß die Theile der Kette zu beiden Seiten des Pfeilers gleiche Neigung gegen den Horizont haben. Läßt sich diese Gleichheit nicht herstellen, wie es z. B. bei den Uferpfeilern sehr oft der Fall ist, so muß man die Pfeiler bedeutend verstärken.

Fig. 357.

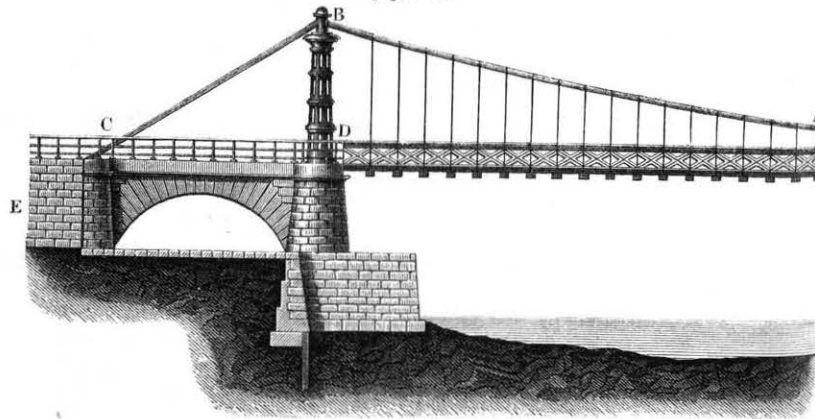


Um die Kettenenden an den Ufern zu verankern, versieht man dieselben mit starken Bolzen und legt diese in Lager, welche auf einer großen und dicken Eisenplatte *AB*, Fig. 357, sitzen, die sich gegen eine dicke Widerlagsmauer, oder gegen ein Gewölbe, oder gar gegen das feste Gestein stemmt. Durch Keile läßt sich dann noch die Kette in gehöriger Spannung erhalten, wenn sie durch Dehnung etwa schlaff geworden ist.

Eine neuere Hängebrückenanlage ist die von Brialmont construirte Kettenbrücke über die Maas bei Seraing.

Die Seitenansicht von einem Stück dieser Brücke führt Fig. 358 vor Augen. Diese Brücke, welche bei einer Breite von 5 m und einer Bogen-

Fig. 358.

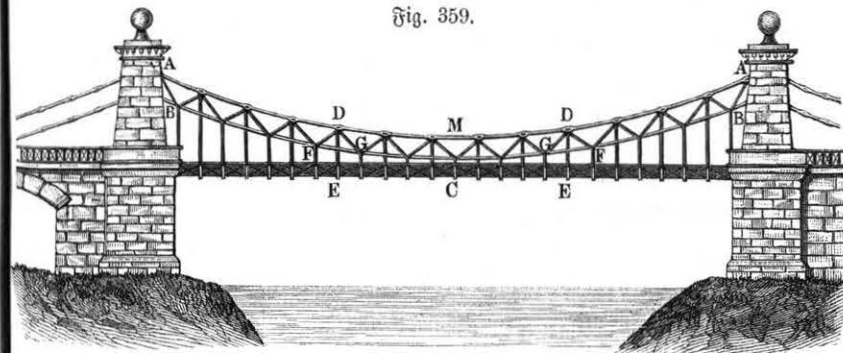


höhe von 7 m, eine Spannweite von 105 m hat, besteht aus acht und zwar auf jeder Seite aus vier nahe über und neben einander liegenden Doppel-

ketten. Die Glieder dieser Ketten, deren Metallbide 25 und Höhe 50 mm mißt, bilden Scheeren oder Ringe von 3 m Länge und 100 mm lichter Weite. Die auf einer Seite neben einander liegenden Doppelketten sind durch 100 mm dicke Bolzen mit einander verbunden, und an die letzteren sind die 3 cm dicken Hängestangen angeschlossen. Die Tragketten *AB* sind mit den Spannketten *BC* durch die in Fig. 356 abgebildeten Hebel verbunden, welche in einem 8 m hohen und aus vier Stücken und einem cylindrischen Kern bestehenden gußeisernen Thurne enthalten sind. Die Befestigung der Kettenenden in der Widerlagsmauer *E* ist ähnlich wie Fig. 357 darstellt. Die ganze Brücke wiegt auf das laufende Meter 1010 kg, und nimmt man die Belastung eben so groß an, so berechnet sich die Spannung der Ketten auf 418910 kg, so daß auf ein Quadratmillimeter derselben eine Spannung von 10 kg kommt. Die Hängestangen sind dagegen nur mit 2 kg und die gußeisernen Pfeiler mit  $2\frac{1}{2}$  kg pro Quadratmillimeter belastet.

Die Eisenbahnkettenbrücke über den Donau-Canal in Wien, ausgeführt von den Ingenieuren Schnirch und Fillunger ist in Fig. 359 skizzirt.

Fig. 359.



Dieselbe besteht aus je zwei durch Diagonalstäbe *DF*, *DG* . . . mit einander verbundenen Hängestangen *AMA* und *BGB*, welche wie gewöhnlich, die Brückenbahn *ECE* mittelst verticaler Hängestangen tragen. Diese Brücke hat eine Spannweite von 264 Wiener Fuß (83,45 m), eine Bogenhöhe von  $13\frac{1}{5}$  Fuß (4,17 m) und trägt eine Fahrbahn mit Doppelgleisen von 35 Fuß Breite. Der Gesamtquerschnitt der Ketten ist 248 Quadratfuß (1720 qem), und der Materialaufwand dieser Brücke besteht aus 7290,8 Ctr. Schmiedeeisen und aus 668 Ctr. Gußeisen.

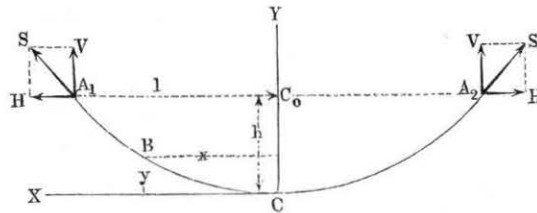
**Theorie der Hängebrücken.** Die Curve, welche von der Kette §. 69. oder dem Seile einer Hängebrücke gebildet wird, hängt wesentlich von der



Art der Belastung ab, dieselbe kommt einer Ellipse sehr nahe und liegt zwischen einer Parabel und einer Kettenlinie, wie diese letzteren Curven sich bezw. ergeben, wenn die Last gleichmäßig entweder über die Horizontalprojection, oder über die Kettenlänge verbreitet ist. Es geht daraus hervor, daß die Kettenbrückenlinie sich bei der belasteten Brücke mehr der Parabel, dagegen bei der unbelasteten Brücke mehr der Kettenlinie nähern wird. Da die Brücken vorzugsweise für den Zustand der Belastung zu untersuchen sind, so rechtfertigt es sich, wenn die Curve der Kette oder des Seils der leichteren Durchführbarkeit der Rechnung wegen als Parabel angesehen wird.

Es sei hier wie für den Bogenträger der Scheitel oder tiefste Punkt  $C$ , Fig. 360, als Koordinatenanfang für verticale und horizontale Axen ge-

Fig. 360.



wählt, und mit  $2l = A_1A_2$  die Spannweite oder horizontale Entfernung der Aufhängepunkte, mit  $h = C_0C$  die Pfeilhöhe der Kette bezeichnet, so hat man unter der gemachten Voraussetzung einer parabelförmigen Kettenlinie deren Gleichung wieder durch

$$y = \frac{h}{l^2} x^2 \quad (1)$$

ausgedrückt. Für irgend einen Punkt  $B$  mit den Abscissen  $x$  und  $y$  ist die Neigung  $\alpha$  gegen den Horizont durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{h}{l^2} 2x = \frac{2y}{x}, \quad (2)$$

also für den Aufhängepunkt  $A_1$  durch

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{2h}{l} \quad (2^a)$$

gegeben. Setzt man wieder ein Bogenelement

$$\partial b = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2} = \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \left(1 + 2 \frac{h^2}{l^4} x^2\right) \partial x,$$

so erhält man die Länge des Kettenbogens zwischen dem Scheitel  $C$  und einem Punkte  $B$  zu

$$b = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^4} x^2\right) x \quad (3)$$

und daher die Länge des halben Bogens  $CA_1$  mit  $x = l$  zu

$$b = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}\right) l \quad (3^a)$$

Die Längen  $\lambda$  der einzelnen Hängestangen vom Scheitel aus nach den Aufhängepunkten hin bestimmen sich aus (1), wenn man darin nach einander für  $x$  die Werthe  $\frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \frac{3l}{n} \dots \frac{nl}{n}$  einführt, unter  $n$  die Anzahl der Intervalle einer Brückenhälfte verstanden. Demgemäß hat die  $v$ te Hängestange, von der Mitte aus gezählt, die Länge

$$\lambda_v = h \left(\frac{v}{n}\right)^2 \quad (4)$$

Die Hängestangen werden durch das Gewicht der von ihnen getragenen Fahrbahn und durch ihr eigenes Gewicht auf Zug in Anspruch genommen, und man erhält daher den nöthigen Querschnitt  $f$  einer solchen Hängestange von der Länge  $\lambda$  aus der Beziehung

$$f s_1 = \frac{l}{n} q + f \lambda \gamma,$$

worin  $\gamma$  das spezifische Gewicht des Eisens,  $s_1$  die zulässige Materialspannung desselben und  $q$  die Belastung der Brückenbahn für die Längeneinheit und die halbe Brückenbreite bedeutet. Daraus folgt der Querschnitt einer Hängestange

$$f = \frac{q l}{n (s_1 - \lambda \gamma)}, \quad (5)$$

wofür man wegen der Kleinheit von  $\lambda \gamma$  im Vergleich zu  $s_1$  genügend genau

$$f = \frac{q l}{n s_1} = \frac{Q}{n s_1} \quad (5^a)$$

setzen kann, unter  $Q$  die Belastung einer Kettenhälfte zwischen dem tiefsten Punkte und einem Aufhängepunkte verstanden. Hieraus folgt das Gewicht aller  $n$  Hängestangen einer Kettenhälfte, wenn man unter  $\lambda$  die mittlere Durchschnittslänge derselben versteht, zu

$$G_1 = n f \lambda \gamma = q \frac{l \lambda}{s_1} \gamma = \frac{Q \lambda \gamma}{s_1} \quad (5^b)$$

Um nun den Querschnitt  $F$  der Tragkette zu ermitteln, hat man die volle Belastung der Brücke über ihre ganze Länge durch die größte Last  $2Q = 2lq = 2l(p + k)$  vorzusetzen. Die Tragkette hat dann

außer dieser Last  $2Q$  noch das Gewicht  $2G_1$  der Hängestangen und ihr eigenes Gewicht  $2G$  zu tragen, welches letztere mit Rücksicht auf (3<sup>a</sup>) sich zu

$$2G = F2b\gamma = 2Fl\gamma \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}\right) \dots (6)$$

bestimmt.

In jedem Aufhängepunkte  $A_1$  und  $A_2$  hat man daher einen verticalen Auflagerdruck  $V$  gleich der Belastung der halben Kette  $Q + G + G_1$ , und da  $V = S \sin \alpha_1$  und  $H = S \cos \alpha_1$  ist, unter  $S$  die Endspannung der Kette verstanden, so folgt zunächst diese Spannung

$$S = \frac{V}{\sin \alpha_1} = \frac{Q + G + G_1}{\sin \alpha_1}, \dots (7)$$

sowie der horizontale Zug der Kette

$$H = V \cotg \alpha_1 = (Q + G + G_1) \cotg \alpha_1 = (Q + G + G_1) \frac{l}{2h}. \quad (8)$$

Führt man in (7) für  $G_1$  und  $G$  die Werthe aus (5<sup>b</sup>) und (6) ein, und setzt  $S = Fs$ , so erhält man

$$S \sin \alpha_1 = Fs \sin \alpha_1 = Q \left(1 + \frac{\lambda \gamma}{s_1}\right) + Fb\gamma,$$

woraus der erforderliche Kettenquerschnitt zu

$$F = \frac{Q}{s_1} \frac{s_1 + \lambda \gamma}{s \sin \alpha_1 - b\gamma} \dots (9)$$

folgt, in welche Gleichung man für  $b$  den Werth aus (3<sup>a</sup>) und nach (2<sup>a</sup>):

$$\sin \alpha_1 = \frac{tg \alpha_1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha_1}} = \frac{2h}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} \dots (10)$$

einführen kann. Hat man hieraus  $F$  und damit nach (6) das Gewicht  $G$  der halben Kette bestimmt, so findet man aus (8) den Horizontalzug  $H$ , welcher auch die Spannung im tiefsten Punkte  $C$  der Kette angiebt.

Man kann einer Hängebrücke dadurch eine größere Steifigkeit gegen Schwingungen ertheilen, daß man die Brückenbahn nicht durch verticale, sondern mit Hülfe geneigter Hängestangen an die Tragketten anhängt, derart, daß vom tiefsten Punkte  $C$  der Kette, Fig. 361, die Hängestangen wie  $NO$ ,  $DA$  nach beiden Seiten symmetrisch gegen die Verticale unter dem Winkel  $\beta$  geneigt sind. Bezeichnet hier  $CD_1 = CD_2 = l_1$  die halbe Länge der Brücke, und  $C_0A_1 = C_0A_2 = l$  die halbe Entfernung der Aufhängepunkte  $A_1$  und  $A_2$ , welche um die Höhe  $CC_0 = h$  über dem tiefsten Punkte der Kette gelegen sind, so hat man zunächst

$$l_1 = l - h \cotg \beta,$$

und die Länge der äußersten Hängestange  $A_1D_1 = A_2D_2$ :

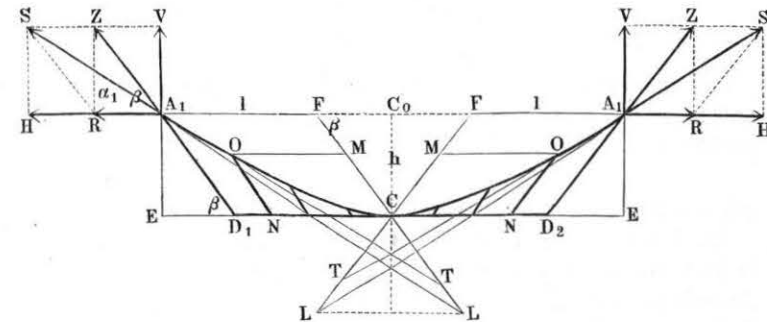
$$h_1 = \frac{h}{\sin \beta}.$$

Bezeichnet wieder  $n$  die Felderzahl der halben Brücke  $CD_1$ , so wirkt auf jede Hängestange ein verticales Gewicht  $\frac{l_1}{n} q$ , welches in der Hängestange eine Zugkraft

$$Z = \frac{l_1 q}{n \sin \beta} \dots (11)$$

hervorruft. Mit diesen Zugkräften  $Z$  greifen die Hängestangen die Tragkette an, und es ergibt sich, daß jede Kettenhälfte  $A_1C$  und  $A_2C$  in Folge

Fig. 361.



dieser parallelen Kräfte von gleicher Größe und gleichen gegenseitigen Abständen gleichfalls die Gestalt einer Parabel annehmen wird, für welche die durch den tiefsten Punkt  $C$  parallel der Zugstange  $D_1A_1$  gezogene Richtung  $CF$  einen Durchmesser darstellt. Daher ist für jeden Punkt wie  $O$  die Subtangente  $MT$  gleich der doppelten, in der Richtung von  $CF$  gemessenen Abcisse  $ON$ , und die Tangente an die Parabel in  $A_1$  schneidet den Durchmesser  $CF$  in einem Punkte  $L$  so, daß

$$FL = 2A_1D_1 = 2h_1 = \frac{2h}{\sin \beta}$$

ist. Bezeichnet man daher wieder mit  $\alpha_1$  den Neigungswinkel der Kette in  $A_1$  gegen den Horizont, so hat man aus dem Dreiecke  $FA_1L$ :

$$\frac{\sin FLA_1}{\sin FA_1L} = \frac{\sin(\beta - \alpha_1)}{\sin \alpha_1} = \frac{FA_1}{FL} = \frac{l_1}{2h_1},$$

woraus man

$$\cotg \alpha_1 = \cotg \beta + \frac{l_1}{2h_1 \sin \beta}$$

folgt. Setzt man hierin  $\cotg \beta = \frac{E D_1}{E A_1} = \frac{l - l_1}{h}$  und  $h_1 \sin \beta = h$ , so erhält man auch für den Winkel  $\alpha_1$ :

$$\tg \alpha_1 = \frac{2h}{2l - l_1} \quad (2^b)$$

Der Verticaldruck  $V$  in jedem Aufhängepunkte  $A_1$  und  $A_2$  bestimmt sich auch hier gleich der Belastung einer halben Brücke zu

$$V = Q + G + G_1,$$

und daher die Kettenspannung am Ende zu

$$S = \frac{V}{\sin \alpha_1} = \frac{Q + G + G_1}{\sin \alpha_1}, \quad (7)$$

sowie der horizontale Kettenzug zu

$$H = V \cotg \alpha_1 = \frac{Q + G + G_1}{\tg \alpha_1} = (Q + G + G_1) \frac{2l - l_1}{2h}. \quad (8^a)$$

Jede Hängestange übt hier auf die Brückenbahn  $CD_1$  einen nach außen gerichteten Zug  $Z \cos \beta$  aus, so daß jede Brückenhälfte durch eine Horizontalkraft

$$H_1 = Q \cotg \beta \quad (11^a)$$

gespannt wird, wodurch die Durchbiegung der Bahn sich vermindert.

Die Tragketten werden durch die angehängte Last verlängert und nehmen in Folge davon auch eine größere Bogenhöhe an; gleichfalls geht aus der Temperaturveränderung eine Veränderung der Bogenlänge  $b$  und damit der Pfeilhöhe  $h$  hervor. Wenn die letztere aus  $h$  in  $h'$  übergeht, so hat sich die Bogenlänge

$$b = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}\right) l$$

in

$$b' = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h'^2}{l^2}\right) l,$$

also um

$$\sigma = b' - b = \frac{2}{3} \frac{h'^2 - h^2}{l}$$

vergrößert, daher hat man, wenn man die Veränderung der Pfeilhöhe  $h' - h = \eta$  und annähernd  $h' + h = 2h$  setzt, die Verlängerung der halben Kette

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{h}{l} \eta,$$

sowie umgekehrt

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \sigma \quad (12)$$

Die Spannung der Kette ist nun für verschiedene Punkte verschieden und variiert nach (7) und (8) zwischen  $H = V \cotg \alpha_1$  im Scheitel und  $S = \frac{V}{\sin \alpha_1}$  an den Enden. Nimmt man dafür überall eine mittlere Spannung

$$S_0 = \frac{H + S}{2} = V \frac{1 + \cos \alpha_1}{2 \sin \alpha_1}$$

an, so erhält man daraus für den halben Kettenbogen  $b$  eine elastische Verlängerung

$$\sigma = \frac{S_0}{FE} b = \frac{V}{FE} \frac{1 + \cos \alpha_1}{2 \sin \alpha_1} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{h^2}{l^2}\right) l,$$

wofür annähernd

$$\sigma = \frac{V l}{FE \sin \alpha_1} \quad (13)$$

gesetzt werden kann. Mit diesem Werthe für die Verlängerung  $\sigma$  erhält man daher aus (12) die durch die Belastung  $V$  hervorgerufene Vergrößerung der Bogenhöhe:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{V}{FE \sin \alpha_1} \frac{l^2}{h} \quad (14)$$

oder, wenn man  $\sin \alpha_1 = \frac{2h}{\sqrt{l^2 + 4h^2}} =$  annähernd  $\frac{2h}{l}$  setzt:

$$\eta = \frac{3}{8} \frac{V}{FE} \frac{l^3}{h^2} \quad (14^a)$$

Um die Veränderung der Bogenhöhe  $h$  bei einer Temperaturveränderung von  $\pm t^\circ \text{C.}$  zu ermitteln, hat man nur die hierdurch hervorgerufene Längenänderung der halben Kette von  $\pm 0,000012 \text{ } b t$  in den Ausdruck (12) für  $\sigma$  einzuführen, und erhält die gesuchte Veränderung der Bogenhöhe zu

$$\eta_t = \pm \frac{3}{4} \frac{l}{h} 0,000012 \text{ } b t = \pm 0,000009 \text{ } t \frac{lb}{h} \quad (14^b)$$

Beispiel. Es sind für eine Hängebrücke mit verticalen Hängestangen bei einer Spannweite von 40 m und einer Bogenhöhe von 4 m die Querschnittsverhältnisse zu ermitteln, wenn die auf jede Kette entfallende halbe Brückenbahn ein Eigengewicht von 1000 kg pro laufenden Meter hat und eine zufällige Belastung durch Menschengedränge von 1200 kg pro laufenden Meter für jede Tragkette zu rechnen ist, und wenn die höchste Materialspannung in den Tragketten den Werth  $s = 10 \text{ kg}$ , diejenige in den Hängestangen dagegen nur denjenigen  $s_1 = 2 \text{ kg}$  nicht übersteigen soll?

Nimmt man die Entfernung der Hängestangen zu 1 m an, so hat jede derselben eine Last von  $1000 + 1200 = 2200 \text{ kg}$  zu tragen, und daher bestimmt sich der Querschnitt  $f$  einer Stange (5a) zu  $\frac{2200}{2} = 1100 \text{ qmm}$ , daher der



Durchmesser des Rundeisens zu 37,5 mm. Nimmt man den Regeln für die Quadratur der Parabel zufolge die mittlere Länge der Hängestangen zu  $\lambda = \frac{h}{3} = 1,333$  m und das spezifische Gewicht des Eisens zu 7,6 an (1 cbmm = 0,0000076 kg), so erhält man nach (5b) das Gewicht der 20 Hängestangen einer halben Kette zu:

$$G_1 = 20 \cdot 1100 \cdot 1,333 \cdot 0,0000076 = 223 \text{ kg.}$$

Die Last  $Q$  für eine halbe Kette ist ferner:

$$Q = 20 \cdot (1000 + 1200) = 44000 \text{ kg.}$$

Ferner hat man die Länge  $b$  einer halben Kette gleich:

$$b = \left(1 + \frac{2}{3} \frac{4 \cdot 4}{20 \cdot 20}\right) 20 = \frac{77}{75} 20 = 20,533 \text{ m,}$$

und den Neigungswinkel  $\alpha_1$ :

$$\sin \alpha_1 = \frac{2 \cdot 4}{\sqrt{400 + 64}} = 0,3714; (\alpha_1 = 21^\circ 50'),$$

und man erhält daher den Querschnitt der Tragkette nach (9) zu:

$$F = \frac{44000}{2} \frac{2 + 1333 \cdot 0,0000076}{10 \cdot 0,3714 - 20533 \cdot 0,0000076} = 22000 \frac{2,010}{3,714 - 0,156} = 12429 \text{ qmm,}$$

welchen Querschnitt man etwa durch vier Flacheisenstäbe von je 25 mm Stärke und 125 mm Höhe erreichen kann. Das Gewicht  $G$  einer halben Kette bestimmt sich daher zu:

$$G = 12429 \cdot 20533 \cdot 0,0000076 = 1940 \text{ kg,}$$

so daß man in jedem Aufhängepunkte den Verticaldruck:

$$V = 44000 + 1940 + 223 = 46163 \text{ kg,}$$

und den Horizontalzug nach (8):

$$H = 46163 \frac{20}{2 \cdot 4} = 115408 \text{ kg}$$

erhält.

Nimmt man den Elasticitätsmodul des Ketten eisens zu  $E = 20000$  an, so erhält man nach (14) die elastische Vergrößerung der Pfeilhöhe  $h$  durch die Belastung zu:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{46163}{12429 \cdot 20000 \cdot 0,3714} \frac{20000^2}{4000} = 37,5 \text{ mm.}$$

Für jeden Grad der Temperaturdifferenz ermittelt sich diese Veränderung nach (14b) zu:

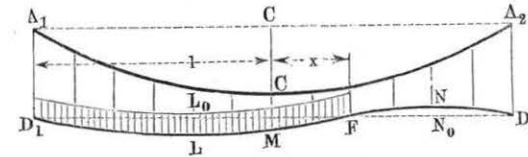
$$\eta_t = \pm 0,000009 \frac{20 \cdot 20533}{4} = \pm 0,92 \text{ mm.}$$

also beispielsweise für  $30^\circ \text{ C.}$  zu circa 28 mm.

§. 70. Fortsetzung. Für die einseitige Belastung der Hängebrücke, Fig. 362, lassen sich die Biegungsverhältnisse nach Rankine unter der Voraussetzung ermitteln, daß durch die mobile Last auf der nur an den Enden  $D_1$  und  $D_2$  festgehaltenen Brückenbahn die parabolische Form der Kette nicht wesentlich

verändert werde. Denkt man sich, daß die bewegliche Last, welche wie bisher den Betrag  $k$  pro Längeneinheit haben möge, die Brücke von  $D_1$  bis  $F$  auf eine Länge  $l + x$  bedecke, so vertheilt sich diese Last  $k(l + x)$  nach der

Fig. 362.



gemachten Voraussetzung über die ganze Tragkette  $A_1 C A_2$  und man hat für die Hängestangen derselben pro Längeneinheit eine Spannung:

$$k_0 = k \frac{l + x}{2l}$$

zu rechnen. Mit den dieser Spannung entsprechenden Zugkräften werden daher die Hängestangen die Brückenbahn nach oben zu biegen streben und das unbelastete Stück  $D_2 F$  auch thatsächlich biegen, während das belastete Stück  $A_1 F$  wegen des Uebergewichtes von  $k$  über  $k_0$  convex nach unten gebogen wird. Man kann sich daher die beiden Balkenstrecken  $D_1 F$  und  $D_2 F$  wie zwei auf Stützen frei aufliegende Balken von den Längen  $l + x$  und  $l - x$  vorstellen, welche durch die gleichmäßig vertheilten spezifischen Belastungen  $k - k_0$  und bezw.  $k_0$  nach entgegengesetzten Richtungen gebogen werden. Man erhält die gesammte Größe dieser Lasten für beide Strecken gleich, nämlich für  $D_2 F$  zu:

$$(l - x) k_0 = (l - x) k \frac{l + x}{2l} = k \frac{l^2 - x^2}{2l} = K_0,$$

und für  $D_1 F$  ebenfalls zu:

$$(l + x) (k - k_0) = (l + x) k \left(1 - \frac{l + x}{2l}\right) = k \frac{l^2 - x^2}{2l} = K_0 \quad (15)$$

Diese Kraft  $K_0$  und also auch die Abscheerungskraft  $\frac{K_0}{2}$  in  $F$  erreicht ihr Maximum für  $x = 0$ , d. h. wenn die Hälfte der Brücke mit der mobilen Last bedeckt ist.

Die größten Biegemomente für die beiden Strecken  $D_1 F$  und  $D_2 F$  stellen sich in deren Mitten  $L$  und  $N$  ein, und zwar berechnen sich dieselben bekanntlich für die belastete Strecke  $D_1 F$  zu:

$$M_L = K_0 \frac{l + x}{8} = k \frac{(l + x) (l^2 - x^2)}{16l} \quad (16)$$

und für die unbelastete Strecke  $D_2 F$  zu:

$$M_n = K_0 \frac{l-x}{8} = k \frac{(l-x)(l^2-x^2)}{16l} \quad \dots \quad (16^a)$$

Durch Differenzieren überzeugt man sich leicht, daß  $M_l$  ein Maximum wird für  $x = +\frac{l}{3}$  und  $M_n$  für  $x = -\frac{l}{3}$ , und zwar wird für diese Werthe:

$$M_{max} = \pm \frac{2}{27} l^2 k \quad \dots \quad (16^b)$$

Wenn daher die Brückenbahn zu  $l+x = \frac{4}{3}l$  oder zu  $\frac{2}{3}$  ihrer Länge belastet ist, so ist die belastete Strecke dem größten Biegemomente ausgesetzt. Die Kraft  $K_0$  bestimmt sich in diesem Falle zu

$$K_0 = k \frac{8l^2}{9 \cdot 2l} = \frac{4}{9} kl,$$

und die Durchbiegungen der beiden Strecken  $D_1F$  und  $D_2F$  ergeben sich nach §. 35, 4 zu:

$$f_1 = \frac{5}{8} K_0 \frac{\left(\frac{4}{3}l\right)^3}{48TE} = \frac{10}{729} \frac{kl^4}{TE} \quad \dots \quad (17)$$

und

$$f_2 = \frac{5}{8} K_0 \frac{\left(\frac{2}{3}l\right)^3}{48TE} = \frac{5}{2916} \frac{kl^4}{TE} = \frac{1}{8} f_1 \quad \dots \quad (17^a)$$

Ist andererseits die Brückenbahn nur auf  $\frac{1}{3}$  ihrer ganzen Länge belastet, so findet sich die größte Beanspruchung des unbelasteten Stückes, welches nunmehr eine Durchbiegung gleich  $f_1$  nach oben annimmt, während die belastete Strecke sich nur um  $f_2 = \frac{1}{8} f_1$  nach unten durchbiegt.

Bei den Kettenbrücken ist es von besonderem Interesse, die Wirkung von Stößen und Erschütterungen zu untersuchen, wie solche z. B. dadurch entstehen, daß geschlossene Menschenmassen, wie Truppenkörper, im tactmäßigen Schritte über die Brücke marschiren. Dadurch kann, wie die folgende Rechnung ergeben wird, die Sicherheit der Brücke bedenklich gefährdet werden.

Es sei wieder  $p$  das Gewicht der ruhenden Belastung der Brückenbahn pro Längeneinheit und angenommen, daß eine Verkehrslast  $k$  pro Längeneinheit längs der ganzen Brücke in einem gewissen Augenblicke mit der Geschwindigkeit  $v$  auf die Bahn aufschlage. Nach den Gesetzen des Stoßes werden unmittelbar nach dem Aufschlagen die Gewichte  $p+k$  mit einer Geschwindigkeit:

$$w = \frac{kv}{p+k}$$

niederstinken, und es ist vermöge dieser Geschwindigkeit in den Massen der ganzen Brückenbahn ein Arbeitsvermögen:

$$2l(p+k) \frac{w^2}{2g} = 2l \frac{k^2}{p+k} \frac{v^2}{2g} = A \quad \dots \quad (18)$$

enthalten. Dieses Arbeitsvermögen wird dazu aufgebraucht, in den Hängestangen und der Tragkette gewisse Ausdehnungen hervorzubringen. Bekanntlich berechnet sich die durch die Kraft  $P$  einer Stange vom Querschnitte  $F$  und der Länge  $l$  erteilte Ausdehnung zu:

$$\sigma = \frac{Pl}{FE},$$

und die zur Ausdehnung aufgewendete Arbeit zu:

$$A_0 = P \frac{\sigma}{2} = \frac{P^2 l}{2FE}.$$

Bezeichnet man demgemäß mit  $F_2$  den Querschnitt aller Hängestangen und mit  $\lambda$  die mittlere Länge derselben, ferner mit  $P$  die Kraft, mit welcher die sämtlichen Hängestangen durch den Stoß gespannt werden, so ist den Hängestangen eine Ausdehnung:

$$\sigma_2 = \frac{P\lambda}{F_2 E} \quad \dots \quad (19)$$

erteilt und dazu eine Arbeit:

$$A_2 = \frac{P\sigma_2}{2} = \frac{P^2 \lambda}{2F_2 E} \quad \dots \quad (18^a)$$

verwendet.

Durch die Kraft  $P$ , mit welcher sämtliche Hängestangen in Folge des Stoßes gespannt werden, wird in der Kette eine Spannung erzeugt, welche an den Aufhängenpunkten durch:

$$S = \frac{P}{2 \sin \alpha_1}$$

gegeben ist.

Nimmt man hier die Spannung für alle Punkte der Kette von derselben Größe  $S$  an, so erlangt man für die Kette von der Länge  $2b$ , wenn deren Querschnitt  $F_1$  ist, eine Längenausdehnung:

$$2\sigma_1 = \frac{S 2b}{F_1 E} = \frac{P b}{\sin \alpha_1 F_1 E} \quad \dots \quad (20)$$

wozu eine Arbeit erforderlich gewesen ist von:

$$A_1 = \frac{S 2\sigma_1}{2} = \frac{1}{4} \frac{P^2 b}{\sin^2 \alpha_1 F_1 E} \quad \dots \quad (18^b)$$

Setzt man nun  $A = A_1 + A_2$ , so erhält man aus:

$$2l \frac{k^2 v^2}{p+k} \frac{1}{2g} = P^2 \left( \frac{b}{4 \sin^2 \alpha_1 F_1 E} + \frac{\lambda}{2 F_2 E} \right) = P^2 u: \\ P = \sqrt{\frac{k^2 v^2 l}{p+k} \frac{1}{gu'}} \quad \dots \quad (21)$$

wenn der Kürze wegen der Ausdruck:

$$\frac{b}{4 \sin^2 \alpha_1 F_1 E} + \frac{\lambda}{2 F_2 E} = u$$

gesetzt wird.

Die mittlere Senkung der Brückenbahn in Folge der Ausdehnung der Hängestäbe beträgt nach (19):

$$\sigma_2 = \frac{P \lambda}{F_2 E}, \quad \dots \quad (22)$$

und die mittlere Senkung derselben in Folge der Ausdehnung der Tragkette hat man nach (12) zu:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \sigma_1 = \frac{3}{8} \frac{l}{h} \frac{P b}{\sin \alpha_1 F_1 E} \quad \dots \quad (23)$$

Vernachlässigt man die Ausdehnung  $\sigma_2$  der Hängestäbe, so wird nach (21):

$$P = \sqrt{\frac{k^2 v^2 l}{p+k} \frac{4 \sin^2 \alpha_1 F_1 E}{b}} \quad \dots \quad (23^a)$$

und daher:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l}{h} \sqrt{\frac{k^2 v^2 l}{p+k} \frac{1}{g F_1 E}} \quad \dots \quad (24)$$

oder annähernd, wenn man  $b = l$  setzt:

$$\eta = \frac{3}{4} \frac{l^2}{h} \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k} \frac{1}{g F_1 E}} \quad \dots \quad (24^a)$$

Wenn man sich vorstellt, daß in dem vorgedachten Falle einer tactmäßigen Bewegung von Menschen der hier betrachtete Stoß  $n$  mal hinter einander und zwar immer dann stattfindet, wenn die Brücke in Folge des vorhergegangenen Stoßes die größte Durchsenkung  $\eta$  erlangt hat, so ist die aufgewendete Stoßarbeit:

$$n A = n l \frac{k^2 v^2}{p+k} \frac{1}{g},$$

und folglich beträgt nunmehr die Senkung:

$$\eta' = \eta \sqrt{n} \quad \dots \quad (25)$$

Die hierbei erfolgende Ausdehnung der Kette ist nach (20) und (23<sup>a</sup>):

$$2 \sigma' = \frac{P b}{\sin \alpha_1 F_1 E} = \sqrt{\frac{k^2 v^2 4 l b n}{p+k} \frac{1}{g F_1 E}}$$

annähernd

$$= 2l \sqrt{\frac{k^2 v^2 n}{p+k} \frac{1}{g F_1 E}} \quad \dots \quad (26)$$

und die Spannung der Kette:

$$S' = \frac{2 \sigma'}{2b} F_1 E = \sqrt{\frac{k^2 v^2 n F_1 E}{p+k} \frac{1}{g}} \quad \dots \quad (27)$$

Selbstverständlich sind die Abmessungen ( $F_1$ ) der Kette so zu wählen, daß die Summe der Spannungen, welche aus der ruhenden Belastung und aus den Erschütterungen sich ergeben, den für das Material höchstens zulässigen Betrag nicht überschreitet.

Beispiel. Wenn bei der in dem Beispiele des vorigen Paragraphen berechneten Kettenbrücke vorausgesetzt wird, daß die Verkehrslast (Menschengedränge) nicht ruhend sei, sondern mit einer Geschwindigkeit  $v = 1$  m aufschlage, so hat man mit  $p = 1000$  kg und  $k = 1200$  kg:

$$\frac{k^2}{p+k} = 655,$$

und da der Querschnitt der Kette zu 12429 qmm gefunden wurde, so folgt mit  $E = 20000$  die Verlängerung der Tragkette in Folge eines Stoßes der Masse nach (26):

$$2 \sigma' = 2l \sqrt{\frac{k^2 v^2}{p+k} \frac{1}{g F_1 E}} = 40 \sqrt{655 \frac{1}{9,81 \cdot 12429 \cdot 20000}} = 0,0208 \text{ m.}$$

Demgemäß ist die entsprechende Vergrößerung der Kettenspannung pro Quadratmillimeter Querschnitt, da die Länge der ganzen Kette zu  $2b = 2 \cdot 20,533$  m ermittelt wurde, gleich

$$\sigma' = \frac{0,0208}{2 \cdot 20,533} \cdot 20000 = 10,13 \text{ kg.}$$

Da durch die ruhende Belastung die Ketten nur mit einer spezifischen Spannung von  $s = 10$  kg beansprucht werden, so erkennt man hieraus, wie durch den gedachten Stoß die Anstrengung mehr als verdoppelt wird. Nimmt man etwa an, daß das Ketteneisen bei einer Spannung von 40 kg zerrissen werde, so würde demnach eine durch Stoßwirkungen hervorgerufene zusätzliche Anstrengung von  $40 - 10 = 30$  kg pro Quadratmillimeter den Bruch herbeiführen, und hierzu würde eine Anzahl  $n$  solcher aufeinander folgenden Stöße genügen, welche sich aus:

$$30 = 10,13 \sqrt{n}$$

zu

$$n = \left( \frac{30}{10,13} \right)^2 = 8,76 \sim 9$$

ermittelt.

Anmerkung. Damit eine Hängebrücke den Wirkungen der beweglichen Last den nöthigen Widerstand entgegensetzen könne, versteht man die Brückenbahn



wohl mit besonderen Tragwänden, welche die in einzelnen Punkten wirkenden Lasten auf eine größere Länge der Kette verteilen. Diese Träger sind bei der gänzlich belasteten, sowie bei der vollständig leeren Brücke gar nicht beansprucht, indem für diese Belastungszustände die Gewichte durch die Hängestangen direct auf die Ketten übertragen werden, und die Träger sind daher nur auf die einseitigen Belastungen zu berechnen. Auch pflegt man wohl die Brücken mit Zugseilen zu versehen, welche von der Brückenbahn nach dem Boden oder den Brückenpfeilern herabgehen, wie z. B. bei der Niagarabrücke; ferner wendet man wohl unterhalb eine Gegenkette an, welche durch aufwärtsgehende Zugstangen mit der Brückenbahn verbunden wird. Desgleichen vergrößert man die Steifigkeit einer Hängebrücke dadurch, daß man zwei Tragketten über einander hängt und dieselben unter einander verstrebt, wie einen Fachwerksträger.

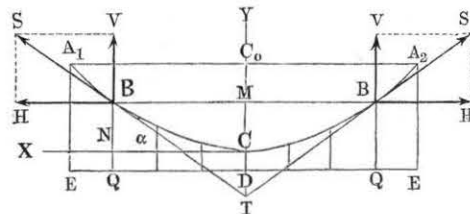
§. 71. Ketten von gleichem Widerstande. Da die Spannung der Tragketten einer Brücke von unten nach oben allmähig zunimmt, so sollte man auch den Querschnitt dieser Ketten vom Scheitel nach den Aufhängepunkten hin entsprechend größer werden lassen. Gewöhnlich sucht man dieser Forderung annähernd dadurch zu genügen, daß man entweder die Anzahl oder die Dicke der Schienen in den einzelnen Kettengliedern nach den Aufhängepunkten hin vergrößert. Streng genommen hätte man den Ketten die Form von Körpern gleichen Widerstandes zu geben, für welche die Forderung zu stellen ist, daß für jeden Punkt, dessen Querschnitt  $F$  und in welchem die Spannung  $S$  ist, die Bedingung:

$$\frac{S}{F} = s = \text{const.}$$

gilt, wenn wieder  $s$  die zulässige Materialspannung pro Flächeneinheit bedeutet.

Es seien  $CN = x$  und  $CM = y$ , Fig. 363, die Ordinaten des Punktes  $B$  des Kettenbogens, dessen Tangente  $BT$  den Winkel  $\alpha$  mit der

Fig. 363.



horizontalen  $X$ -Axe bildet, so hat man, unter  $F$  den Querschnitt der Kette daselbst und unter  $\gamma$  das spezifische Gewicht derselben verstanden, das Gewicht eines Bogenelementes  $\partial b$  durch  $F \partial b \cdot \gamma$  und daher das Gewicht des Bogenstückes  $CB$  durch:

$$G = \gamma \int F \partial b = \frac{\gamma}{s} \int S \partial b$$

ausgedrückt.

Wenn daher das Gewicht der Brückenbahn pro laufenden Meter durch  $q$  bezeichnet wird, so ist die Vertikalkraft in  $B$ :

$$V = \frac{\gamma}{s} \int S \partial b + qx, \quad \dots \quad (28)$$

oder, da

$$S = \frac{H}{\cos \alpha} = H \frac{\partial b}{\partial x}$$

ist, wenn  $H$  den constanten Horizontalzug bedeutet, so folgt auch:

$$V = \frac{\gamma H}{s} \int \frac{\partial b^2}{\partial x} + qx, \quad \dots \quad (29)$$

woraus ferner

$$\frac{V}{H} = \text{tg } \alpha = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\gamma}{s} \int \frac{\partial b^2}{\partial x} + \frac{qx}{H}$$

sich ergibt. Durch Differentiiren erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\gamma}{s} \frac{\partial b^2}{\partial x} + \frac{q}{H} \partial x = \frac{\gamma}{s} \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial x} + \frac{q}{H} \partial x \\ &= \frac{\gamma}{s} \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \partial x + \frac{q}{H} \partial x \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \text{tg } \alpha}{\partial x} = \frac{\frac{\gamma}{s} + \frac{q}{H} + \frac{\gamma}{s} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2}{\frac{\gamma}{s} + \frac{q}{H} + \frac{\gamma}{s} \text{tg}^2 \alpha}$$

Da im Scheitel  $C$  die Spannung gleich  $H$  ist, so kann man, wenn  $F_0$  den Querschnitt der Kette daselbst bedeutet,  $H = F_0 s$  setzen, und erhält, wenn man noch

$$\frac{q}{F_0} = \gamma_1 \quad \dots \quad (30)$$

einführt:

$$\frac{\partial \text{tg } \alpha}{\partial x} = \frac{s \cdot \partial \text{tg } \alpha}{\gamma + \gamma_1 + \gamma \text{tg}^2 \alpha}, \quad \dots \quad (31)$$

welcher Ausdruck zu integrieren ist, um die Gleichung für die Kettenbrückenlinie zu finden. Es kann bemerkt werden, daß der Gleichung  $q = F_0 \gamma_1$  zufolge unter  $\gamma_1$  das spezifische Gewicht desjenigen Körpers zu denken ist, welcher bei einer Grundfläche  $F_0$  gleich dem Kettenquerschnitte im Scheitel und bei einer Höhe von 1 m ein Gewicht hat, das gerade gleich der Be-

lastung  $q$  von 1 laufenden Meter Brücke ist. Um obige Gleichung zu integrieren, schreibt man sie:

$$\begin{aligned} \partial x &= \frac{s \cdot \partial \operatorname{tg} \alpha}{(\gamma + \gamma_1) \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg}^2 \alpha\right)} \\ &= \frac{s \cdot \partial \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)} \left[1 + \left(\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg} \alpha}\right)^2\right]} \\ &= \frac{s}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}} \frac{\partial u}{1 + u^2}, \end{aligned}$$

wenn der Kürze wegen  $\sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg} \alpha} = u$  gesetzt wird. Da nun aber bekanntlich:

$$\int \frac{\partial u}{1 + u^2} = \operatorname{arc.} \operatorname{tg} u$$

ist, so hat man im vorliegenden Falle:

$$x = \frac{s}{\sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}} \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg} \alpha}, \quad \dots \quad (32)$$

sowie umgekehrt:

$$\operatorname{tg} \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + \gamma_1} \operatorname{tg} \alpha},$$

d. i.:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}} \operatorname{tg} \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \dots \quad (33)$$

Die Integrationsconstante ist Null, weil für  $x=0$  auch  $\alpha=0$  ist. Diese Gleichung:

$$\partial y = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}} \operatorname{tg} \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} \partial x$$

liefert durch nochmalige Integration vermöge der bekannten Integralfornel:

$$\int \operatorname{tg} w \partial w = -\log \operatorname{nat} \cos w = \ln \frac{1}{\cos w} = \ln \sec w,$$

$$y = \frac{s}{\gamma} \log \operatorname{nat} \sec \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s}, \quad \dots \quad (34)$$

wobei ebenfalls die Constante Null ist, weil für  $x=0$  auch  $y=0$  sein muß, was der Fall ist, da  $\sec 0 = 1$  und  $\log \operatorname{nat} 1 = 0$  ist. Diese

Gleichung (34) kann dazu dienen, für jedes  $x$  das zugehörige  $y$  zu ermitteln, wenn  $\gamma_1 = \frac{q}{F_0}$  gegeben ist.

Sind die Coordinaten  $x$  und  $y$  gegeben, so kann man  $\gamma_1$  wie folgt bestimmen. Es ist, unter  $e$  die Grundzahl des natürlichen Logarithmen-systems verstanden, nach (34):

$$\sec \frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = e^{\frac{\gamma}{s} y}.$$

Setzt man den Bogen:

$$\frac{x \sqrt{\gamma(\gamma + \gamma_1)}}{s} = \psi, \quad \dots \quad (35)$$

also

$$\log \operatorname{nat} \sec \psi = \frac{\gamma}{s} y,$$

so folgt

$$\gamma + \gamma_1 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{s \psi}{x}\right)^2,$$

und daher

$$\gamma_1 = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{s \psi}{x}\right)^2 - \gamma = \left[\left(\frac{s \psi}{\gamma x}\right)^2 - 1\right] \gamma. \quad \dots \quad (36)$$

Hieraus bestimmt sich weiter der Querschnitt  $F_0$  der Kette im Scheitel:

$$F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{q}{\gamma \left[\left(\frac{s \psi}{\gamma x}\right)^2 - 1\right]} \quad \dots \quad (37)$$

und die Horizontalspannung:

$$H = F_0 s = \frac{q s}{\gamma \left[\left(\frac{s \psi}{\gamma x}\right)^2 - 1\right]} \quad \dots \quad (38)$$

Ferner hat man bekanntlich für jeden Punkt der Kette die Verticalspannung:

$$V = H \operatorname{tg} \alpha,$$

die Tangentialspannung:

$$S = \frac{H}{\cos \alpha}$$

und den Querschnitt:

$$F = \frac{S}{s} = \frac{H}{s \cos \alpha} = \frac{F_0}{\cos \alpha},$$

wobei sich  $\alpha$  einfach nach (33) und (35) durch

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\gamma + \gamma_1}{\gamma}} \operatorname{tg} \psi \quad \dots \quad (39)$$

bestimmen läßt.

Das Gewicht  $G = \frac{\gamma}{s} \int S \, db$  des Kettenstückes  $CB$  ist endlich gefunden durch (28) zu:

$$G = V - qx = H \operatorname{tg} \alpha - qx. \quad (40)$$

Die Aufgabe wird durch die vorstehenden Formeln insofern noch nicht genau gelöst, als bei der Entwicklung derselben auf das veränderliche Gewicht der Hängestangen keine Rücksicht genommen worden ist. Es fällt indessen dieses Gewicht klein genug aus, um auch hier eine mittlere Hängestangenlänge  $\lambda = \frac{\gamma}{3}$  einführen und folglich auch das Gewicht  $G_1 = F_1 \lambda \gamma$  setzen zu können.

Nun ist aber der Querschnitt sämtlicher Hängestangen an  $CB$  zusammen genommen durch:

$$F_1 = \frac{qx}{s_1 - \lambda \gamma} \text{ annähernd } \frac{qx}{s_1}$$

gegeben, daher folgt das Gewicht derselben:

$$G_1 = \frac{\gamma \lambda}{s_1} qx,$$

und man hat, um es zu berücksichtigen, in der vorstehenden Rechnung überall anstatt  $qx$  den Werth:

$$\left(1 + \frac{\gamma \lambda}{s_1}\right) qx$$

einzuführen.

Anmerkung. Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe mit Rücksicht auf das veränderliche Gewicht der Hängestangen ist zu finden in „The Mechanical Principles of Engineering and Architecture by Moseley, London 1843“. S. auch in Bd. I des Civilingenieurs die Abhandlung von Dr. D. Schömilch über Kettenbrücken von durchaus gleicher Sicherheit.

Beispiel. Für die Kettenbrücke in §. 69 erhält man, wenn in

$$\log \operatorname{nat} \sec \psi = \frac{\gamma}{s} y; \quad \gamma = 0,0000076$$

$s = 10$ , und für  $y$  die ganze Pfeilhöhe  $h = 4000$  mm eingesetzt wird:

$$\log \operatorname{nat} \sec \psi = \frac{0,0000076}{10} 4000 = 0,00304$$

oder

$$\log \cos \psi = \log \frac{1}{\sec \psi} = 0 - \frac{0,00304}{2,302586} = -0,001320$$

$$= 9,998680 - 10;$$

daher

$$\psi^0 = 4^0 27' 30'' = 4,4584^0$$

und

$$\psi = \frac{2 \cdot 3,1416 \cdot 4,4584}{360} = 0,077814,$$

so daß nun nach (36), wenn man darin für  $x$  die halbe Spannweite 20 m = 20 000 mm einsetzt,

$$\gamma_1 = \left[ \left( \frac{10 \cdot 0,077814}{0,0000076 \cdot 20\,000} \right)^2 - 1 \right] 0,0000076 = 25,204 \cdot 0,0000076 = 0,0001916 \text{ kg}$$

sich ergibt.

Da die Belastung einer halben Kette 44 000 kg und das Gewicht der zugehörigen Hängestäbe 223 kg beträgt, so hat man die Belastung pro 1 mm der Länge:

$$q = \frac{44\,223}{20\,000} = 2,2112 \text{ kg},$$

und es ist der erforderliche Querschnitt der Kette im Scheitel:

$$F_0 = \frac{q}{\gamma_1} = \frac{2,2112}{0,0001916} = 11\,540 \text{ qmm.}$$

Für den Aufhängewinkel  $\alpha_1$  hat man nach (39):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{\frac{0,0000076 + 0,0001916}{0,0000076}} \operatorname{tg} 4^0 27' 30'' = 5,11 \cdot 0,07797 = 0,3984 = \operatorname{tg} 21^0 43'.$$

Der Querschnitt der Kette am Aufhängepunkte ist nun:

$$F_1 = \frac{F_0}{\cos \alpha_1} = \frac{11\,540}{0,9290} = 12\,422 \text{ qmm.}$$

Die Horizontalspannung der Kette folgt:

$$H = F_0 s = 115\,400 \text{ kg},$$

und die Verticalspannung im Aufhängepunkte:

$$V = H \operatorname{tg} \alpha_1 = 115\,400 \cdot 0,3984 = 45\,975 \text{ kg},$$

daher ist das Gewicht einer Kettenhälfte:

$$G = V - ql = 45\,975 - 44\,223 = 1752 \text{ kg.}$$

Bei konstantem Querschnitte ergab sich  $G = 1940$ , folglich ist die Ersparniß an Material für jede Kette:

$$2 (1940 - 1752) = 376 \text{ kg}$$

gleich ca. 10 Proc. des Kettengewichtes.

**Pfeiler und Widerlager.** Von besonderer Wichtigkeit ist noch die §. 72. Bestimmung der Dimensionen der Pfeiler und der Widerlagsmauern einer Hängebrücke. Sind  $S_1$  und  $S_2$  die Spannungen der über einen Pfeiler  $ABCD$  weggehenden Ketten, Fig. 364 (a. f. S.), und  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ihre Neigungswinkel, so hat man den Verticaldruck auf den Pfeiler:

$$V = V_1 + V_2 = S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2,$$



und den Horizontaldruck, da die Horizontalspannungen einander entgegenwirken:

$$H = H_1 - H_2 = S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2.$$

Ist nun  $h$  die Höhe  $KL$ ,  $b$  die Breite und  $d$  die Dicke  $AB$  eines Pfeilers, sowie dessen Dichtigkeit  $= \gamma$ , so hat man das Gewicht desselben:

$$G = d b h \gamma,$$

und den gesammten Verticaldruck:

$$V + G = S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 + d b h \gamma.$$

Damit aber die Horizontalkraft:

$$H = H_1 - H_2$$

den Pfeiler nicht umstürze um die Kante  $B$ , ist es nöthig, daß das statische Moment

$$H \cdot \overline{KL} = H h = (S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2) h$$

von dem statischen Moment

$$(V + G) \overline{BL} = (S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 + d b h \gamma) \frac{d}{2}$$

übertroffen werde, daß also

$$d^2 + \frac{S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2}{b h \gamma} d > 2 \frac{S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2}{b \gamma}$$

oder

$$d^2 + \frac{V_1 + V_2}{b h \gamma} d = 2 \sigma \frac{H_1 - H_2}{b \gamma}$$

sei, wobei  $\sigma$  den Stabilitätscoefficienten 2 bis 4 bezeichnet (s. §. 28).

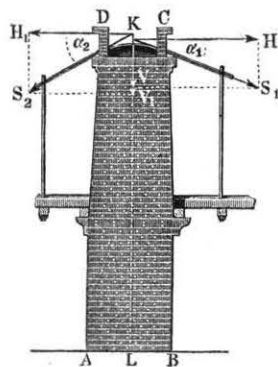
Hiernach ist die nöthige Pfeilerdicke:

$$d = -\frac{V_1 + V_2}{2 b h \gamma} + \sqrt{\frac{2 \sigma (H_1 - H_2)}{b \gamma} + \left(\frac{V_1 + V_2}{2 b h \gamma}\right)^2}.$$

Uebrigens ist der Sicherheit wegen für  $S_1 \cos \alpha_1$  der größte und für  $S_2 \cos \alpha_2$  der kleinste Werth zu setzen, also anzunehmen, daß die Kette einerseits vollständig und andererseits gar nicht belastet sei.

Diese Formel setzt voraus, daß die Kräfte  $S_1$  und  $S_2$  vollkommen übertragen werden auf den Pfeilerkopf, was allerdings nur eintritt, entweder wenn die Seilenden am Pfeilerkopf feststehen, oder wenn die Reibung auf denselben die Differenz  $S_1 - S_2$  der Spannungen übertrifft. Nach Thl. I ist diese Reibung:

$$F = \left[ \left( 1 + 2 \varphi \sin \frac{\beta}{2} \right)^n - 1 \right] S_2,$$



wenn  $\varphi$  den Reibungscoefficienten,  $n$  die Zahl der auf dem Pfeilerkopfe aufliegenden Kettenglieder und  $\beta$  den Centriwinkel bezeichnet, welcher einem Gliede entspricht; wenn daher

$$S_1 - S_2 < \left[ \left( 1 + 2 \varphi \sin \frac{\beta}{2} \right)^n - 1 \right] S_2$$

oder

$$S_1 < \left( 1 + 2 \varphi \sin \frac{\beta}{2} \right)^n S_2$$

ist, so legt sich die Kette fest auf den Pfeilerkopf auf; außerdem gleitet sie aber auf dem Pfeilerkopfe hin, und es ist deshalb in obige Formel:

$$S_1 = \left( 1 + 2 \varphi \sin \frac{\beta}{2} \right)^n S_2,$$

oder bei Seilen:

$$S_1 = e^{\varphi \alpha} S_2 \text{ (s. Thl. I)}$$

einzusetzen.

Legt man die Kette oder das Seil auf Rollen, so ist diese Differenz, und daher die nöthige Pfeilerstärke, viel kleiner. Sind die Rollenhalbmesser  $a$  und die Zapfenhalbmesser  $r$ , so hat man:

$$S_1 = S_2 + \varphi \frac{r}{a} (S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2) = S_2 + \varphi \frac{r}{a} (V + V_1)$$

zu setzen, weil die auf den Rollenhalbmesser reducirte Zapfenreibung den Werth:

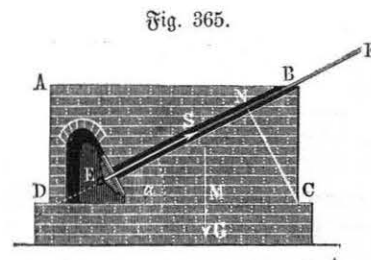
$$F = \varphi \frac{r}{a} (S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2) \text{ hat.}$$

Besteht der Pfeiler in einem drehbaren Ständer, so ist statt  $r$  der Zapfenhalbmesser und statt  $a$  die Höhe des Ständers einzusetzen, und liegt das Seil auf Walzen, so hat man statt  $\varphi r$  den Hebelarm  $f = 0,5 \text{ mm}$  der wälzenden Reibung einzuführen, wobei auch  $a$  und  $r$  in Millimetern zu nehmen sind.

Aus der Spannung  $S$  der Spann- oder Endketten (Spann- oder Endseile) kann man auch noch die nöthigen Dimensionen der Widerlagsmauer  $AC$ , Fig. 365, bestimmen.

Die Spannung  $S$  sucht die Widerlagsmauer  $AC$  um die Kante  $C$  zu drehen, und wirkt dabei am Hebelarme:

$$CN = CD \sin \alpha = l \sin \alpha,$$



wenn  $\alpha$  den Neigungswinkel  $SDC$  des Seiles gegen den Horizont und  $l$  die Länge  $CD$  der Mauer bezeichnet. Das Gewicht  $G$  der Mauer wirkt aber mit dem Momente:

$$G \cdot \overline{CM} = h b l \gamma \frac{l}{2} = \frac{1}{2} h b l^2 \gamma$$

entgegen, wo  $h$  die Höhe  $BC$ ,  $b$  die Breite und  $\gamma$  das spezifische Gewicht der Mauer bezeichnet. Für den Gleichgewichtszustand ist:

$$S l \sin \alpha = \frac{1}{2} h b l^2 \gamma,$$

daher die nöthige Mauerlänge bei einem Stabilitätscoefficienten  $\sigma$ :

$$l = \frac{2 \sigma S \sin \alpha}{h b \gamma}.$$

Damit ferner dieselbe Mauer nicht fortgeschoben werde, muß ihre Reibung  $\varphi (G - S \sin \alpha)$  größer, als die Horizontalkraft  $S \cos \alpha$ , also:

$$\varphi G > S (\cos \alpha + \varphi \sin \alpha)$$

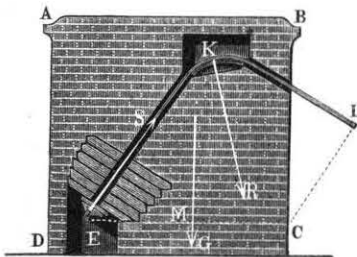
sein. Man setzt hiernach:

$$l = \frac{\sigma S}{h b \gamma} \left( \frac{\cos \alpha}{\varphi} + \sin \alpha \right),$$

wobei  $\varphi = 0,67$  und der Stabilitätscoefficient  $\sigma$  2 bis 4 anzunehmen ist.

Wenn die Kette im Widerlagspfeiler nicht bloß befestigt, sondern auch aufgelagert ist, wie in Fig. 366, so ist der Hebelarm der Spannung  $S$  das

Fig. 366.



Perpendikel  $CL = c$ , vom Stützpunkte  $C$  nach der Seilrichtung  $KL$  gefällt, und der Hebelarm des Pfeilergewichtes  $G$  die Hälfte  $CM$  der Pfeilerlänge  $CE = l$ , letztere, der Sicherheit wegen, nur bis zum Befestigungspunkte  $E$  des Seiles gemessen. Hiernach hat man

$$\frac{1}{2} h b l^2 \gamma = S c,$$

und daher mit Rücksicht auf Sicherheit

$$l = \sqrt{\frac{2 \sigma S c}{h b \gamma}}.$$

In Hinsicht auf das Fortschieben über  $CE$  ist, wenn  $\alpha$  die Neigung des Tragsseiles  $KL$  gegen den Horizont bezeichnet:

$$\varphi (G + S \sin \alpha) = S \cos \alpha,$$

wonach

$$G = \frac{S \cos \alpha - \varphi S \sin \alpha}{\varphi},$$

und

$$l = \frac{\sigma S (\cos \alpha - \varphi \sin \alpha)}{\varphi h b \gamma}$$

folgt.

Beispiel. Bei der in dem Beispiele zu §. 71 berechneten Kettenbrücke fand sich die Vertikalkraft der belasteten Kette:

$$V_1 = 45\,975 \text{ kg},$$

und die der unbelasteten zu:

$$V_2 = V_1 - 20 \cdot 1200 = 21\,975 \text{ kg}.$$

Wird nun für die Rollen des Pfeilerkopfes  $\frac{r}{a} = \frac{1}{4}$  und  $\varphi = \frac{1}{4}$  angenommen, so ist die Zapfenreibung dafelbst:

$$F = \varphi \frac{r}{a} (V_1 + V_2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} 45\,975 + 21\,975 = 4244 \text{ kg}$$

viel kleiner, als die Differenz der Spannungen. Es tritt daher eine Umdrehung der Rollen und Bewegung der Kette ein, wobei deren Spannung auf der einen Seite des Pfeilers sich vergrößert, auf der anderen abnimmt, so lange bis die Differenz der beiden Horizontalspannungen  $H_1 - H_2$  den Betrag von 4244 kg erreicht. Ist nun die Pfeilerhöhe gleich 5 m, die Breite gleich 1,2 m und das spezifische Gewicht der Mauermaße  $\gamma = 2$ , so hat man:

$$V_1 + V_2 = 67\,950 \text{ kg}, \quad b h \gamma = 1,2 \cdot 5 \cdot 2000 = 12\,000 \text{ kg}$$

und

$$H_1 - H_2 = F = 4244 \text{ kg},$$

so daß sich für einen Stabilitätscoefficienten  $\sigma = 4$  die erforderliche Pfeilerdicke berechnet zu:

$$d = -\frac{67\,950}{2 \cdot 12\,000} + \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \cdot 4244}{1,2 \cdot 2000} + \left(\frac{67\,950}{24\,000}\right)^2} = -2,83 + 4,71 = 1,88 \text{ m}.$$

Für die Widerlagsmauer der Spannkette, Fig. 365, erhält man, wenn  $h = 5 \text{ m}$ ,  $b = 3 \text{ m}$  und der Neigungswinkel  $\alpha$  gleich demjenigen  $\alpha_1$  der Tragketten am Pfeilerkopfe zu  $21^\circ 43'$  angenommen, also  $S \sin \alpha_1 = 45\,975 \text{ kg}$  gesetzt wird, für einen Stabilitätscoefficienten  $\sigma = 2$ :

$$l = \frac{2 \cdot 2 \cdot 45\,975}{5 \cdot 3 \cdot 2000} = 6,13 \text{ m}.$$

Hinsichtlich der Pfeiler von Bogenbrücken wurde bereits in §. 64 die ungünstigste Belastungsart festgestellt und dafelbst bemerkt, daß die Dimensionen dieser Pfeiler in derselben Art zu bestimmen sind, welche in Bezug auf die Widerlager der Gewölbe in §. 28 angeführt wurde.

Es sollen hier nur noch die sogenannten Fachwerkspfeiler erwähnt werden, welche man in neuerer Zeit vielfach, namentlich bei hohen in Eisen ausgeführten Wegebauüberführungen zur Anwendung bringt.

Ein solcher Fachwerkspfeiler besteht im Allgemeinen aus vier in den Ecken  $A_1, A_2, A_3$  und  $A_4$ , Fig. 367, des rechteckigen Pfeilergrundrisses auf-

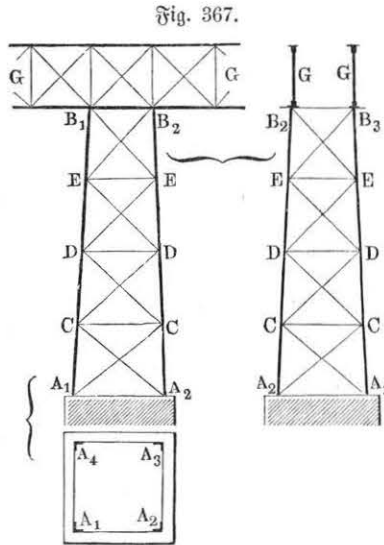


Fig. 367.

gestellten Stielen  $AB$ , welche nach oben gegen einander schwach geneigt sind, und deren obere Punkte  $B_1, B_2, B_3$  und  $B_4$  die Ecken eines rechteckigen Rahmens bilden, auf welchem die Brückenträger  $GG$  ruhen. Diese Stiele sind in verschiedenen Höhen etagenweise durch die rahmenförmigen Querverbindungen  $C, D, E$  vereinigt, und endlich sind die auf diese Weise entstehenden trapezförmigen Felder der vier Seitenflächen des Pfeilers durch gekreuzte Diagonalen wie  $CD, DE \dots$  versteift. Auch pflegt man wohl durch das Innere des Pfeilers derartige schräg stehende Zug-

bänder zwischen den diametral gegenüber stehenden Ständern anzubringen. Die Diagonalen werden wegen der gekreuzten Anordnung stets nur auf Zug beansprucht, und zwar wird je nach der Angriffsweise der äußeren Kräfte von je zwei gekreuzten Bändern bald das eine, bald das andere zur Wirkung kommen, in gleicher Art, wie dies im Vorstehenden in Bezug auf die Diagonalen der Fachwerksträger mehrfach besprochen worden ist.

Die äußeren Kräfte, welche diese Pfeiler angreifen, sind außer dem Eigengewichte der Pfeilertheile selbst das Gewicht der Brücke nebst der darauf befindlichen Verkehrslast, sowie der Druck des Windes gegen die Pfeiler, die Brückentheile, und gegen die auf der Brücke befindlichen Wagen. Außerdem ist hierzu natürlich bei Bogenbrücken noch der Horizontalschub der Bogensträger zu rechnen.

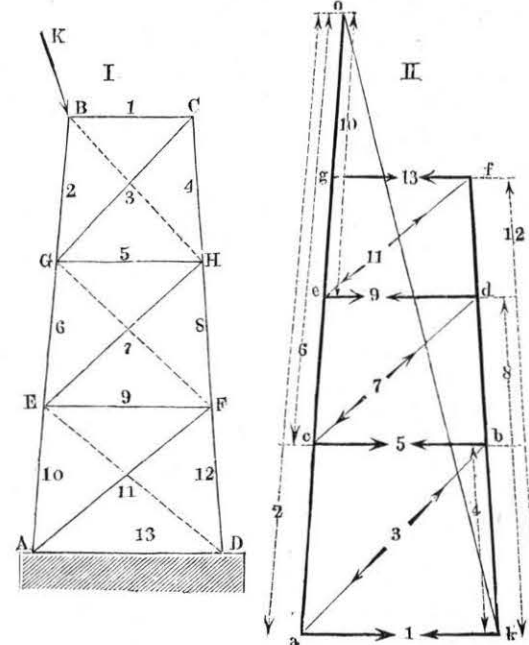
Kennt man diese angreifenden Kräfte, für welche man für die Construction die ungünstigsten Werthe zu Grunde zu legen hat, so wird man dieselben nach den Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in solche Componenten zerlegen können, welche in die Ebenen der vier Seitenflächen des obeliskenförmigen Pfeilers hineinfallen.

Ist dies geschehen, so kann man eine solche Seitenwand des Pfeilers in ähnlicher Weise behandeln, wie einen Fachwerksträger, und es gelten die für

die letzteren angeführten Regeln auch hierfür. Am einfachsten wird auch hier die graphische Ermittlung zur Kenntniß der die einzelnen Constructionsglieder angreifenden Kräfte führen, und es genügt dazu in der Regel die bloße Verzeichnung des zugehörigen Kräftepolygons.

Als Beispiel sei durch  $ABCD$ , Fig. 368, I, eine solche Seitenwand eines Fachwerkspfeilers dargestellt, und angenommen, daß die auf dieses

Fig. 368.



Fachwerk in dessen Ebene wirkende resultirende äußere Kraft durch  $K$  dargestellt sei. Es mag hier bemerkt werden, daß man auf etwaige senkrecht zu der Ebene  $ABCD$  wirkende Kraftcomponenten nicht zu berücksichtigen hat, indem diese Componenten sich immer zu solchen Mittelkräften zusammenfassen lassen, welche in die Ebenen der an  $ABCD$  anstoßenden Pfeilerwände hineinfallen.

Bei der vorausgesetzten Richtung der Kraft  $K$  ist es leicht einzusehen, daß die ausgezogenen Diagonalen  $AF, EH, GC$  in Spannung versetzt werden, während die punktirten Diagonalen  $ED, GF$  und  $BH$  wirkungslos sind. Demgemäß ergibt sich also die Zeichnung des Kräftepolygons, Fig. 368, II, leicht wie folgt. Macht man der Richtung und Größe nach



entsprechend dem gewählten Kräftemaßstabe  $ok = K$ , und zieht  $oa$  parallel  $BA$  und durch  $k$  eine Parallele mit  $BC$ , so erhält man in  $oa = 2$  die Druckkraft 2 in  $BG$ , während  $ak = 1$  die Pressung 1 in dem horizontalen Gliede  $BC$  ergibt. Letztere Kraft  $ak = 1$  zerlegt sich nun wieder durch Parallelen mit  $GC$  und  $CD$  in die Zugspannung  $ab = 3$  der Diagonale  $GC$  und die Druckspannung  $bk = 4$  in dem Ständerstücke  $CH$ .

Zerlegt man weiter die Zugkraft  $ab = 3$  nach  $ac \parallel AB$  und  $cb \parallel GH$ , so erhält man in  $cb = 5$  die Druckkraft in  $GH$ , während das Stück  $oc = 6$  diejenige Druckkraft angiebt, welche das Stück  $GE$  des Stiels  $AB$  unterhalb  $G$  zusammenpreßt. Führt man in dieser Weise fort, indem man  $cd \parallel EH$ ,  $de \parallel EF$ ,  $ef \parallel AF$  und  $fg \parallel AD$  zieht, so erhält man in den einzelnen Strecken des Kräftepolygons die Anstrengungen für die entsprechenden Fachwerkslieder. Die in Fig. I und II eingetragene gemeinsame Nummerirung läßt keinen Zweifel über die einzelnen Kräfte bestehen, und es wurden der Deutlichkeit wegen auch hier Druckspannungen durch stärkere, Zugspannungen durch schwächere Linien dargestellt.

§. 73. **Kuppeldächer.** Die kuppelförmigen Dächer, wie sie zur Ueberdeckung von Gebäuden kreisförmigen Grundrisses, z. B. Gasometergebäuden, Locomotivschuppen u. angewendet werden, haben immer die Form von Um-drehungskörpern mit verticaler Axe, und zwar kann der Meridianschnitt ebensowohl ein Kreisbogen wie auch eine andere Curve sein. Die Ueberdeckung geschieht hier mit Hilfe einer Anzahl von Sparren oder Tragrippen, welche, in Meridianebenen gelegen, von einander um gleiche Centriwinkel absteigen, an den äußeren Enden auf der unterstützenden Umfassungsmauer aufrufen, und im Innern entweder in einem Punkte der Axe zusammentreffen oder sich gegen einen centralen Schlußring stemmen, welcher etwa zur Anbringung eines Oberlichtes, Laterne, eingesetzt ist. Diese Sparren oder Rippen unterscheiden sich von gewöhnlichen Fachwerksträgern, welche man etwa diagonal und in der Mitte sich durchsetzend über dem Raume anordnen könnte, dadurch, daß ihnen die Untergurtung fehlt, und daß deren Zugkraft ersetzt ist entweder durch die Widerstandsfähigkeit der Umfassungsmauern oder durch die Spannkraft eines auf den letzteren gelagerten horizontalen eisernen Mauerringes, in ähnlicher Art, wie dies bereits in §. 30 gelegentlich der Kuppelgewölbe besprochen worden ist. Solche horizontale Ringe, welche Parallelkreise der Kuppelfläche darstellen, sind außerdem zwischen dem Auflager und dem Pole oder Scheitel der Kuppel noch mehrere zwischen den meridionalen Sparren angeordnet, die letzteren dadurch gegen einander versteifend. Die Decke der Kuppel wird dann ähnlich wie bei anderen Dächern durch Pfetten unterstützt, welche, auf

den Sparren befestigt, ebenfalls nach Parallelkreisen der Kuppelfläche angeordnet sind.

Zur Bestimmung der in den Constructionsgliedern eines Kuppeldaches wirkenden Kräfte sei zunächst allgemein eine homogene Kuppelfläche\*) von geringer Dicke betrachtet, und vorausgesetzt, daß dieselbe rings um die Axe vollkommen symmetrisch belastet sei, und zwar sei das Gewicht für jede Flächeneinheit der Kuppelfläche incl. Schnee u. mit  $q$  bezeichnet. Durch diese Belastung werden in dem Materiale der Kuppel gewisse elastische Spannungen erzeugt, welche für den Zustand des Gleichgewichts an jedem Elemente der Fläche mit der Belastung dieses Elementes im Gleichgewichte stehen. Für die folgende Untersuchung ist die Annahme gemacht, daß bei der gedachten symmetrischen Belastung diese elastischen Kräfte in jedem Punkte in die Tangentialebene der Kuppelfläche daselbst hineinfallen, das Material daselbst also nur direct durch Zug- oder Druckkräfte, nicht aber durch Biegemomente in Anspruch genommen wird. Unter dieser Voraussetzung kann man alle auf ein Element der Fläche wirkenden elastischen Spannungen nach zwei zu einander senkrechten Richtungen zerlegen, von denen die eine horizontal und tangential an den betreffenden Parallelkreis, die andere tangential an die zugehörige Meridianlinie des betrachteten Punktes gerichtet ist. Es mögen diese Spannungen pro Längeneinheit beziehungsweise mit  $p$  (nach dem Parallelkreise) und mit  $s$  (nach dem Meridian oder Sparren) bezeichnet werden, und es wird sich darum handeln, die Abhängigkeit dieser Spannungen von der Belastung  $q$  sowohl wie von der Form der Kuppelfläche und der Lage des betrachteten Punktes in der letzteren zu ermitteln.

Zu dem Ende sei für die Meridianlinie einer Kuppelfläche  $ABC$ , Fig. 369 (a. f. S.), der Scheitel  $C$  als Coordinatenanfang und die Um-drehungsaxe  $CC_0$  der Kuppelfläche als  $Y$ -Axe gewählt. Man denkt sich durch zwei um den kleinen Winkel  $\omega = EC_1F$  gegen einander geneigte Meridianebenen  $EC_1$  und  $FC_1$  aus der Kuppelfläche einen schmalen sectorenförmigen Streifen herausgeschnitten und betrachtet das trapezförmige Element desselben, welches durch die beiden um  $\partial y$  von einander entfernten Parallelkreise von den Halbmessern  $BB_0 = x$  und  $DD_0 = x + \partial x$  begrenzt wird. Dieses Element, das in Fig. 369 III besonders gezeichnet ist, hat die Größe:

$$\partial F = x \omega \partial b, \dots \dots \dots (1)$$

\*) Die hier folgende Darstellung schließt sich in der Hauptsache an die Untersuchung von Schwedler, „Die Construction der Kuppeldächer“, in Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, 1866, an.

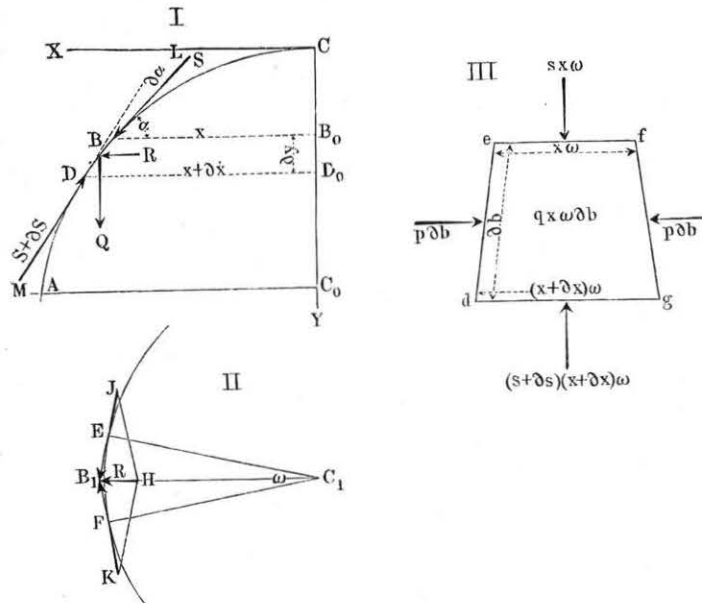
wenn mit  $\partial b$  das Bogenelement  $BD$  der Meridianlinie bezeichnet wird. Es wirkt daher in diesem Elemente als Belastung die Kraft:

$$Q = q \partial F = q x \omega \partial b. \quad (2)$$

vertical abwärts.

Außerdem wirken auf die vier Seiten des betrachteten Elementes nach dem Vorhergehenden vier Kräfte, von denen die beiden in der Ebene des

Fig. 369.



Parallelschleife wirkenden wegen der symmetrischen Belastung übereinstimmend die Größe:

$$P = p \partial b \quad (3)$$

haben, und deren Richtungen  $JB_1$  und  $KB_1$  in II um den kleinen Winkel  $\omega$  geneigt sind. Die beiden anderen in der Ebene des Meridians wirkenden Kräfte sind ausgedrückt durch:

$$S = sx \omega = LB \text{ auf } ef \quad (4)$$

und durch:

$$S + \partial S = (s + \partial s)(x + \partial x) \omega = MD \text{ auf } dg \quad (5)$$

Um für diese fünf Kräfte die Gleichgewichtsbedingungen aufzustellen, kann man die beiden gleichen Spannungen  $JB_1$  und  $KB_1$  auf  $de$  und  $fg$  zu einer Mittelfraft  $HB_1$  zusammensetzen, welche horizontal und radial ge-

richtet sein muß, und deren Größe  $R$  sich nach Fig. 369 II aus der Proportion:

$$JB_1 : HB_1 = C_1 E : EF, \text{ d. h. } P : R = x : x \omega$$

zu

$$R = P \omega = \omega p \partial b \quad (6)$$

ergiebt.

Die vier auf das Element wirkenden Kräfte  $Q$ ,  $S$ ,  $S + \partial S$  und  $R$  liegen sämtlich in der Meridianebene, und es gelten daher für dieselben die betreffenden Gleichgewichtsbedingungen. Setzt man zunächst die Summe aller verticalen Kraftkomponenten gleich Null, so wird:

$$Q + S \sin \alpha - (S + \partial S) \sin (\alpha + \partial \alpha) = 0.$$

Da  $\sin (\alpha + \partial \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha \partial \alpha = \sin \alpha + \partial (\sin \alpha)$  ist, so erhält man, da  $\partial S \partial \alpha$  als klein höherer Ordnung verschwindet:

$$Q + S \sin \alpha - S \sin \alpha - S \partial (\sin \alpha) - \sin \alpha \partial S = 0$$

oder

$$Q = S \partial (\sin \alpha) + \sin \alpha \partial S = \partial (S \sin \alpha),$$

und wenn man darin für  $Q$  und  $S$  die Werthe aus (2) und (4) einsetzt und durch  $\omega$  beiderseits dividirt:

$$q x \partial b = \partial (s x \sin \alpha) \quad (7)$$

In derselben Weise erhält man wegen der Gleichheit der horizontalen Componenten aus:

$$R + S \cos \alpha = (S + \partial S) \cos (\alpha + \partial \alpha) = (S + \partial S) (\cos \alpha + \partial \cos \alpha)$$

$$R = S \partial (\cos \alpha) + \cos \alpha \partial S = \partial (S \cos \alpha),$$

und nach Einführung der Werthe für  $R$  und  $S$  aus (6) und (4):

$$p \partial b = \partial (s x \cos \alpha) \quad (8)$$

Aus den Gleichungen (7) und (8) erhält man für eine bestimmte Kuppelschale vom Halbmesser  $B_0 B = x$ , für welche die Bogenlänge  $CB$  des Meridians durch  $b$  ausgedrückt sein mag, durch Integration zwischen den Grenzen  $s$  und  $0$  die Ausdrücke:

$$s x \sin \alpha = \int_0^b q x \partial b \quad (9)$$

und

$$s x \cos \alpha = \int_0^b p \partial b \quad (10)$$

Diese beiden Gleichungen können dazu dienen, bei gegebener Form und Belastung der Kuppel die Größe der Spannungen  $s$  und  $p$  zu bestimmen. Als Beispiel möge eine kreisbogenförmige Meridianlinie  $ABC$  vom Halb-

messer  $r$  angenommen werden. Für diesen Fall ist  $x = r \sin \alpha$  und die Bogenlänge  $b = r\alpha$ , daher  $\partial b = r \partial \alpha$ . Mit diesen Werthen, und wenn man  $q$  constant annimmt, erhält man aus (9):

$$s r \sin^2 \alpha = \int_0^\alpha q r^2 \sin \alpha \partial \alpha = q r^2 (1 - \cos \alpha),$$

woraus

$$s = q r \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{q r}{1 + \cos \alpha} \quad \dots \quad (9^a)$$

folgt.

Setzt man diesen Werth in (8) für  $s$  ein, so erhält man:

$$p r \partial \alpha = \partial \left( q r \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} r \sin \alpha \cos \alpha \right) = q r^2 \partial \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha}.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \partial \frac{\cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} &= \frac{-\sin^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \partial \alpha \\ &= \left( \cos \alpha - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) \partial \alpha, \end{aligned}$$

folglich

$$p = q r \left( \cos \alpha - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \right) \quad \dots \quad (10^a)$$

Da nach (9<sup>a</sup>)  $s$  immer positiv ist, so ist dies ein Zeichen, daß die nach der Tangente des Meridians wirkende Kraft immer, wie in der Fig. 369 angenommen worden ist, in das Element hinein gerichtet ist, daher überall eine Druckkraft vorstellt. Diese spezifische Spannung ist für den Scheitel mit  $\alpha = 0$  gleich  $s = q \frac{r}{2}$ , für den Aequator mit  $\alpha = 90^\circ$ ,  $s = q r$  und sie wächst mit zunehmendem  $\alpha$  bis zu dem Werthe  $\infty$  für  $\alpha = 180^\circ$ .

Die Spannung  $p$  dagegen nach der Richtung der Parallelskreise hat für den Scheitel mit  $\alpha = 0$  ihren größten positiven Werth von ebenfalls  $p = \frac{q r}{2} = s$ , und nimmt mit wachsendem  $\alpha$  ab bis zu Null für einen Winkel, welcher aus:

$$\cos \alpha = \frac{1}{1 + \cos \alpha},$$

oder aus

$$\cos \alpha = -\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = 0,618$$

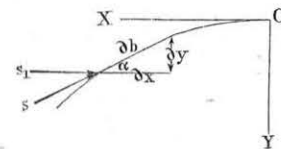
zu

$$\alpha = 51^\circ 50'$$

folgt. Bei weiterer Zunahme von  $\alpha$  wird  $p$  negativ, d. h. die Druckspannung geht von hier aus in eine Zugspannung über, welche für den Aequator mit  $\alpha = 90^\circ$  den Werth  $-q r$  annimmt, von gleicher absoluter Größe mit  $s$  daselbst. Ein ähnliches Verhalten wurde schon in §. 30 gelegentlich der Betrachtung der Kuppelgewölbe gefunden.

Wenn die Kuppel, wie es bei den Ausführungen häufig der Fall ist, sehr flach, d. h. wenn die Pfeilhöhe  $h$  im Vergleiche mit dem größten Halbmesser  $r$  nur klein ist, so kann man die Belastung  $q$  mit genügender Genauigkeit gleichmäßig über die Horizontalprojection vertheilt denken, und

Fig. 370.



in (2) die Belastung des Elementes von der Größe  $\partial F = \omega x \partial x$  zu  $Q = q \omega x \partial x$  annehmen. Bezeichnet man nunmehr mit  $p_1$  die Spannung in der Richtung des Parallelskreises bezogen auf die Einheit der horizontalen Abscisse  $x$ , so hat man nach Fig. 370 die Beziehung  $p \partial b = p_1 \partial x$ . Wenn man ferner die hori-

zontale Componente der Meridianspannung:

$$s \cos \alpha = s_1, \text{ also } s \sin \alpha = s_1 \tan \alpha = s_1 \frac{\partial y}{\partial x}$$

setzt, so gehen mit diesen Werthen die Gleichungen (7) und (8) über in:

$$q x \partial x = \partial \left( s_1 x \frac{\partial y}{\partial x} \right) \quad \dots \quad (7^a)$$

und

$$p_1 \partial x = \partial (s_1 x), \quad \dots \quad (8^a)$$

woraus man durch Integration zwischen den Grenzen  $x$  und 0 erhält:

$$s_1 x \frac{\partial y}{\partial x} = \int_0^x q x \partial x = q \frac{x^2}{2},$$

also

$$s_1 \frac{\partial y}{\partial x} = q \frac{x}{2} \quad \dots \quad (7^b)$$

und

$$s_1 = \frac{1}{x} \int_0^x p_1 \partial x \quad \dots \quad (8^b)$$

Nimmt man beispielsweise eine Parabel von der Pfeilhöhe  $h$  und Spannweite  $2r$  für die Meridianlinie an, hat man also:

$$\frac{y}{h} = \frac{x^2}{r^2} \text{ und daraus } \frac{\partial y}{\partial x} = 2 \frac{h x}{r^2},$$



so erhält man damit aus (7<sup>b</sup>):

$$s_1 2 \frac{hx}{r^2} = q \frac{x}{2} \text{ oder } s_1 = \frac{qr^2}{4h},$$

unabhängig von  $x$ , d. h. die horizontale Componente der Meridianspannung ist für alle Punkte der Kuppel von constanter Größe und zwar genau halb so groß als die Horizontalspannung eines parabolischen Bogens von gleichen Abmessungen (s. §. 65). Aus (8<sup>a</sup>) folgt für diesen Fall, wo  $s_1$  constant ist, ferner  $p_1 = s_1$ , d. h. in jedem Punkte der paraboloidischen Kuppelfläche ist auch der Druck nach der Richtung des Parallelskreises constant und von derselben Größe  $\frac{qr^2}{4h}$  mit dem horizontalen Meridionaldrucke. Das Material wird sonach in dieser Kuppel nach allen Richtungen gleich stark gedrückt.

Man kann hier die Frage aufwerfen, nach welcher Form die Kuppel auszuführen ist, damit ein Druck in der Richtung der Parallelskreise überhaupt nicht stattfindet. Diese Frage beantwortet sich sofort, wenn man in (8<sup>a</sup>)  $p_1 = 0$  setzt, wodurch man:

$$0 = \partial (s_1 x) \text{ oder } s_1 x = C$$

erhält, unter  $C$  eine noch zu bestimmende Constante verstanden. Mit  $s_1 = \frac{C}{x}$  erhält man alsdann aus (7<sup>b</sup>):

$$C \partial y = \frac{1}{2} q x^2 \partial x$$

oder

$$Cy = \frac{q}{6} x^3.$$

Die Constante  $C$  bestimmt sich dadurch, daß  $x = r$  und  $y = h$  zusammengehörige Werthe sind, zu:

$$C = \frac{q}{6h} r^3$$

und man erhält somit für die Meridianlinie die Gleichung:

$$\frac{y}{h} = \frac{x^3}{r^3} \dots \dots \dots (11)$$

einer cubischen Parabel.

Eine nach dieser Linie ausgeführte Kuppel hat die Eigenschaft, daß man sie durch beliebige Meridianschnitte in sectorenförmige Streifen zerschneiden kann, ohne das Gleichgewicht zu stören, da in den Schnittflächen keinerlei Spannungen auftreten. Es fallen nämlich nicht bloß die auf diesen Schnittflächen senkrechten Kräfte  $p_1$  fort, sondern es können auch keine in diesen Schnittflächen wirkenden Schubkräfte auftreten, wie man sich leicht folgenderart überzeugt. Schneidet man aus der Kuppelfläche durch zwei um den

kleinen Winkel  $\omega$  geneigte Meridianebenen einen sectorenförmigen Streifen heraus, welcher im Halbmesser  $r$  den Querschnitt  $f$  haben möge, so ist der radiale Horizontaldruck an dieser Stelle auf den Querschnitt durch

$$fs_1 = f \frac{C}{r} = f \frac{q}{6h} r^2$$

ausgedrückt. Für irgend einen anderen Halbmesser  $x$  ist der Querschnitt durch  $f \frac{x}{r}$  und die spezifische Spannung durch

$$s_1 = \frac{C}{x} = \frac{q}{6h} \frac{r^3}{x}$$

gegeben, folglich ist die gesammte Horizontalpressung ebenfalls durch

$$f \frac{x}{r} \frac{q}{6h} \frac{r^3}{x} = f \frac{q}{6h} r^2$$

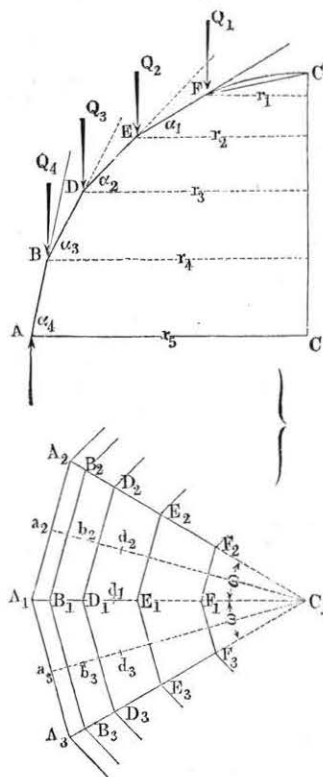
dargestellt. Diese Eigenschaft eines constanten Horizontaldrucks in jedem Streifen oder Sparren läßt die cubische Parabel als eine zweckmäßige Kuppelform erscheinen. Es muß indessen bemerkt werden, daß bei dieser Kuppelform der spezifische Druck  $s_1 = \frac{q}{6h} \frac{r^3}{x}$  nach dem Scheitel hin zunimmt und im Scheitel selbst mit  $x = 0$  unendlich groß werden würde. Wegen der beschränkten Festigkeit des Materials wird man daher diese Kuppelform nicht bis zum Scheitel, sondern nur bis zu einem gewissen, von der Widerstandsfähigkeit des Materials abhängigen Halbmesser fortsetzen dürfen, indem man den mittleren Raum durch eine besondere Kuppelschale von anderer Form oder durch eine Laterne ausfüllt, gegen deren Ring die äußere Kuppel sich anlehnt.

Die vorstehenden, für eine homogene Kuppelfläche gültigen Ermittlungen können nunmehr dazu dienen, für die in Wirklichkeit ausgeführten kuppelförmigen Dachconstructions die Kräfte in den einzelnen Tragrippen oder Sparren und in den zwischen denselben angeordneten Ringen zu finden.

Es sei etwa durch  $ABDEF$  (Fig. 371, a. f. S.) einer von den  $n$  Sparren einer solchen Kuppel dargestellt, an welchen sich in den Knotenpunkten  $A, B, D, E$  und  $F$  die polygonalen Ringe  $A_2 A_1 A_3, B_2 B_1 B_3 \dots$  anschließen, deren innerster  $F$  eine Laterne stützen möge. Man hat sich alsdann vorzustellen, daß in irgend einem Sparren, wie  $A_1 F_1$ , diejenige Spannung  $s$  auftritt, welche beim Vorhandensein einer homogenen Kuppelschale in dem Ausschnitte  $a_2 C_1 a_3$  auftreten würde, unter  $a_2$  und  $a_3$  die Mitten von  $A_1 A_2$  und  $A_1 A_3$  verstanden; d. h. man hat, um die Kraft des Sparrens  $A_1 F_1$  in irgend einem Felde, etwa zwischen  $D$  und  $E$  zu finden, die nach den Gleichungen (9) und (10) zu ermittelnde spezifische Spannung  $s$  mit dem

mittleren Abstände  $d_2 d_3$  zweier Sparren daselbst zu multipliciren. Bezeichnet man die Abscisse  $C_1 d_1$  der Mitte zwischen  $D$  und  $E$  mit  $x$ , so ist die Bogenlänge zwischen  $d_2$  und  $d_3$  bei

Fig. 371.



$n$  Sparren durch  $x \frac{2\pi}{n}$  gegeben, und man hat daher die Sparrenkraft daselbst zu

$$S = s \frac{2\pi x}{n}$$

zu setzen. In gleicher Weise hat man die Kraft  $P$  in einem Ringtheile, wie  $D_1 D_3$  gleich  $p \cdot b_3 d_3$ , zu setzen, wenn  $p$  die aus (9) und (10) zu ermittelnde spezifische Pressung nach der Richtung der Parallelkreise bei  $D$  bedeutet. Eine solche Bestimmung der Kräfte  $S$  und  $P$  in den Sparren und Ringen aus den allgemeinen Gleichungen der homogenen Kuppelfläche giebt natürlich nur annähernd richtige Resultate, welche den wirklichen Werthen um so näher kommen, je größer die Zahl der Sparren und der Ringe ist. Da nun aber in der Ausführung aus constructiven Rücksichten diese Zahl gewöhnlich nur gering angenommen wird, indem man meist nur 4 bis 6 Ringe und 16 bis 24 Sparren anzuwenden pflegt, so empfiehlt es sich, die Be-

stimmung der Kräfte  $S$  und  $P$  direct und ohne Benutzung der allgemeinen Formeln für die homogene Kuppelfläche vorzunehmen, was in folgender Weise geschehen kann.

Es seien die Halbmesser der in  $F, E, D, B$  und  $A$  angeordneten Ringe mit  $r_1, r_2, r_3, r_4$  und  $r_5$  bezeichnet, so kann man sich die ganze Kuppel in ringförmige Zonen getheilt denken, deren Gewichte als Belastungen für die einzelnen Ringe anzusehen sind. Diese Zonen hat man mitten zwischen den Knotenpunkten durch Kreise begrenzt zu denken, deren Halbmesser also

$$\frac{r_1 + r_2}{2}, \frac{r_2 + r_3}{2}, \frac{r_3 + r_4}{2} \text{ und } \frac{r_4 + r_5}{2}.$$

sind. Hat man die Gewichte dieser einzelnen Zonen, von denen die innerste die etwa daselbst angeordnete Laterne aufnimmt, festgesetzt, so findet man bei  $n$  Sparren in den  $n$  Theilen dieser Gewichte diejenigen Belastungen, welche in den einzelnen Knotenpunkten  $F, E, D, B$  und  $A$  jedes Sparrens wirksam sind. Es mögen diese Belastungen bezw. durch  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$  ausgedrückt sein. Bezeichnet man ferner mit  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  und  $\alpha_4$  die Neigungswinkel der Sparren in den entsprechenden Knotenpunkten gegen den Horizont, so erkennt man ohne Weiteres, daß man für die Pressungen  $S$  in den Sparren die Beziehungen hat:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{Q_1}{\sin \alpha_1} \text{ für } EF \\ S_2 &= \frac{Q_1 + Q_2}{\sin \alpha_2} \text{ für } DE \\ S_3 &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\sin \alpha_3} \text{ für } BD \\ S_4 &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{\sin \alpha_4} \text{ für } AB \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

Die Belastung  $Q_5$  des untersten, auf der Mauer gelegenen Ringes  $A$  hat keinen Einfluß auf die Constructionsglieder, da sie direct von der Mauer aufgenommen wird.

Ebenso findet man die Ringspannungen  $P$  mit Rücksicht darauf, daß die horizontale Componente jeder Sparrenkraft  $S$  durch die beiden anschließenden Ringspannungen  $P$  aufgenommen werden muß, also aus der allgemeinen Gleichung

$$S \cos \alpha = 2 P \sin \frac{\omega}{2},$$

wenn  $\omega = \frac{2\pi}{n}$  den Mittelpunktswinkel zwischen zwei Sparren bedeutet.

Demnach wird der unterste auf der Mauer gelegene Ring  $A$  mit einer Kraft  $P_5$  gezogen, welche zu

$$P_5 = \frac{S_4 \cos \alpha_4}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cotg \alpha_4 \dots (13)$$

sich bestimmt. Der innerste Ring  $F$  dagegen, welcher die Laterne trägt, und gegen welchen sich die Sparren nur von außen stemmen, ist einer Druckkraft  $P_1$  ausgesetzt, welche bestimmt ist durch

$$P_1 = \frac{S_1 \cos \alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cotg \alpha_1 \dots (14)$$

Was die übrigen Ringe, z. B. denjenigen  $E$  anbetrißt, so wird derselbe durch die Belastung des innerhalb gelegenen Kuppeltheils einer Zugspannung

$$P_2' = \frac{S_1 \cos \alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1 \cotg \alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}}$$

und durch den Druck der außen herantretenden Sparrentheile  $DE$  einer Druckkraft

$$P_2'' = \frac{S_2 \cos \alpha_2}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = \frac{Q_1 + Q_2}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \cotg \alpha_2,$$

also einer resultirenden Spannung

$$P_2 = P_2' - P_2'' = \frac{Q_1 \cotg \alpha_1 - (Q_1 + Q_2) \cotg \alpha_2}{2 \sin \frac{\pi}{n}}, \quad (15)$$

ausgesetzt.

Ob diese Kraft einen Zug oder Druck darstellt, hängt vorzugsweise von der Größe der Winkel  $\alpha$ , d. h. von der Form der Kuppel ab, und es wurde bereits im Vorstehenden gefunden, daß diese Ringspannung überall gleich Null ist, wenn die Meridianlinie nach einer cubischen Parabel gebildet ist, während eine kreisförmige Gestalt der Meridianlinie in den oberen Ringen der Kuppel (bis  $\alpha = 51^\circ 50'$ ) Druckspannungen, in den unteren dagegen Zugspannungen zur Folge hat.

In dem Vorstehenden ist immer angenommen worden, daß die Kuppel vollständig und gleichförmig um die Aze herum durch die größte Belastung angegriffen werde. Es läßt sich aus den angegebenen Ermittlungen und den Gleichungen (12) erkennen, daß die Sparren bei dieser größten Belastung auch ihren größten Anstrengungen ausgesetzt sind. Anders verhält es sich mit der Anstrengung der Ringe. Die Gleichung (15) zeigt nämlich, daß der Werth  $P = P' - P''$  für einen mittleren Ring seinen größten Betrag (größte Zug- oder kleinste Druckspannung) annimmt, wenn  $P'$  möglichst groß und  $P''$  möglichst klein ist, d. h. wenn der Theil innerhalb des Ringes mit der größten Belastung (Schnee, Wind), der Theil außerhalb des Ringes dagegen mit der kleinsten Belastung, d. h. nur durch sein Eigengewicht belastet ist. Umgekehrt stellt sich in einem Ringe die größte Pressung (bzw. kleinste Spannung) ein, wenn der außerhalb gelegene Theil der Kuppel der größten und der innerhalb gelegene Theil der kleinsten Belastung ausgesetzt ist.

Im Vorhergehenden ist immer eine symmetrisch um die Aze vertheilte Belastung der Kuppel vorausgesetzt worden. So lange dieser Zustand vor-

handen ist, treten die Spannungen nur in den Sparren oder Meridianen und in den Ringen oder Parallelkreisen auf. Wenn indessen einseitige Belastungen statt finden, so stellen sich gewisse andere Spannungen ein, welche nicht mehr mit den Seiten der einzelnen Vierecke zusammenfallen, in welche die Kugelfläche durch die Sparren und Ringe zerlegt ist. Um daher einer Verschiebung dieser Vierecke entgegen zu treten, sind die letzteren mit Diagonalen zu versehen, und zwar hat man in jedem Felde zwei gekreuzte Diagonalen anzuordnen, wenn dieselben nur auf Zug als Bänder beansprucht werden sollen.

Die Ermittlung der Spannungen in diesen Diagonalen ist mit großen Schwierigkeiten der Rechnung verbunden, und es soll hier nur die von Schwedler angegebene Bestimmung der äußersten Grenzen angeführt werden, welche diese Spannungen höchstens werden erreichen können. Danach findet die ungünstigste Beanspruchung einer Diagonale für denjenigen Belastungszustand der Kuppel statt, für welchen von den beiden Hälften, in welche die Kuppel durch eine Diametralebene getheilt wird, welche die gedachte Diagonale schneidet, die eine Hälfte gar nicht, die andere Hälfte mit der größten Belastung angegriffen wird. Von den beiden Sparrenstücken, welche die Diagonale zwischen sich enthalten, ist dann das eine mit der größeren Kraft  $S_{max}$ , das andere mit derjenigen  $S_{min}$  gepreßt, welche Werthe man nach (12) berechnen kann, wenn man das eine Mal die ganze Kuppel gleichförmig mit der größten Last (Eigengewicht und zufällige Last), das andere Mal mit der kleinsten Belastung (Eigengewicht allein) belastet denkt. Würde man annehmen, daß diese Differenz  $S_{max} - S_{min}$  lediglich durch die Diagonale aufgenommen würde, so erhielte man die größte Zugkraft dieser unter dem Winkel  $\beta$  gegen die Sparren geneigten Diagonale zu

$$T = \frac{S_{max} - S_{min}}{\cos \beta},$$

welcher Betrag in Wirklichkeit aber nie erreicht werden wird.

Sinsichtlich der Ausführung von Kuppeldächern muß auf den schon oben angeführten Artikel in der Zeitschrift für Bauwesen, 1866, verwiesen werden.

Schlußanmerkung. Zum weiteren Studium der Statik der Holz- und Eisenconstruktionen sind folgende Schriften zu empfehlen: Eytelwein's Statik Bd. II., Gerstner's Mechanik Bd. I. und Kaiser's Handbuch der Statik. Ferner Navier, Résumé des leçons sur l'application de la mécanique. Part. I, Paris 1833, auch deutsch von Westphal unter dem Titel: Mechanik der Baukunst, ferner Rebhann, Theorie der Holz- und Eisenconstruktionen mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. Wien 1856, Ardan, Theoretische praktische Abhandlungen über Anordnung und Construction der Sprengwerke von großer Spannweite, aus dem Französischen von v. Raven, Hannover 1844. Ausführlich über Dachconstruktionen ist die Schrift von Winter, Berlin 1862.



Ältere Werke sind: Elementary Principles of Carpentry etc. by Th. Tredgold, London 1820. Persy, Cours de stabilité des constructions. Sganzin, Cours des constructions. Cresy, An Encyclopaedia of Civil-Engineering, London 1847. Fairbairn, An account of the construction of the Britannia- and Conway-Tubular-Bridges etc. Dempsey, Tubular- and other Iron-Girder-Bridges, auch deutsch von Werther unter dem Titel: Praktisches Handbuch bei dem Bau eiserner Träger- oder Zochbrücken u., Dresden 1853; sowie Dempsey, Iron applied to railway structures und Malleable iron-bridges, sowie Examples for iron-roofs etc. Außerdem M. Veder, Die gußeisernen Brücken der badischen Eisenbahnen, Karlsruhe 1847, sowie dessen angewandte Baukunde des Ingenieurs und C. M. Bauernfeind, Vorlegeblätter zur Brückenbaukunde, neu bearbeitet von Frauenholz und Osimant, Stuttgart 1876. Siehe auch: Die Brücken- und Thalübergänge Schweizerischer Eisenbahnen von C. v. Egell, Basel 1856, sowie Duggan, Specimens of the stone-iron- and wood-bridges, New-York 1850.

Ueber die Hängebrücken handelt schon Gerstner in seiner Mechanik und beschreibt namentlich die Hammersmith- und die Menaitettenbrücke von Telford. In theoretischer Hinsicht ist vorzüglich zu nennen: Moseley, The mechanical Principles of Engineering and Architecture, auch deutsch von Scheffler unter dem Titel: Die mechanischen Principien der Ingenieurkunst und Architectur, Braunschweig 1845. In Navier's Rapport et mémoire sur les ponts suspendus, Paris 1823, wird eine allgemeine Theorie der Kettenbrücken abgehandelt. Ueber die in Frankreich häufiger angewendeten Drahtbrücken handelt Seguin (der Ält.) in einem Mémoire sur les ponts en fil de fer. Eine gedrängte Abhandlung über ältere Hängebrücken ist in Sganzin's Cours des constructions enthalten. Nachdem findet man auch mehrere Kettenbrücken beschrieben, in den Annales des ponts et chaussées, ferner in Förster's Bauzeitung u. s. w. Ueber englische Kettenbrücken wird auch gehandelt in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbleißes in Preußen Jahrgang 5 und 11.

Ueber die Drahtbrücke bei Freiburg in der Schweiz handelt die letztere Zeitschrift im 32. Jahrgang (1853); die Hängebrücke über die Maas bei Seraing wird (nach Armengaud's publication industrielle) im „Civil-Ingenieur“ Bd. II. 1856 beschrieben. Die Prager Kettenbrücke von Schnirch ist in einer besonderen Schrift von Hennig, Prag 1842, beschrieben und ebenso die Kettenbrücke über die Donau zu Pesth von Clark in einer englischen Schrift: An account of the suspension bridge across the river Danube, London 1853. Die Brücke über den Niagara findet sich beschrieben in einer Schrift von Gzowski, Toronto 1873.

Ferner gehört hierher: Schnirch's erste Kettenbrücke für Locomotivenbetrieb von J. Fauts. Wien 1861.

Die Theorie der Hängebrücken mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung von H. Telfkampff, Hannover 1856, enthält in gedrängter Kürze das Wesentliche über die Theorie und Anwendung dieser Brücken.

Endlich ist noch folgende Schrift zum Studium der statischen Baukunst zu empfehlen:

Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken u. s. w. von Dr. H. Scheffler, Braunschweig 1857. Die Basis dieser Schrift bildet das zuerst

von Herrn Moseley aufgestellte und von Herrn Scheffler weiter ausgebildete „Princip des kleinsten Widerstandes“. S. das oben citirte Werk von Moseley, sowie die Abhandlungen Scheffler's im Crelle Journal für die Baukunst, Band 29 und 30.

Die Literatur über die Statik der Bauwerke und insbesondere über den Brückenbau hat sich in der neuesten Zeit so sehr ausgedehnt, daß hier nur die wichtigsten Schriften über diesen Gegenstand angezeigt werden können. Vor Allem ist zu nennen: Rankine's Manuel of Civil-Engineering, London 1862. Ferner die Schrift von Laible und Schübler über den Bau der Brückenträger. Ueber die Eisenbahnbrücke über den Rhein bei Mainz, nach Pauli's System ist 1863 in Mainz eine kurze Beschreibung erschienen. In dem Werke von Dr. A. Ritter, Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenconstructionen, Hannover 1863, wird von der Methode der statischen Momente der ausgedehnteste Gebrauch gemacht. Ein größeres Werk über Brücken ist folgendes: Traité théorique et pratique de la construction des ponts métalliques par Molinos et Pronnier, Paris 1857. Siehe Bd. IV des Civilingenieurs „über die allgemeine Methode der Berechnung von Brücken“. Auch gehört hierher: Langer, Der Eisenbrückenbau. Wien 1863. Von besonderer Bedeutung sind die Arbeiten Schwedler's in verschiedenen Jahrgängen der Berliner Zeitschrift für Bauwesen von Erbkam, sowie die Vorträge über Brückenbau von E. Winkler, Wien 1870 bis 1875. Ferner ist hier zu nennen: Steiner's Bericht über Brückenbauten in den Vereinigten Staaten von Nord-Amerika mit einem Anhang über Dachstuhlconstructionen. Wien 1878. Interessant ist das Werk Föppl's, die neuen Trägerysteme für eiserne Brücken, Leipzig 1878. Eine geordnete Sammlung neuerer Brücken und deren statische Berechnung enthält das Werk von Heizerling: Die Brücken der Gegenwart, Aachen 1873 bis 1877, ebenso wie auch dessen „Eisenhochbau der Gegenwart“, Aachen 1876 bis 1878, eine Sammlung eiserner Dächer enthält. Hier sind auch die verschiedenen Excursionsberichte und Sammlungen zu erwähnen, welche von den „Studirenden verschiedener technischer Hochschulen“ veröffentlicht sind. Viele Abhandlungen über eiserne Brücken und Brückenträger sind in den letzten Jahrgängen des Civilingenieurs, sowie in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, in Erbkam's Zeitschrift für Bauwesen, in der Berliner Bauzeitung, in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover, in der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur-Vereins u. a. enthalten.

## Alphabetisches Sachregister.

Die angeführten Ziffern geben die Seitenzahlen an.

### A.

Activer Erddruck, 3, 4, 12, 32.  
Andreaszkreuz, 381.  
Angriffspunkt des Erddrucks, 46.  
Anker, 193.  
Aquaduct, 218, 233.  
Armierter Balken, 509.  
Auslagerarm, 248.  
Auskrümmen der Gewölbe, 116, 516.

### B.

Bänder, 225, 405, 410.  
Bahnhofshalle, 492, 499.  
Bahnschwellen, 444.  
Balken, 225, 235, 261, 274, 285.  
Balkenbogen, 557.  
Balkenquerschnitt, 340.  
Balkenträger, 556.  
Belastung, 97, 116, 139, 162, 219, 227, 235.  
Belastungsfläche, 297, 305.  
Belastungshöhe, 175.  
Belastungslinie, 104, 166.  
Belastungsscheide, 529, 544, 545.  
Belgischer Dachstuhl, 485.  
Bermé, 70.

Bewegliche Belastung, 168, 250, 255, 581.  
Biegung, 235.  
Biegemoment, 332.  
Biegespannung, 385.  
Blechbalken, 382.  
Blechträger, 365, 375, 396.  
Böschung, 49.  
Böschungsprofil, 57.  
Böschungswinkel, 2.  
Bogenhöhe, 218.  
Bogenträger, 523, 532, 556, 570.  
Böhlenbogen, 557.  
Bolzen, 224.  
Brakebrücke, 445.  
Britanniabrücke, 393.  
Bruchfuge, 125, 131.  
Bruchquerschnitt, 241.  
Brücke, 224.  
Brückengewölbe, 97, 217.  
Bundtrame, 476.

### C.

Cascadebrücke, 561.  
Centrallinie, 338.  
Chausseebrücken, 396.  
Clapeyron'sche Gleichung, 269, 315.  
Cohäsion, 43, 73.

## Alphabetisches Sachregister.

609

Conijche Gewölbe, 96.  
Conjol, 240.  
Constante Belastung, 225.  
Contingenzwinkel, 533.  
Continuirliche Träger, 285, 310.  
Conwaybrücke, 392.  
Cubische Parabel, 600.

Ellipbrücke, 452, 562.  
Ellipse, 338, 570.  
Elliptische Gewölbe, 97.  
Englischer Dachstuhl, 480.  
Erddruck, 1, 3, 21, 39, 152.  
Erde, 1.  
Erschütterungen, 227, 578, 581.  
Evolute, 142.

### D.

Dachbinder, 464, 489.  
Dachhöhe, 468.  
Dachstuhl, 399, 464, 477.  
Dächer, 224.  
Dammerde, 3.  
Decken, 224.  
Deutscher Dachstuhl, 477.  
Diagonalen, 407, 417, 445, 461, 592.  
Dirschauer Brücke, 424.  
Doppelparabelträger, 440.  
Doppelschwingung, 171.  
Drahtseile, 563.  
Drehung, 59.  
Druckellipse, 19.  
Druckermittelung, graphische, 33.  
Druckfestigkeit, 379.  
Druckkräfte, 5, 11, 224.  
Drucklinie, 62, 113, 133.  
Druckspannung, 247, 410, 436, 599.  
Druckstiele, 505.  
Druckstreben, 410, 417.  
Druckvertheilung, 7, 11, 78.  
Durchbiegung, 241, 297, 301.  
Durchlässe, 97, 217.  
Durchzug, 510.

### E.

Einklemmung, 310.  
Einschnitte, 57.  
Einsiedige Brücken, 191.  
Eisenbahnbrücken, 178, 210, 219, 234, 291, 390, 569.  
Eisenbahndämme, 97.  
Eisenconstructions, 224.  
Elasticitätsmodul, 236, 297.  
Elastische Bogenträger, 532.  
Elastische Linie, 236, 296, 302.

### F.

Fachwerk, 381, 397.  
Fachwerks Pfeiler, 591.  
Fachwerksysteme, 226.  
Fachwerksträger, 397, 405, 420.  
Fahrbahn, 168.  
Fehlercurve, 89.  
Felber, 405, 417, 439.  
Festigkeit, 175.  
Festpunkte, 319.  
Fischbauchträger, 440.  
Flügelmauern, 219.  
Fortstieben, 60.  
Französischer Dachstuhl, 483.  
Freie Auflagerung, 310.  
Füllungslieder, 234, 382.  
Fugen, 96.  
Fugencorrectur, 111.  
Fugenpressung, 521.  
Fugenschnitt, 114, 186.  
Fuhrwerke, 233.  
Fußsteige, 233.  
Futtermauern, 21, 59, 64, 73.

### G.

Gedrückte Bogen, 97, 145.  
Gegenstreben, 410, 439, 449.  
Gekrümmtes Böschungsprofil, 57.  
Geleis, 235.  
Gerade Gewölbe, 97, 210.  
Geschlossenes Kuppelgewölbe, 199.  
Gesprenkter Balken, 509.  
Gewicht, 232.  
Gewölbböcke, 112.  
Gewölbmateriale, 175.  
Gewölbfstärke, 175.  
Gewölbe, Theorie der, 96.

Gewölbte Brücken, 217.  
 Gitterbalken, 396.  
 Gleichgewichtskurve, 541.  
 Gleichgewichtszustand, 27.  
 Gleiten, 73, 115, 520.  
 Gleitfläche, 5, 13, 26, 30, 36, 51.  
 Gölzschthalbrücke, 99, 221.  
 Gothischer Bogen, 125.  
 Graphische Druckermittelung, 33, 48, 84.  
 Gratbogen, 194.  
 Grenzzustand, 13, 37, 117.  
 Größter Schub der Stützlinie, 113.  
 Gruppenpfeiler, 191.  
 Güteverhältniß, 342.  
 Gurtungen, 234, 382, 388, 397, 405.

## H.

Hängebock, 505.  
 Hängebögen, 562.  
 Hängebrücken, 563, 568, 569, 575.  
 Hängeeisen, 399, 505.  
 Hängefäulen, 225, 505.  
 Hängefelle, 563.  
 Hängefängen, 563.  
 Hängewerk, 505, 513, 563.  
 Halbfestflüssige Masse, 1.  
 Haube, 219.  
 Hauptlagen, 337.  
 Hinterfüllung, 187.  
 Hintermauerung, 126, 131.  
 Holzbrücken, 561.  
 Holzconstruktionen, 224.  
 Homogene Kuppelfläche, 595, 601.  
 Horizontalszug, 297.  
 Howe's System, 416, 426.

## I.

Inflexionspunkte, 320.

## K.

Kämpfer, 97, 128.  
 Kappen, 194.  
 Kehlballen, 470.  
 Kellerhalsgewölbe, 96, 217.  
 Kern, 116, 125.

Kettenbrücke, 394, 583.  
 Kettenlinie, 62, 102, 132, 570.  
 Ketten von gleichem Widerstande, 582.  
 Kinzigbrücke, 424, 426.  
 Rippen, der Futtermauern, 64, 520.  
 Kirchenbauten, 97.  
 Klassen, der Fugen, 116.  
 Kleinster Schub, der Stützlinie, 119.  
 Klostergewölbe, 193.  
 Knotenpunkt, 397.  
 Körper gleichen Widerstandes, 58.  
 Korbbogen, Korblinien, 97, 145, 150.  
 Kräftemaßstab, 86, 301.  
 Kreisbogen, als Stützlinie, 136.  
 Kreisgewölbe, 97.  
 Kreuzgewölbe, 193.  
 Kreuzstreben, 411.  
 Kreuzverband, 445.  
 Krümmungshalbmesser, 135, 142, 155, 236, 533.  
 Krumme Balken, 535.  
 Kuschöwer, 222.  
 Kuppeldächer, 594.  
 Kuppelgewölbe, 96, 199, 594.

## L.

Längenmaßstab, 301.  
 Längsbänder, 397.  
 Längsverband, 231.  
 Lagerfuge, 59, 61, 211.  
 Landpfeiler, 189.  
 Laterne, 199, 594.  
 Lehm, 3.  
 Lehrgerüste, 515.  
 Leitungen, 96.  
 Linien des größten Falles, 212.

## M.

Manjarddächer, 476.  
 Mauerring, 594.  
 Mauerwerk, 68, 78.  
 Maximalmoment, 253, 257.  
 Maximalpressung, 22.  
 Maximalspannung, 387, 460.  
 Mehrstöckige Brücken, 191.  
 Meridianlinie, 200, 595, 604.

Meridianspannung, 600.  
 Mittellinie, 60, 102, 128, 204.  
 Modul, der Cohäsion, 43.  
 Modul, der Gewölbe, 135, 146, 156.  
 Mögliche Stützlinien, 112, 129, 204.  
 Mohr's System, 416, 425.  
 Momentenfläche, 297, 315.

## N.

Natürliche Bausteine, 98.  
 Natürliche Böschung, 2, 32, 51.  
 Negativ, 238, 255, 311.  
 Neutrale Aye, 332, 457.  
 Neville's System, 420, 425, 426, 500.  
 Nieten, 224, 377, 388.  
 Normännischer Bogen, 128.  
 Normalprofile, 346.  
 Normalspannung, 371.

## O.

Oeffnen der Fugen, 112, 116.  
 Oeffnungsweite, 320.  
 Offene Fuge, 81.  
 Offenes Kuppelgewölbe, 199.

## P.

Parabel, 53, 240, 431, 493, 499, 570, 600.  
 Parabelträger, 429, 541.  
 Parallelträger, 405.  
 Passiver Erddruck, 3, 4, 12, 32, 46.  
 Passive Schubkraft, der Gewölbe, 121.  
 Pauli'sche Träger, 457, 462.  
 Permanente Last, 227, 255.  
 Perrondächer, 486.  
 Peterskirche, 204.  
 Pfahlrost, 219.  
 Pfeiler, 96, 218, 444, 529, 566, 587.  
 Pfeilerköpfe, 219, 589.  
 Pfeilhöhe, 97.  
 Pfeilen, 399, 464.  
 Pfosten, 225, 405.  
 Polabstand, 297, 301.

## Q.

Querträger, 390, 396.  
 Querverband, 231.

## R.

Rauchcanäle, 210.  
 Reducirte Querschnitte, 358, 378.  
 Reibungswinkel, 12, 113.  
 Rhein-Marne-Canal, 222.  
 Richtungslinie des Druckes, 62, 103, 133.  
 Ringe, 204.  
 Röhrenbrücken, Röhrenträger, 392, 396.  
 Rollen, 589.

## S.

Sägebächer, 485.  
 Säulen, 225.  
 Saltzbrücke, 444.  
 Sand, 3.  
 Schaallatten, 515.  
 Scharnierbogenträger, 525.  
 Scheerende Kräfte, 235.  
 Scheitel, 97, 128, 143, 162, 594.  
 Scheitelpressung, 177.  
 Scheitelscharnier, 526.  
 Scheitrechte Gewölbe, 96.  
 Schiefe Belastung, 351.  
 Schiefe Gewölbe, 97, 209.  
 Schlußring, 594.  
 Schneebdruck, 199, 227, 229, 464.  
 Schotter, 3, 444.  
 Schraubenbolzen, 377.  
 Schubkraft, 105, 236, 365, 378.  
 Schubspannung, 7, 11, 235, 361, 371, 384.  
 Schwedler-Träger, 446.  
 Schwellen, 225.



Schwellenrost, 219.  
 Schwellenträger, 250, 396.  
 Schwerpunktshauptlagen, 338.  
 Schwungradradius, 334.  
 Seilcurven, 296, 301.  
 Seilpolygon, 62, 102, 433.  
 Seinebrücke, 222.  
 Senkung, 128, 278, 290, 540.  
 Sichelträger, 492.  
 Spannketten, 589.  
 Spannriegel, 506, 513.  
 Spannseile, 563.  
 Spannung, der Bogen, 547.  
 Spannungsmaxima, 371, 567.  
 Spannungstrajektorie, 372.  
 Spannweite, 97, 468.  
 Sparren, 225, 399, 464, 594, 602.  
 Sparrenschub, 467.  
 Sparrenschuß, 468.  
 Spezifischer Druck, 7.  
 Speicherwinde, 248.  
 Spitzbogen, 97.  
 Spitze, der Evolute, 143.  
 Sprengwert, 505.  
 Stabilität, 114, 115, 128, 182, 530.  
 Stabilitätscoefficient, 64, 83, 184.  
 Ständer, 405.  
 Standsäule, 225.  
 Statistische Momente, Methode der, 402.  
 Staudämme, 81.  
 Steigende Gewölbe, 212, 217.  
 Stellungselfipse, 19.  
 Stiele, 225.  
 Stirnen, der Gewölbe, 96, 212.  
 Stoßfugen, 96, 211.  
 Straßenbrücken, 178, 233.  
 Streben, 225, 405.  
 Streckbäume, 382, 397, 405.  
 Stützlinie, 60, 80, 99, 102, 104, 112, 113, 116, 152, 211.  
 Stützmauern, 21.  
 Stützmoment, 320.  
 Stützreactionen, 464.  
 Symmetrieaxe, 337.  
 Symmetrische Gewölbe, 97, 99.

## T.

Tangentiaalspannung, 7.  
 Telford's Kettenbrücke, 394.

Temperaturänderung, 444, 553.  
 Thalsperren, 81.  
 Thurmbauten, 97.  
 Tonnengewölbe, 97, 99, 129, 212.  
 Träger, 225, 280.  
 Trägheitshalbmesser, 299, 334.  
 Trägheitshauptaxe, 337.  
 Trägheitsmoment, 236, 332.  
 Tragbogen, 557.  
 Tragketten, 564.  
 Tragrippen, 594.  
 Tragseile, 563.  
 Trentonbrücke, 562.  
 Treppen, 210, 215.  
 Tudorbogen, 128.  
 Tunnelgewölbe, 97, 157.

## U.

Ueberführungen, 215, 220.  
 Ueberhöhte Bogen, 97, 144.  
 Uebermauerung, 177.  
 Umkippen, 60.  
 Umsturzmoment, 529.  
 Unterführungen, 217, 220.  
 Unsymmetrische Gewölbe, 97, 162.  
 Unterzüge, 280, 381, 396.

## V.

Veränderliche Belastung, 225.  
 Verdübte Träger, 377.  
 Verkehrsast, 177, 225, 227.  
 Verschiebung, 59, 444, 446, 539.  
 Vertheilung, 11, 250.  
 Verticale Schubkraft, 236, 271.  
 Verzahnte Balken, 375.  
 Viaducte, 97, 191, 218.

## W.

Waarenspeicher, 425.  
 Wahrscheinlichste Stützlinie, 118.  
 Wechsel, 410.  
 Wegeüberführungen, 97, 191, 220, 591.  
 Wegeunterführungen, 220.  
 Wendepunkte, 271, 320.

Widerlager, 96, 182, 218, 587.  
 Widerlagsmauern, 587, 589.  
 Widerstandslinie, 60.  
 Widerstandsmoment, 340.  
 Winddruck, 227, 229, 406, 464.  
 Winkelseifen, 353.  
 Wirkliche Stützlinie, 117, 122, 125, 129.  
 Wölbung, 118.

## Z.

Zähne, 377.  
 Zangen, 515.  
 Zapfen, 224.  
 Ziegelöfen, 97.

Zuganker, 410.  
 Zugbänder, 410.  
 Zugbaum, 445.  
 Zugkraft, 224.  
 Zugspannung, 247, 369, 375, 388, 436, 599.  
 Zufällige Belastung, 225, 227.  
 Zulässige Spannung, 248, 340, 350.  
 Zusammengelegte Fachwerke, 420, 423.  
 Zweifelhafte Brücken, 191.  
 Zwischenconstructions, 396.  
 Zwischendecken, 228, 399.  
 Zwischenpfeiler, 189.  
 Zwischenstäbe, 397.  
 Zwischenstützen, 270.

## Berichtigung.

S. 300, Z. 6 u. 8 v. u. und S. 301, Z. 1 v. o. lies  $x \partial x$  anstatt  $\partial x$ .

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

## Der Konstrukteur.

Ein Handbuch zum Gebrauch beim Maschinen-Entwerfen von  
**F. Reuleaux,**

Professor an der Königl. technischen Hochschule in Berlin, Königl. Geh. Reg.-Rath,  
Mitglied der Königl. technischen Deputation für Gewerbe,  
Korrespond. Mitglied des Lombardischen Institutes und des Schwedischen Gewerbevereins,  
Auswärtiges Mitglied der Königl. Akademie der Wissenschaften in Stockholm,  
Ehrenmitglied der Gewerbevereine in Riga und Erfurt,  
des technischen Vereins in Frankfurt a. M., der Société des Arts in Genf,  
der Gesellschaft Flora in Köln, der American Philosophical Society  
und der American Society of Mechanical Engineers.

**Vierte umgearbeitete und erweiterte Auflage.** Mit zahlreichen Holz-  
stichen. gr. 8. geh. 1. bis 3. Lieferung. Preis 16 *M.* 50 *S.*  
Lieferung 4 (Schluss des Werkes) unter der Presse.

## Theoretische Kinematik.

Grundzüge einer Theorie des Maschinenwesens.

Von **F. Reuleaux,**

Professor an der Königl. technischen Hochschule in Berlin, Königl. Geh. Reg.-Rath,  
Mitglied der Königl. technischen Deputation für Gewerbe,  
Korrespond. Mitglied des Lombardischen Institutes und des Schwedischen Gewerbevereins,  
Auswärtiges Mitglied der Königl. Akademie der Wissenschaften in Stockholm,  
Ehrenmitglied der Gewerbevereine in Riga und Erfurt,  
des technischen Vereins in Frankfurt a. M., der Société des Arts in Genf,  
der Gesellschaft Flora in Köln, der American Philosophical Society  
und der American Society of Mechanical Engineers.

Mit einem Atlas und zahlreichen Holzstichen. gr. 8. geh. Preis 17 *M.*

## Die Schiffsmaschinen,

ihre Konstruktionsprinzipien, sowie ihre Entwicklung und Anordnung.

Nebst einem Anhang: **Die Indikatoren und die Indikatordiagramme.**

Ein Handbuch für Maschinisten und Offiziere der Handelsmarine, bearbeitet

von **W. Müller,**

Ingenieur in Bremerhaven.

Mit 100 Holzstichen. 8. geh. Preis 5 *M.*, geb. 5 *M.* 75 *S.*

## Elektrotechnische Bibliothek.

Bearbeitet von

**A. Merling,**

Kaiserlicher Provinzial-Telegraphen-Director (Oberregierungsath) z. D.,  
Docent der Elektrotechnik an der Königlichen technischen Hochschule zu Hannover,  
Ritter des Rothen Adler-Ordens III. Klasse mit der Schleife.

In acht Bänden. 8. geh.

Erster Band. **Die elektrische Beleuchtung** in systematischer Behand-  
lung. Construction und Betriebsverhältnisse der Lichtmaschinen, elek-  
trischen Lampen und Kerzen. Für Ingenieure, Architekten, Industrielle  
und das gebildete Publikum. **Zweite, auf die neuesten Einrichtungen**  
**vervollständigte Auflage.** Mit 361 Holzstichen. Preis 14 *M.*

Zweiter Band. **Die elektrischen Uhren** in allgemein verständlicher Dar-  
stellung der Construction und Betriebsverhältnisse, Anordnung der Uhren-  
kreise, Batterien und Leitung. Für Uhrmacher, Elektrotechniker, Me-  
chaniker, Ingenieure und das gebildete Publikum. Mit 208 Holzstichen.  
Preis 10 *M.*

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

## Zur graphischen Statik der Maschinengetriebe.

Ein Leitfaden zum Gebrauche für Maschinentechniker,  
Baumeister und Ingenieure sowie zum Unterrichte an technischen  
Lehranstalten,

Von **Gustav Herrmann,**

Professor an der Königl. technischen Hochschule zu Aachen.

Nebst einem Atlas mit acht lithographirten Tafeln. gr. 4. geh.

Preis mit Atlas 6 *M.* 20 *S.*

## Die architektonischen Stylarten.

Eine kurze allgemeinfassliche Darstellung der charakteristischen  
Verschiedenheiten der architektonischen Stylarten zur richtigen Ver-  
wendung in Kunst und Handwerk.

Für Architekten, Maler, Bauschulen und Baugewerkschulen,  
Handwerker im Allgemeinen und Bauhandwerker im Besonderen und für  
gebildete Freunde der Kunst und Architektur.

Von **A. Rosengarten,**

Architekt.

Dritte Auflage. Mit 639 Holzstichen. gr. 8. geh. Preis 12 *M.*

In englisch Leinen cartonnirt. Preis 13 *M.*

## Die Motoren für das Kleingewerbe.

Von **Alfred Musil,**

Maschinen-Ingenieur, Director der K. K. vereinigten Versuchsanstalt und  
Lehrwerkstätte in Steyr.

Zweite vermehrte Auflage. Mit 4 Tafeln und 51 Holzstichen.

gr. 8. geh. Preis 5 *M.*

## Technologisches Wörterbuch in englischer und deutscher Sprache.

Von **Gustav Eger,**

Professor an der grossh. hessischen technischen Hochschule zu Darmstadt und  
beeidigt Uebersetzer der grossh. Ministerien.

In zwei Theilen. Lexicon-Octav.

Erster Theil. **Englisch-Deutsch.** Technisch durchgesehen und vermehrt  
von Otto Brandes, Chemiker. Preis geh. 9 *M.*, geb. 10 *M.* 50 *S.*

Zweiter Theil. **Deutsch-Englisch.** Technisch durchgesehen und ver-  
mehrt von Otto Brandes, Chemiker. Preis geh. 11 *M.*, geb. 12 *M.* 50 *S.*

(Für England Commissions-Verlag von Trübner & Comp. in London.)

(Für Amerika Commissions-Verlag von Westermann & Comp.  
in New-York.)

## Die Dampfkessel,

deren Festigkeit, Construction und ökonomischer Betrieb.

Von **Robert Wilson, A. I. C. E.**

Aus dem Englischen übersetzt und für deutsche Verhältnisse bearbeitet

von **Max Borns,** Ingenieur zu London.

Mit Holzstichen. 8. geh. Preis 5 *M.* 60 *S.*